

仮想法による波力と波の回折の計算

日野 幹雄*・宮 永 洋 一**

1. 序 論

著者らはこれまでグリーン関数を用いた波の問題の解析を種々行ってきた^{2),3),4)}。特に任意形状の三次元的構造物に働く波力およびそれによる波の回折の数値計算に関して、論文1),4)で“仮想弾性板仮想荷重近似法(仮想法と略称する)”を提案したが、導入がやや唐突で、表現が抽象的なため、わかりにくいといわれるので、本論文では簡単な例題をとりあげ、仮想法の内容を具体的に説明する。

仮想法の考え方自体は以下に述べるごとく至って単純であり、波の問題に限らず、他の分野の問題への応用性も備えている。実際この方法のもともとの発想は、波の問題とは無関係であって、不規則に配置された大気汚染のモニター・ステーションでの観測濃度値から等濃度分布図を自動的に描くことにあった。

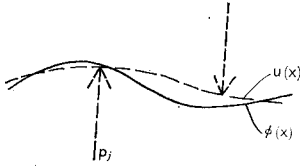


図-1

簡単のために、一次元で説明する。いま、 x の未知関数 $\phi(x)$ が、ある基礎方程式を満足しているとする。仮想法は、この $\phi(x)$ の近似解を求める方法である。その基本的な考え方は次の二点といえる。

- a) $\phi(x)$ 曲線は滑らかで、仮想の弾性梁が荷重を受けてたわんだ曲線で近似することができる。すると $\phi(x)$ とたわみ $u(x)$ とを数値的に対応させることができる。
- b) たわみ $u(x)$ を直接求めるのでなしに、それをもたらしている仮想的な荷重 p_j を求める。

ここで a) は spline 関数近似の考え方と同じだが、b) はそれとは全く異なった特徴で、従来の近似解法と、仮想法とを明確に区別している。

差分法は、考えている x の領域を必要なだけ分割して各場所での $\phi(x)$ の値を直接求めようとするのに対し、仮想法は b) に示したように仮想荷重を未知数とするので、分割を細かくしても未知数を増さずにすむ。したがって、差分法と同程度の精度を保ちながら計算時間を短縮することが可能である。

以上が仮想法の考え方で、図-1 に概念的に示してある。これは二、三次元問題にも拡張でき、その場合には仮想弾性ばりは仮想弾性板になる。

2. 基礎方程式

問題は、図-2 のごとく無限に広い水域に剛に設置された任意形状の三次元的構造物に対して、速度ポテンシャル $\Phi_{in}(x, y, z)e^{-i\sigma t}$ を持つ波が入射するとき、発生す

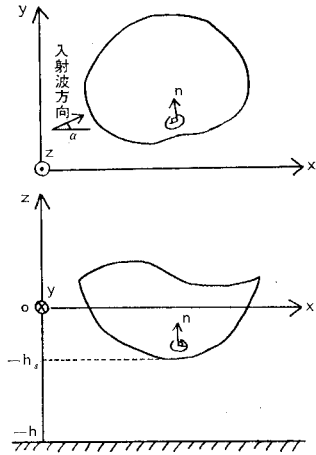


図-2

る散乱波の速度ポテンシャル $\Phi_{sc}(x, y, z)e^{-i\sigma t}$ を求めることである。ここに、 σ は角振動数で、波はすべて微小振幅波と考えている。場全体の速度ポテンシャル $\phi(x, y, z, t)$ は、入射波と散乱波の速度ポテンシャルの重ね合せで得られる。

$$\phi(x, y, z, t) = (\Phi_{in} + \Phi_{sc})e^{-i\sigma t} \dots\dots\dots(1)$$

基礎方程式は Φ_{sc} についての Laplace の式であるが、これはグリーン関数を用いて積分方程式に帰着することが

* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科
 ** 学生会員 東京工業大学大学院修士課程

できる。式の誘導は論文 4) で詳述したからここでは結果のみ示す。以下、 Φ_{so} を単に Φ と書く。

Φ のみたす積分方程式は、

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta, \zeta) = & -\lim_{(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow S} \int_S \left\{ \Phi(x, y, z) \right. \\ & \times G_n(x, y, z) + G(x, y, z) \\ & \left. \times (\Phi_{in}(x, y, z))_n \right\} dS \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

となる。ここに、積分領域 S は、物体の水浸面で、 n はその法線方向 (物体内部へ向かうとき正)、 (ξ, η, ζ) は物体外部から近づく極限の意味で S 内に存在する点で、グリーン関数の特異点である。

入射波の速度ポテンシャルは、微小振幅波理論でよく知られているように次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Phi_{in}(x, y, z) = & -\frac{igH}{2\sigma} \cdot \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \\ & \cdot \exp \{ ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha) \} \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ここに、 H : 波高、 k : 波数で $k \tanh kh = \lambda$ の実正根。ただし $\lambda = \sigma^2/g$ 。

グリーン関数は、John (1950)⁵⁾ による次式を用いる。

$$\begin{aligned} G(x, y, z) = & \frac{i}{2} C_0 H_0^{(1)}(kR) \cosh k(h+z) \\ & \times \cosh k(h+\zeta) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} C_n K_0(\nu_n R) \\ & \times \cos \nu_n(h+z) \cos \nu_n(h+\zeta) \\ & (-h < z, \zeta \leq 0) \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここに、 ν_n : $\nu_n \tan \nu_n h = -\lambda$ の実正根で $0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_n < \dots$

$$C_0 = (k^2 - \lambda^2) / (h(k^2 - \lambda^2) + \lambda) \quad \dots\dots\dots (4a)$$

$$C_n = (\nu_n^2 + \lambda^2) / (h(\nu_n^2 + \lambda^2) - \lambda) \quad \dots\dots\dots (4b)$$

3. 積分方程式の差分解

式 (2) の数値解を得るために、領域 S を $j=1 \sim N$ 個の小要素 ΔS_j に分割し、その要素内の Φ の値を一定 (Φ_j) と近似すれば、積分方程式は Φ_j に関する連立一次方程式となる。

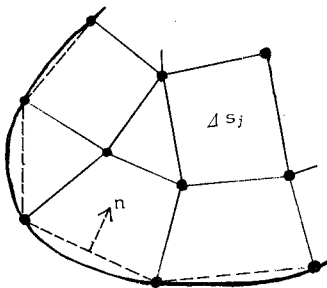


図-3

$$\begin{aligned} \Phi_j = & -\sum_{i=1}^N \{ G_{n,ij} \Phi_i + G_{ij} \tilde{\Phi}_{n,i} \} \Delta S_i \\ & (j=1 \sim N) \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} G_{ij} = & G(x_i, y_i, z_i) \\ & \left(\xi_j, \eta_j, \zeta_j \right), \quad G_{n,ij} = G_n(x_i, y_i, z_i) \\ & \left(\xi_j, \eta_j, \zeta_j \right), \\ \tilde{\Phi}_{n,i} = & (\Phi_{in}(x_i, y_i, z_i))_n \end{aligned}$$

ただし、このグリーン関数の係数の計算で、特異点における値 ($i=j$ のとき) には式 (4) は使えない。実際特異点においては、グリーン関数は発散するのであるが、式 (2) の右辺の積分値は有限となる。したがって、式 (5) の右辺で、 $\bar{G}_{n,jj}, \bar{G}_{jj}$ といった特異点における有効なグリーン関数の値を計算することができる。詳細は、論文 4) に述べたので、ここには結果のみを記す。

$$\bar{G}_{jj} = \pi r_0^3 / 2 \Delta S_j \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\bar{G}_{n,jj} = \pm 1/2 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし、式 (6) の r_0 は、面素の内接円の半径、式 (7) の符号は、物体表面で物体内部へ向かう法線方向の正負にしたがう。

かくして、式 (5) を整理し、行列表示すれば、

$$G\phi = g \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。ただし、

$$\phi = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N]^T \quad \dots\dots\dots (8a)$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 + \bar{G}_{n,11} \Delta S_1 & G_{n,21} \Delta S_2 \cdots & G_{n,N1} \Delta S_N \\ G_{n,12} \Delta S_1 & 1 + \bar{G}_{n,22} \Delta S_2 \cdots & G_{n,N2} \Delta S_N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{n,1N} \Delta S_1 & G_{n,2N} \Delta S_2 \cdots & 1 + \bar{G}_{n,NN} \Delta S_N \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (8b)$$

$$g = \begin{bmatrix} \bar{G}_{11} & G_{21} & \cdots & G_{N1} \\ G_{12} & \bar{G}_{22} & \cdots & G_{N2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{1N} & G_{2N} & \cdots & \bar{G}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{n,1} \Delta S_1 \\ \tilde{\Phi}_{n,2} \Delta S_2 \\ \vdots \\ \tilde{\Phi}_{n,N} \Delta S_N \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (8c)$$

である。連立方程式 (8) を解いて、物体表面の散乱波の速度ポテンシャルの数値解を得ることができる。

〔計算例〕

上述の方法にしたがって、簡単な例につき計算してみた。

構造物として、図-4 のように水面に設置された辺長 $a \times b$ の矩形板を考え、波は x 軸の負の方向から入射してくるものとする。

図-6 が $b/a=0.5, h/a=0.4, L$ (入射波長) $/a=1.24$ のときの計算結果で、板下面における圧力変動幅および板周辺の波高の分布をラインプリンタにより出力させ、等値線を手書きで記入したものである。数値はすべて入

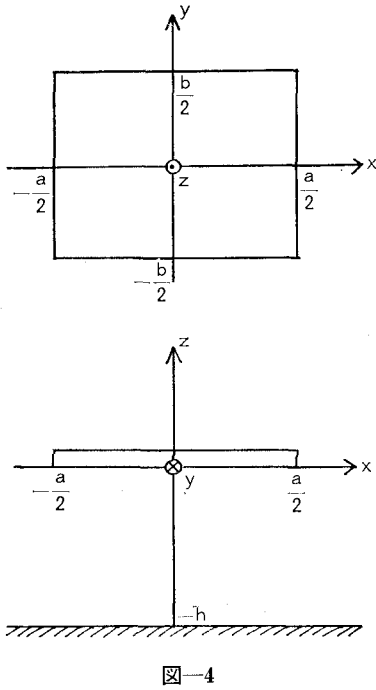


図-4

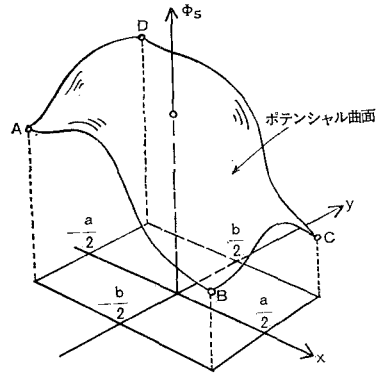


図-5 (a)

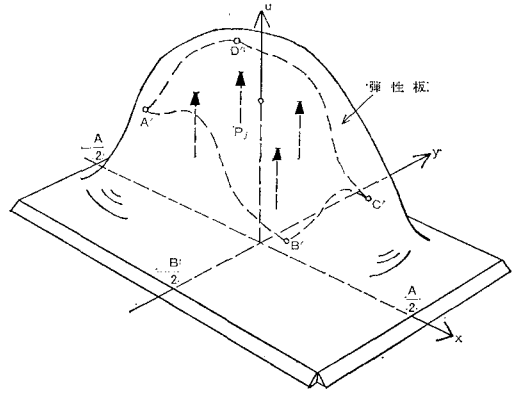


図-5 (b)

射波高で無次元化されている。面素分割数は56である。

4. 仮想法による解

ここでは仮想法が波の計算に、具体的にどう適用されるかをわかりやすく説明するために、前節の〔計算例〕で取扱った矩形板の問題を考え、同時に差分解と比較することによってその特徴を明らかにする。

図-4 に示した矩形板下面の速度ポテンシャルを $\Phi_s(x, y)$ として、もしポテンシャル曲面を描けば、概念的には 図-5 (a) のようになるであろう。そこで、これとは無関係に、辺長 $A \times B$ の、各辺が単純支持され、荷重を受けてたわんでいる仮想の弾性板を考え、そのたわみ u が、数値的に速度ポテンシャル Φ_s と等しくなるような条件を設定する。これは 図-5 (b) に示してある。この条件を満足する仮想荷重 P_j を求めようとするのが仮想法である。

なお、構造物は平板である必要はなく、曲面であって差しつかえない。仮想板と対応させるのは実曲面上の速度ポテンシャル Φ だから。

(1) 4点近似の場合

P_j の作用点を (ξ_j, η_j) とし、いま4個の仮想荷重をとってみる。

点 (ξ_j, η_j) に集中荷重 $P_j (j=1, 2, 3, 4)$ が作用するとき、板上の任意点 (x, y) のたわみ $u(x, y)$ は、

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^4 \delta\left(\frac{x, y}{\xi_j, \eta_j}\right) P_j \dots\dots\dots (9)$$

で表わされる。ここに、 $\delta\left(\frac{x, y}{\xi, \eta}\right)$ は弾性板のたわみのグリーン関数であり、次式で与えられる。

$$\delta\left(\frac{x, y}{\xi, \eta}\right) = \frac{4}{\pi^4 ABD} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi x/A) \sin(l\pi y/B) \sin(k\pi \xi/A) \sin(l\pi \eta/B)}{(k^2/A^2 + l^2/B^2)^2} \dots\dots\dots (10)$$

ただし、 $D (= Et^3/12(1-\nu^2))$ 、 E : 弾性係数、 t : 板厚、 ν : ポアソン比) は曲げ剛性で、その値は結果に無関係に勝手に選んでよい⁴⁾。

いま、式 (9) で表わされるたわみが、 S 内の幾つかの点 (Collocation 点) で速度ポテンシャルと数値的に一致するものとする。この Collocation 点の数は、一般に荷重の数よりは多い方がよいが、いまは荷重と同数、すなわち4個にとる。これを、

$$(\xi_i, \eta_i) \quad i=1, 2, 3, 4$$

で表わしておく。

Collocation 点では $\Phi = \Phi_s, u = \Phi_s$ とおいて、式 (2) と (9) が同時に成立しなければならない。そこで $u = \Phi = \Phi_s$ として (9) を (2) に代入すると、

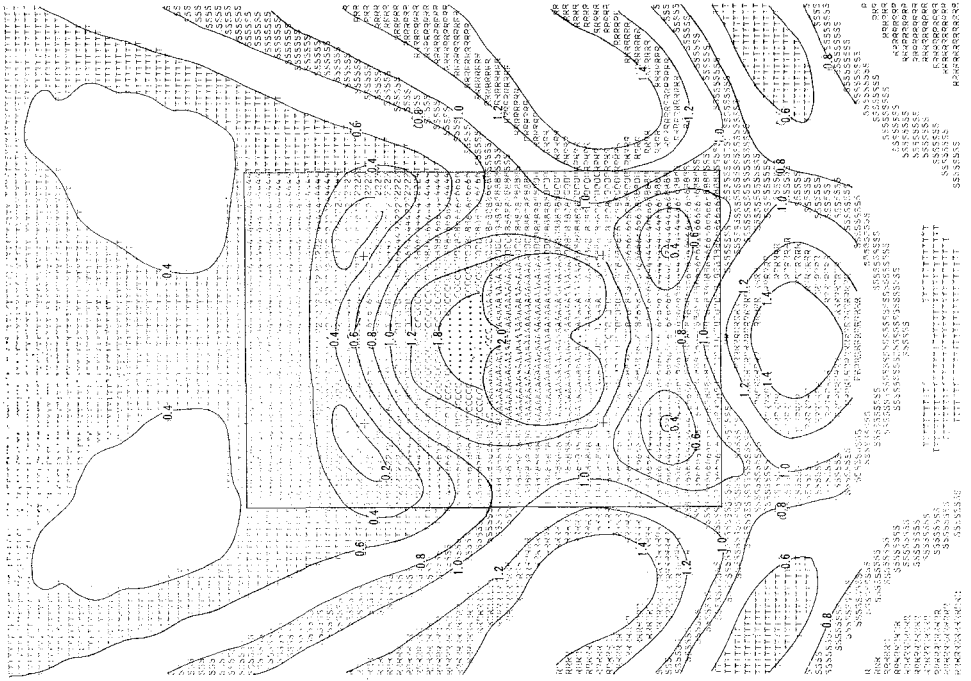


図-7 假想法 (4点荷重)

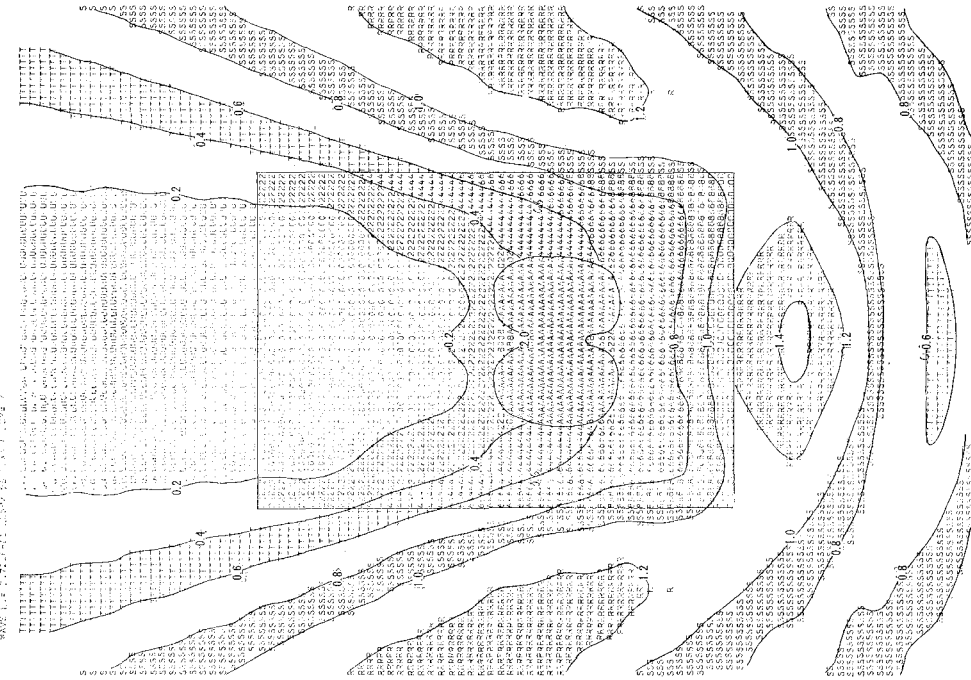
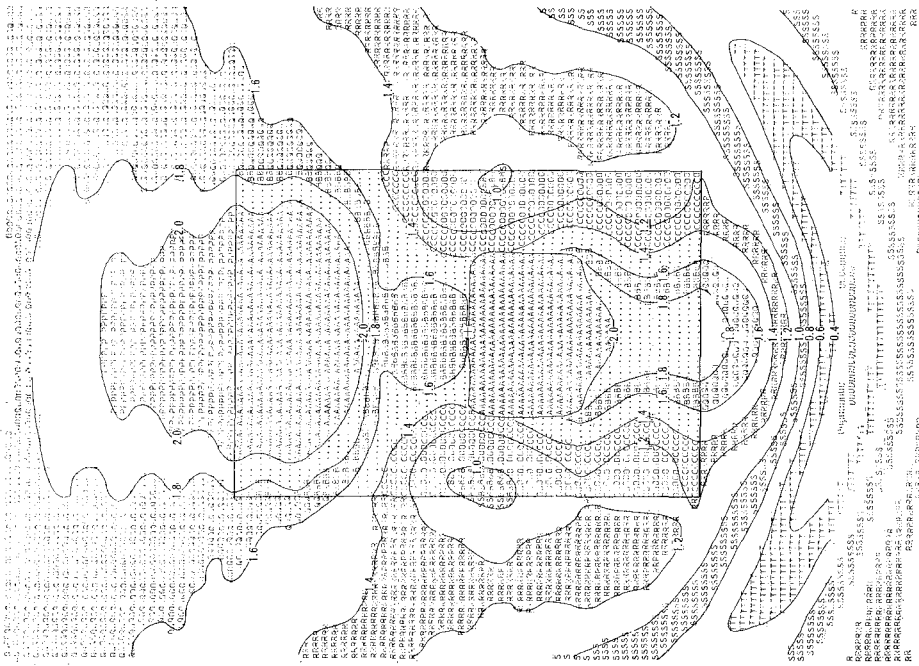


図-6 差分解



図—8 仮想法 (1点荷重)

$$\sum_{j=1}^4 \left\{ \delta \begin{pmatrix} \xi_i, \eta_i \\ \xi_j, \eta_j \end{pmatrix} + \int_S G_z(x, y) \delta \begin{pmatrix} x, y \\ \xi_j, \eta_j \end{pmatrix} dx dy \right\} P_j = - \int_S G \begin{pmatrix} x, y \\ \xi_i, \eta_i \end{pmatrix} (\Phi_{in}(x, y))_z dx dy \quad (i=1, 2, 3, 4) \dots\dots\dots (11)$$

を得る。これは4個の荷重 P_i についての次のような連立一次方程式である。

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (12)$$

ここに、

$$D_{ij} = \delta \begin{pmatrix} \xi_i, \eta_i \\ \xi_j, \eta_j \end{pmatrix} + \int_0^a \int_0^b G_z(x, y) \delta \begin{pmatrix} x, y \\ \xi_i, \eta_i \end{pmatrix} dx dy \quad (12a)$$

$$d_i = - \int_0^a \int_0^b G \begin{pmatrix} x, y \\ \xi_i, \eta_i \end{pmatrix} (\Phi_{in}(x, y))_z dx dy \quad (12b)$$

式 (12) を解いて仮想荷重の大きさが求まれば、式 (9) を用いて S 内の任意点の速度ポテンシャルを求めることができる。

前節の差分解の例と同じ条件で計算した結果を 図—7

に示す。図中の十点は荷重の作用点を表わし、Collocation 点もこれに一致させた。

(2) 1点荷重4点近似の場合——最小二乘法

Collocation 点数が荷重点数より多い場合は未知数より条件式数の方が多くなるから最小二乗法で考える必要がある。たとえば荷重点1, Collocation 点4としてみよう。座標はそれぞれ、

$$(\xi_0, \eta_0), \quad (\xi_i, \eta_i) \quad i=1, 2, 3, 4$$

とする。すると連立方程式は、

$$\left\{ \delta \begin{pmatrix} \xi_i, \eta_i \\ \xi_0, \eta_0 \end{pmatrix} + \int_S G_z(x, y) \delta \begin{pmatrix} x, y \\ \xi_0, \eta_0 \end{pmatrix} dx dy \right\} P_0 = \int_S G \begin{pmatrix} x, y \\ \xi_i, \eta_i \end{pmatrix} (\Phi_{in}(x, y))_z dx dy \quad (i=1, 2, 3, 4) \dots\dots\dots (13)$$

あるいは、次のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} P_0 = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

$$E_i = \delta \begin{pmatrix} \xi_i, \eta_i \\ \xi_0, \eta_0 \end{pmatrix} + \int_0^b \int_0^a G_z(x, y) \delta \begin{pmatrix} x, y \\ \xi_0, \eta_0 \end{pmatrix} dx dy \quad (14a)$$

$$e_i = - \int_0^b \int_0^a G \begin{pmatrix} x, y \\ \xi_i, \eta_i \end{pmatrix} (\Phi_{in}(x, y))_z dx dy \quad (14b)$$

残差 $A = \sum_{i=1}^4 |E_i P_0 - e_i|^2$ を最小とするような、 P_0 は、

$$\sum_{i=1}^4 E_i^* (E_i P_0 - e_i) = 0 \dots\dots\dots (15)$$

で与えられる。ここに E_i^* は E_i の共役複素数である。
 例題の計算結果を図-8に示す。

5. 計算結果の比較

図-6を基準として、図-7, 8と比較してみると、同じ4点の Collocation 近似でも、荷重4個の方が1個よりも良く近似できている。これは、荷重の数が多いほど、より複雑な曲面を近似できることから考えれば明らかである。

図-8では板中央付近の2.0という大きな波圧の他に、板後方にもやはり2.0の波圧が表われているが、これは荷重点の位置から考えて、弾性板のたわみの相反性に基づくものと考えられる。

6. 計算時間の短縮について

仮想法による計算時間の短縮率は、論文4)の補遺に示したごとく、面素分割数 N 、Collocation 点数 M として、およそ $(M/N)^2$ であるが、いくつかの計算例における CPU time を表-1に示す。これは構造物を水面に置かれた円板として 3, 4 で述べた方法にしたがって計算したものだが、 $N=112$ の場合を除いて、仮想法の方が時間がかかっている。実はこれは、仮想法でたわみのグリーン関数をあらかじめ配列に store しておく際に、時間をくった結果である。これは式(10)のたわみのグリーン関数(無限級数)が収束するまでの計算のプログラミングがまずく時間がかかったためである(プログラムの工夫により時間短縮が可能)。 $N=60$ の場合について、表-2のようにその内容を見てみると、行列成分の計算およびその解を求めるまでの計算時間までと比較してみれば、短縮率は $(1+0)/(6+4)=1/10$ となり、 $(M/N)^2 \approx 1/14$ に近い値となっている。

したがって仮想法による計算時間短縮の効果は、比較的大きな N の値をとり、一度計算したのち store しておいたグリーン関数の値を用いて、多数個の構造物の波力計算を行ったときに顕著にあらわれるといえよう。

表-1 仮想法と差分法の計算時間の比較

N	32	60	112
差分法	20	34	94
仮想法 (荷重数 16, $M=16$)	30	41	65

単位: 秒

表-2 計算時間の内訳 ($N=60, M=16$)

	入力およびグリーン関数値の store	連立方程式の係数行列成分	連立方程式の解(逆行列計算)	波力・波高の計算および出力	計
差分法	9	6	4	15	34
仮想法	26	1	0	14	41

単位: 秒

7. 結 語

波力および波の回折の計算手段として、仮想法の応用を説明した。この方法は、直接の差分法と比較して、計算時間短縮、精度の保持という点ですぐれている。

参 考 文 献

- 1) 日野幹雄: 仮想法の提案と解説, 東京工業大学土木工学科研究報告 No. 18 (1975)
- 2) 日野幹雄・藤崎治男: 固定された海上構造物による波の反射と透過—Green 関数による理論解, 第20回海岸工学講演会論文集, pp. 101~106 (1973)
- 3) 日野幹雄・宮永洋一: 任意形状の海洋構造物に作用する波力—Green 関数による解, 第5回海洋開発シンポジウム講演集, pp. 7~12 (1974)
- 4) 日野幹雄・宮永洋一: グリーン関数および仮想法による波力と波の回折計算, 土木学会論文報告集第237号, pp. 51~62 (1975)
- 5) John, F.: On the motion of floating bodies, II. Simple harmonic motions, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 3, pp. 45~101 (1950)