

# 波動解析への有限要素法の適用 (第3報)

—地形および構造物による波の散乱について—

坂井 藤一\*・月岡 康\*\*

## 1. まえがき

海洋の波浪は、地形および構造物による屈折、回折、反射などによって複雑な現象を起し、これらを現実に見て正確に把握することは非常に困難である。これらの問題に対して従来解析的に解が求められているのは、半無限直線防波堤による波の回折を Sommerfeld の回折理論を用いて解析した Penny and Price<sup>1)</sup>、円柱による波の回折を扱った MacCamy and Fuchs<sup>2)</sup> あるいは楕円柱による波の回折を取り扱った合田・吉村<sup>3)</sup> の研究などごく限られた場合である。一方、船舶工学の分野においても、特定形状を有する船体の場合に、その動揺に伴う主として2次元の radiation 問題が解析的に扱われている。これに対して、近年 Daubert and Lebreton<sup>4)</sup>、Lee<sup>5)</sup>、井島<sup>6)</sup> および日野<sup>7)</sup> は、Green 関数を用いて積分方程式を導き、それを離散化して解くことにより、任意の地形および構造物形状に対処する方法を示している。しかしながら、これらは水深変化を簡単に考慮できないという難点がある。

これを克服する方法として差分法<sup>8)</sup> や有限要素法 (FEM)<sup>9), 10)</sup> などの数値シミュレーション手法がある。ところが、この場合無限に広がる open sea を扱うことがなかなか難しい。これは、数値シミュレーションにおいては必然的に有限領域を扱うことになり、境界において無限遠での条件を代表させるように解を定めることが難しいためである。

このような点に関して、Bai<sup>11)</sup> は FEM で波の散乱問題を扱うにあたり、無限遠での境界条件である放射条件をそのまま有限境界の条件として用いる考え方を示した。この方法は扱いが簡単ではあるが、特に平面2次元波の問題では、解析領域を大きくとらねばならないという欠点がある。そのため解析解を利用する方法が考えられるようになった。これは無限遠で放射条件を満たす解析解を FEM に接続させることにより、無限遠での条件を有限な FEM 境界での条件に変換するというものである。この方法によるものとして、吹出しを用いて Green

関数を FEM に接続させた Berkhoff<sup>12)</sup>、hybrid 法変分原理により固有関数展開などの解析解を FEM に接続させた Chen and Mei<sup>13)</sup>、Bai and Yeung<sup>14)</sup> および瀬戸・山本<sup>15)</sup> などの研究があげられる。

ここでは、Green の公式を用いて、無限遠で放射条件を満足する Green 関数を FEM に接続させることにより、FEM 境界に離散積分方程式形の境界条件を与える方法を用いている。これは Berkhoff に近い立場であるが、無用な吹出しを求める必要がなく、より直接的であると言えよう。

本手法の特徴は、任意形状構造物および水深変化に対応できるばかりでなく、波のかく乱源のない一様水深領域に解析解を適用することにより、FEM 解析領域を必要最小限にとどめて無限領域の波動解析を行えるところにある。これにより、FEM 解析におけるコンピュータ容量および費用面での問題に大きな改善がなされ、波の回折、散乱問題への FEM の適用がかなり実用化されるに至ったと思われる。

## 2. 基礎理論

非圧縮、非粘性、非回転の平面2次元微小振幅重力波において、現象が周期的であるとすると、図-1 に示すように  $x-y$  平面における水面変動  $\eta$  は次の Helmholtz 方程式により記述される。

$$\Delta\eta + k^2 \cdot \eta = 0 \quad \text{in } \Omega \dots\dots\dots (1)$$

ただし  $\Omega$  は対象とする領域であり、 $k$  は角波数、 $\Delta$  は Laplace 作用素である。これに対する境界条件は、

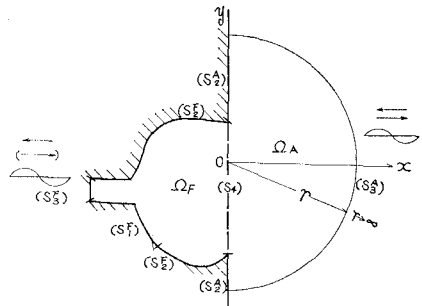


図-1 Notations

\* 正会員 工博 川崎重工業(株)鉄構事業部開発設計部  
 \*\* 正会員 工修 川崎重工業(株)鉄構事業部開発設計部

$$\eta = \eta_{\text{given}} \quad \text{on } S_1 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\eta_{,n} = 0 \quad \text{on } S_2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\eta_{,n} - i \cdot k \cdot \eta = 0 \quad \text{on } S_3 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし,  $S_1$  は固定境界,  $S_2$  は自由境界,  $S_3$  は放射境界であり,  $(\ )_{,n}$  は境界線上での外法線方向微分を示す。

解析にあたって, 全領域  $\Omega$  を仮想境界  $S_4$  により FEM 領域  $\Omega_F$  と解析解領域  $\Omega_A$  に分割する。前者は, 地形や構造物による境界形状の不規則性および水深変化の許される閉領域とし, 後者は, 波のかく乱源を含まない一定水深の無限領域とする。両者の境界における連続条件は次式で与えられる。

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}, \quad \bar{\eta}_{,n} = -\bar{\eta}_{,n} \quad \text{on } S_4 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで,  $\bar{\eta}$  および  $\bar{\eta}_{,n}$  は, それぞれ  $\Omega_A$  および  $\Omega_F$  における水面変動を示す。

(1) 解析解領域の計算

入射波と反射波の和を  $\eta_0$  (付録 参照), 散乱波を  $\eta_s$  とすると,  $\bar{\eta}$  は

$$\bar{\eta} = \eta_0 + \eta_s \quad \dots\dots\dots (6)$$

と表わすことができる。 $\eta_0$  は既知であるから,  $\eta_s$  が求まれば  $\bar{\eta}$  は決定される。 $\eta_0$  は  $S_4$  上の条件を除いて独自に基礎方程式および境界条件を満足するので,  $\eta_s$  もまた同様の関係式を満足せねばならない。

ここで,  $\eta_s$  と同様の関係式を満たし,

$$I_m[g(P, Q)] \longrightarrow -\frac{2}{\pi} \ln(k|P-Q|) \\ P \rightarrow Q \quad \dots\dots\dots (7)$$

で与えられる特異性を有する Green 関数  $g(P, Q)$  を考える (付録 参照)。ここで,  $P$  および  $Q$  は  $\Omega_A$  内の点を表わし,  $I_m[ ]$  は虚部を示す。 $\eta_s$  と  $g$  に Green の公式を適用する。

$$\int_{\Omega_A} (\eta_s \Delta g - g \Delta \eta_s) d\Omega = \int_{S_A} (\eta_s g_{,n} - g \eta_{s,n}) dS \quad (8)$$

ここで,  $S_A$  は  $\Omega_A$  の全境界を示す。 $\eta_s$  および  $g$  の満足する関係式を考慮して変形すると,  $S_4$  上の  $\eta_s$  に関して次の関係式が得られる。

$$\eta_s(P)|_{\text{on } S_4} = \frac{i}{2} \int_{S_4} \{\eta_s(S)g_{,n}(P, Q) - g(P, Q)\eta_{s,n}^{(S)}\} dS \quad \dots\dots\dots (9)$$

また,  $\Omega_A$  内の  $\eta_s$  に関して次式を得る。

$$\eta_s(P)|_{\text{in } \Omega_A} = \frac{i}{4} \int_{S_4} \{\eta_s(S)g_{,n}(P, Q) \quad \nearrow$$

$$\nearrow -g(P, Q)\eta_{s,n}(S)\} dS \quad \dots\dots\dots (10)$$

これにより,  $\Omega_A$  内の  $\eta_s$  は  $S_4$  上の  $\eta_s$  および  $\eta_{s,n}$  を用いて式(10)から計算される。式(9)の積分方程式は, 図-2 に示すように  $S_4$  を折線で分割し, その中点  $m$  をコントロールポイントとして近似的に積分を離散化して取扱う。すなわち,

$$\{\eta_s(m)\} = [gn]\{\eta_s(m)\} - [g]\{\eta_{s,n}(m)\} \quad \dots\dots (11)$$

ここで,  $\{\eta_s(m)\}$  は  $\{\eta_s(1), \eta_s(2), \dots\}^T$  なるベクトルであり, 以後同様の表示法を用いることにする。また, 式(11)の第1項および第2項は, それぞれ式(9)右辺の第1項および第2項を離散化したものに相当する。 $[gn]$  および  $[g]$  は係数マトリックスであり, 以後同様の表示法を用いる。

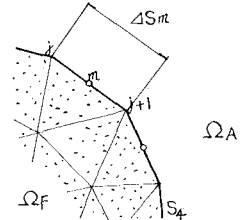


図-2 Discretization on the pseudo boundary

(2) FEM 領域の計算

$S_4$  上での連続式(5)に式(6)および式(11)を適用すれば, 境界要素の節点をコントロールポイントとした,  $\bar{\eta}$  に関する仮想境界条件式を得る。

$$\{\bar{\eta}_{,n}(j)\} = -[P] \cdot \{\bar{\eta}(j)\} + \{c(j)\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで,

$$[P] = [K]^T \cdot [g]^{-1} \cdot [gn] \cdot [K] \quad \dots\dots\dots (13)$$

$[K]$ :  $\bar{\eta}(m)$  と  $\bar{\eta}(j)$  の関係を示す変換マトリックス

また,  $\{c(j)\}$  は  $S_4$  上での  $\eta_0$  によって次式で与えられる。

$$\{c(j)\} = [P] \cdot \{\eta_0(j)\} + \{\eta_{0,n}(j)\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

以上から, ここでの問題は, Helmholtz 方程式(1)を境界  $S_1 \sim S_4$  における条件式(2), (3), (4) および(12)の下に解くことである。

$\bar{\eta}$  を次のように複素表示すれば,

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}^e + i \cdot \bar{\eta}^s \quad \dots\dots\dots (15)$$

仮想境界条件式(12)は次のようになる。

$$\begin{cases} \bar{\eta}_{,n}^e(j) \cdot \Delta S_j \\ -\bar{\eta}_{,n}^s(j) \cdot \Delta S_j \end{cases} = - \begin{bmatrix} P^{ee} & P^{es} \\ P^{se} & P^{ss} \end{bmatrix} \begin{cases} \bar{\eta}^e(j) \\ \bar{\eta}^s(j) \end{cases} + \begin{cases} c^e(j) \cdot \Delta S_j \\ c^s(j) \cdot \Delta S_j \end{cases} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ただし,

$$\Delta S_j = \frac{\sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2} + \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}}{2} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$S_4$  を除いた,  $S_1$  (固定境界),  $S_2$  (自由境界) および  $S_3$  (放射境界) で囲まれた領域における問題については, すでに著者らの第2報<sup>10)</sup>で触れたように, 汎関数

$$I = \frac{1}{2} \int_{\Omega_F} [(\bar{\eta}_{,x}^e)^2 + (\bar{\eta}_{,y}^e)^2 - (k\bar{\eta}^e)^2]$$

$$- [(\bar{\eta}_{,x}^s)^2 + (\bar{\eta}_{,y}^s)^2 - (k\bar{\eta}^s)^2] d\Omega + \int_{S_3} (k\bar{\eta}^e \bar{\eta}^s) dS \quad \dots\dots\dots (18)$$

を設定して, 変分原理により FEM を展開すればよい。ここではさらに  $S_4$  (仮想境界) における式(16)に対応す

る次の変分項を考慮する。

$$\delta I_4 = \{\delta \bar{\eta}^c(j), \delta \bar{\eta}^s(j)\}^T \times \left( \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{cc} & \mathbf{P}^{cs} \\ \mathbf{P}^{sc} & \mathbf{P}^{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{\eta}^c(j) \\ \bar{\eta}^s(j) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} c^c(j) \cdot \Delta S_j \\ c^s(j) \cdot \Delta S_j \end{Bmatrix} \right) \quad (19)$$

これより、式(18)と式(19)を組み合わせて、

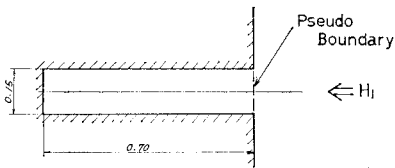
$$\delta(I_1 + I_4) = 0 \dots \dots \dots (20)$$

なる変分原理を適用すれば、Helmholtz方程式および  $S_1 \sim S_4$  での境界条件式が導かれる。式(20)は、汎関数の停留条件というよりもむしろ重みつき残差法に基づくものと考えてよい。

以上のような変分原理を基に FEM を展開すればよい。その過程は前報と同様であるからここでは省略する。

### 3. 解析例

#### (1) 長方形湾モデルによる解析精度の検討



depth = 0.20

unit. m

図-3 Harbor Model

本手法の妥当性および計算精度をチェックする意味で、open sea に直結した長方形湾の振動問題を解析した。図-3 にそのモデルを示す。水深は一定であるとし、仮想境界を湾口に設けた。この港湾の共振特性の計算結果を図-4 に示す。図中、横軸は入射波長  $L$  と湾長  $l$  の比であり、縦軸は波高増幅率  $M$  (湾奥波高と入射波高の比) である。また FEM の結果は、仮想境界分割数 (NE) が 20 と 8 の 2 ケースについてのものである。この問題には Ippen and Goda<sup>(6)</sup> の理論解がある。両者の結果を比較すると、共振周期はいずれもよく一致し、波高増幅率については仮想境界分割が細くなるにつれて Ippen and Goda の値に近くなることがわかる。図-5 は、仮想境界分割数による収束性を示す一例であるが、 $\times$  および  $\square$  点における波高  $H$  が  $H_{20}$  (NE=20 の時の波高) に収束する様子を表わしている。図-6 は、波高 1.0、周期 0.72 秒の入射波に対する湾口付近の波高分布を示す。図中、実線および破線は、それぞれ NE が 20 および 8 の場合に相当する。両者の間に若干差はあるが傾向は良く一致している。

この結果から見ると、仮想境界の分割数は相当細くしなければならぬようであるが、この影響要因は、いろいろあるので、今後検討を要する点である。

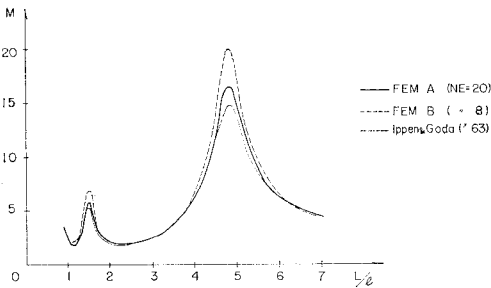


図-4 Frequency Response

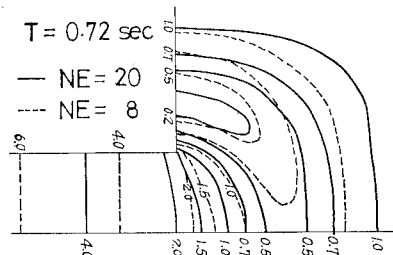


図-6 Wave Amplitude near the Harbor Mouth

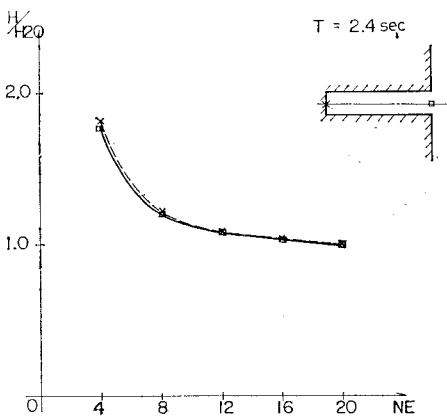


図-5 Convergency

#### (2) 河口から流出する波の解析

河川を伝播してきた波が、河口から open sea へ流出する問題を解析する。Momoi<sup>(7)</sup> はこれを buffer domain 法と名づけられた級数展開法により解析的に扱っている。図-7 に河口付近のモデルを示す。河川と open sea の境界を仮想境界とし、NE=8 とした。図-8 および

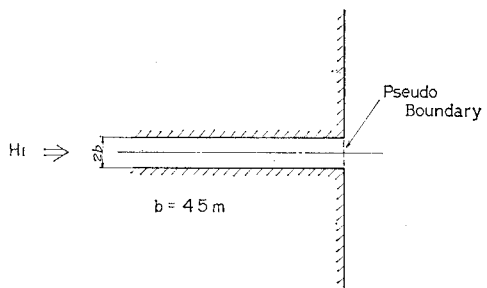


図-7 Estuary Model

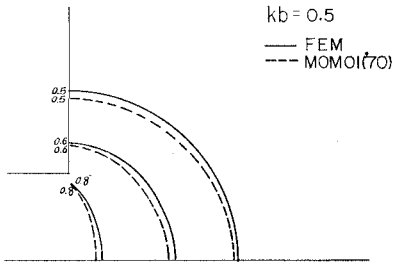


図-8 Wave Amplitude

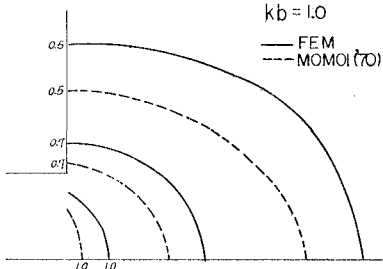


図-9 Wave Amplitude

9 は、それぞれ  $kb=0.5$  および  $1.0$  の場合の河口付近の波高分布について、FEM 解と Momoi の解を比較したものである。 $kb$  が小さい時両者は良く一致するが、大きくなると相違が見られる。これは仮想境界分割が相対的に粗くなるためであると思われ、両者を一致させるには、より細かい分割が必要である。

(3) 円形島を有する長方形湾の振動解析

open sea に直結した長方形湾に、円形島を設置した場合の振動特性の変化を解析する (図-10)。図中の  $P$  は湾奥の着目点である。湾内外の水深は一定で  $5m$ 、波は図の右下部の湾口から垂直に入射するとする。円形島がない場合の振動特性は Ippen and Goda の方法で求められる。これと円形島設置後の振動特性を FEM 解析した結果を比較したのが 図-11 である。両者は一次共振周期についてはほぼ一致するが、二次ではかなり差を生じている。これは、この時の波高分布 (図-12) から予想されるように、円形島の影響がかなりあるためと思わ

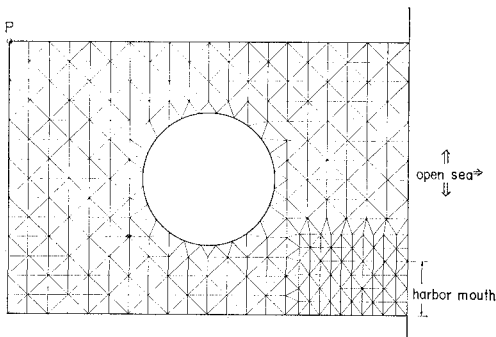


図-10 Mesh Division

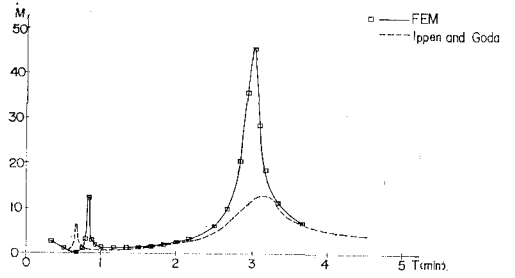


図-11 Frequency Response

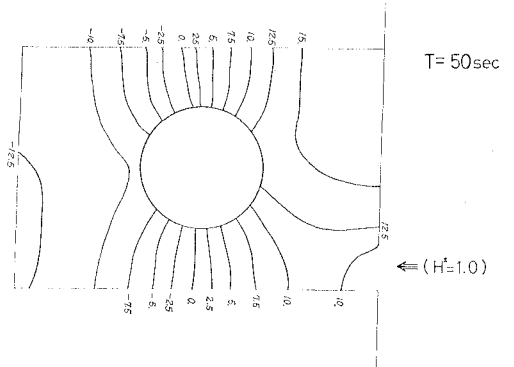


図-12 Wave Amplitude

れる。このように入射波周期が短くなるにつれて円形島の影響による散乱現象が著しくなるような問題においては FEM 解析の必要性が増大する。

4. あとがき

FEM により波の散乱問題を解析するにあたって必要となる、無限領域の波動解析手法として、積分方程式を利用する方法について述べた。二、三のモデルに対して数値計算を行い、他の解析解と比較検討した結果、妥当な解が得られることが示された。湾口仮想境界における分割に関しては適当に細かくする必要があり、この点は今後より詳細に検討するつもりである。また、解析例には完全な open sea 中の構造物周辺の波浪問題などを挙げていないが、これについても現在解析中である。

いずれにしても、本解析手法は波の回折、散乱問題に対して、従来の手法と比較していくつかの優れた面があり、実用性に富んだものであると思われる。

参考文献

- 1) Penny, W.G. and Price, A.T.: Diffraction of Sea Waves by Breakwater, Artificial Harbour, Dire. Misc. Weapon Develop. Tech. His. No. 66, 1944.
- 2) MacCamy, R.C. and Fuchs, R.A.: Wave Force on Piles: Diffraction Theory, Tech. Memo. No. 69, BEB, 1954.
- 3) 合田良実・吉村知司・伊藤正彦: 島堤による波の反射および回折に関する研究, 港湾技術研究所報告, 第10巻第2号, 1971.

- 4) Daubert, A. et Lebreton, J.C.: Diffraction de la Houle sur des Obstacles a Parois Verticales, La Houille Blanche, Vol. 20, No. 4, 1965.
- 5) Lee, J.J.: Wave Induced Oscillation in Harbors of Arbitrary Geometry, J. Fluid Mech., Vol. 45, Part 2, 1971.
- 6) 井島武士・周 宗仁・湯村やす: 任意形状の透過および不透過防波堤による波の散乱, 土木学会論文報告集, 第225号, 1974.
- 7) 日野幹雄・宮永洋一: グリーン関数および假想法による波力と波の回折計算, 土木学会論文報告集, 第237号, 1975.
- 8) 伊藤喜行・谷本勝行: 数値波動解析法とその応用—構造物周辺の波—, 第18回海岸工学講演会論文集, 1971.
- 9) 坂井藤一・河合三四郎: 波動解析への有限要素法の適用, 第20回海岸工学講演会論文集, 1973.
- 10) 坂井藤一・月岡康一: 波動解析への有限要素法の適用 (第2報)—湾水振動の解析—, 第21回海岸工学講演会論文集, 1974.
- 11) Bai, K.J.: A Variational Method in Potential Flows with a Free Surface, Rep. No. NA 72-2, University of California, Berkeley, Sept. 1972.
- 12) Berkhoff, J.C.W.: Computation of Combined Refraction-Diffraction, Proc. of the 13th Coastal Eng. Conf., Vol. 2, 1972.
- 13) Chen, H.S. and Mei, C.C.: Oscillations and Wave Forces in a Man-Made Harbor in the Open Sea, 10th Symposium in Naval Hydrodynamics, 1974, Office of Naval Research.
- 14) Bai, K.J. and Yeung, R.: Numerical Solutions of Free-Surface and Flow Problems, 10th Symposium in Naval Hydrodynamics, 1974, Office of Naval Research.
- 15) 瀬戸秀幸・山本善之: 有限要素法による定常波動問題の基礎的研究, 日本造船学会論文集, 第136号, 1974.
- 16) Ippen, A.T. and Goda, Y.: Wave Induced Oscillations in Harbors, The Solution for a Rectangular Harbor Connected to the Open Sea, Rep. No. 59, Hydrodynamics Lab., MIT, July. 1963.
- 17) Momoi, T.: A Long Wave in the Vicinity of Estuary [VII]—Case of Outflow—, Bull. Earthq. Res. Inst., Vol. 48, 1970.

付 録

入射波と反射波の和  $\eta_0$  および Green 関数  $g$  は, 解析領域  $\Omega_A$  の形状に応じて定めることができる。たとえば,

(A)  $\Omega_A$  が全平面の場合 (図-A・1)

$$\eta_0 = a_I \exp(-ik\rho_I) \dots\dots\dots (A \cdot 1)$$

$$g = H_0^{(2)}(k|P-Q|) \dots\dots\dots (A \cdot 2)$$

(B)  $\Omega_A$  が半平面 ( $0 \leq x, -\infty < y < \infty$ ) の場合 (図-A・2)

$$\eta_0 = a_I \exp(-ik\rho_I) + a_I \exp(ik\rho_R) \dots\dots (A \cdot 3)$$

$$g = H_0^{(2)}(k|P-Q|) + H_0^{(2)}(k|P_M-Q|) \dots (A \cdot 4)$$

ただし,  $P_M$  が  $P$  に重なる場合は, 第2項は除く。ここで,

$H_0^{(2)}$ : 0次第2種 Hankel 関数

$P$ : 解析点 ( $x_P, y_P$ )

$P_M$ :  $P$  の  $y$  軸に関する鏡像

$Q$ : 仮想境界上の点

$$\rho_I = x_P \cos \alpha + y_P \sin \alpha$$

$$\rho_R = x_P \cos \alpha - y_P \sin \alpha$$

$a_I$ : 入射波振幅絶対値

$\alpha$ : 入射角 ( $x$  軸から反時計回りを正とする)

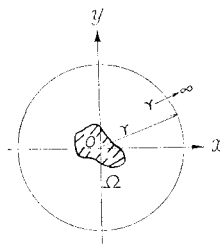


図-A・1 Analysed Region (A)

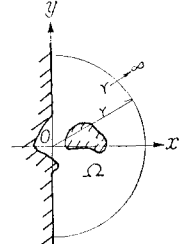


図-A・2 Analysed Region (B)