

# 有限要素法による長波の変形の解析

松田 健志\*・岩崎 敏夫\*\*

## 1. まえがき

長波の変形の取扱いで最も問題になるのは汀線近傍において非線型効果や波頂曲率効果、また浅水作用が作用しあった場合である。その場合にクノイド波のような保存された波形については首藤<sup>1)</sup>のような取扱いがなされるが、ソリトン分裂のような波形の変化までを考える場合には数値解析を行わねばならない。本論文では最近急速に着目されてきた有限要素法をこの問題に適用することを試みたものである。

有限要素法の波動解析への適用については若干の報告がなされているが<sup>2),3)</sup>、まだ例が少なく、わが国では坂井らが微小振幅長波方程式を用いて円形水域での擾乱の伝播や、任意形状、水深の港湾の定常振動を解いた例が報告されているに過ぎない<sup>4),5)</sup>。前者は最小2乗変分原理、後者はエネルギー型変分原理によったものである。しかし Oden は、Navier-Stokes 方程式の解を展開するにあたって、ガレルキン法を導入することにより変分原理では取扱い難い複雑な方程式を解析できることを示し<sup>6)</sup>、Taylor, Hood らは非線型項を巧みに線型近似させた解析解を報告している<sup>7)</sup>。そこで本論文においてはこの手法に着目し、非線型効果、波頂曲率、浅水効果が作用している長波の非定常現象という複雑な問題の解析を行った。

## 2. 全体マトリックス方程式と計算方法

取扱う方程式は次の3組である。

微小振幅長波方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

有限振幅長波方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \eta}{\partial x} + (1 + \bar{\eta}) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

Boussinesq 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial t}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \eta}{\partial x} + (1 + \bar{\eta}) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし  $u = u^*/\sqrt{gh_0}$ ,  $\eta = \eta^*/h_0$ ,  $t = t^*\sqrt{g/h_0}$ ,  $x = x^*/h_0$  で、 $u$  は流速、 $\eta$  は波の偏差、 $t$  は時間、 $x$  は水平方向座標、 $*$  は次元量。 $h_0$  は鉛直方向の代表スケールであり、非線型項にかかる  $\bar{u}, \bar{\eta}$  は節点値として扱うために  $\sim$  を付してある。

要素内で水深一定と見なし有限要素近似式として、

$$u^e(x, t) = \sum_{i=1}^n N^i(x) u^i(t),$$

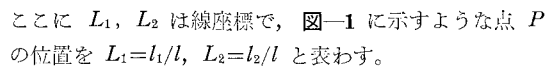
$$\eta^e(x, t) = \sum_{i=1}^n N^i(x) \eta^i(t) \quad \dots\dots\dots (4)$$

のように  $u, \eta$  を表わす。このとき  $u^i(t), \eta^i(t)$  は節点値、 $n$  は要素内節点数、 $N^i$  は形状関数で  $u$  と  $\eta$  とに対し同形である。3 節点要素では、

$$N^i = [L_1^i - L_1 L_2 \quad L_2^i - L_1 L_2 \quad 4L_1 L_2] \dots\dots\dots (5)$$

また 2 節点要素では

$$N^i = [L_1 \quad L_2] \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに  $L_1, L_2$  は線座標で、 図-1 に示すような点  $P$  の位置を  $L_1 = l_1/l, L_2 = l_2/l$  と表わす。

時間差分近似式は次のようにとる。

$$\frac{\partial u^i(t)}{\partial t} = (u_{i+\Delta t}^i - u_i^i) / \Delta t,$$

$$\frac{\partial \eta^i(t)}{\partial t} = (\eta_{i+\Delta t}^i - \eta_i^i) / \Delta t \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$u^i(t) = (u_{i+\Delta t}^i - u_i^i) / 2, \quad \eta^i(t) = (\eta_{i+\Delta t}^i - \eta_i^i) / 2 \quad (8)$$

式 (4), (7), (8) を用いて式 (1) ~ (3) の定式化を考えるのであるが、ガレルキン法を用いて

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ (\bar{\eta}^i, \bar{u}^i) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \eta^i \\ u^i \end{Bmatrix}_{t+\Delta t}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ (\bar{\eta}^i, \bar{u}^i) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \eta^i \\ u^i \end{Bmatrix}_t \equiv \{ \mathbf{F} \} \quad \dots\dots\dots (9)$$

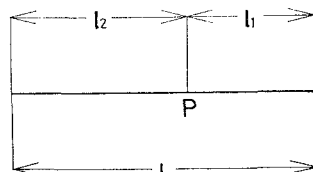


図-1

\* 正会員 工修 三菱重工業(株)  
 \*\* 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

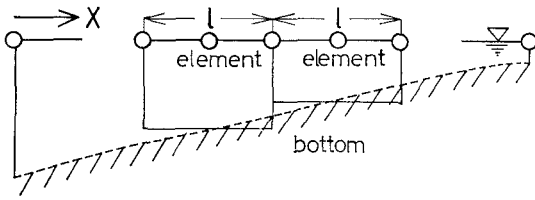


図-2

をうる。 $K$  は要素単位に作る要素マトリックスを全要素について統合した全体マトリックスで式 (2), (3) よりは  $\bar{\eta}^i, \bar{u}^i$  を含む。 $\eta^i, u^i$  は未知数で、添字  $(t+\Delta t)$ 、 $(t)$  は時間ステップ、 $F$  は定数列ベクトルである。図-2 に要素分割を説明した。

計算は次の時間ステップの流速、偏差値につき総数  $n$  個の節点の値を未知数とする連続方程式を解くのであるが、非線型項をもつ場合には式 (9) 第 2 項中の  $\bar{\eta}^i, \bar{u}^i$  は前の時間ステップにて得られた値でよく、第 1 項中のは前の反覆ステップでの  $\eta^i, u^i$  の解を用いる。そして、式 (9) を解いて得た解が前ステップの解と大差なくなるまで反復計算させる。その条件として、

$$|(\bar{u}_{i+\Delta t}^i, \bar{\eta}_{i+\Delta t}^i) - (u_{i+\Delta t}^i, \eta_{i+\Delta t}^i)| \leq 0.01 |(u_{i+\Delta t}^i, \eta_{i+\Delta t}^i)| \dots \dots \dots (10)$$

とした。

無次元化しているので  $\Delta x = \Delta t = 1$  である。また要素長  $l$  に対し  $\Delta x = l/2$  とした。

記憶容量、計算時間に対する配慮から、計算領域は波長に見合う長さにとり、波速と同じ速さで移動させるようにした。

3. 正弦波と孤立波の計算結果

図-3 は微小振幅長波方程式によって一様水深の水路中を最大振幅比  $\eta_0/h_0=0.1$ 、波長比  $L/h_0=20$  の正弦波が進行する場合を求めた結果で、分割の大きさ  $l=L/20$  の場合である。得られた波形は何等変形せず理論と一致している。その他を含め 6 個のケースにつき同様に計算し、坂井・河合の方法<sup>5)</sup>を用い、解析誤差の指標  $\epsilon$  を求めた結果を表-1 に示す。これによると要素形状よりも  $\Delta t$  の大きさによって精度が変わることがわかる。

図-4 は微小振幅長波方程式で用いたと同じ諸元の正弦波を有限振幅長波方程式により計算した結果である。

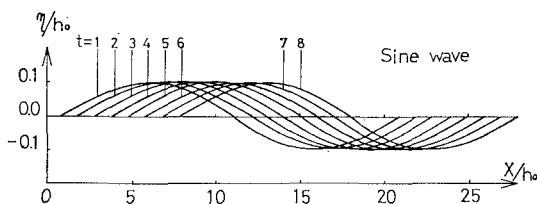


図-3

表-1

Element	l	$\Delta X$	$\Delta t$	$\epsilon$
	$l=L/20$	$\Delta X=L/20$	$\Delta t=T/20$	0.120
	$L/40$	$L/40$	$T/40$	0.073
	$L/10$	$L/20$	$T/10$	0.101
			$T/20$	0.113
	$L/20$	$L/40$	$T/20$	0.143
			$T/40$	0.074

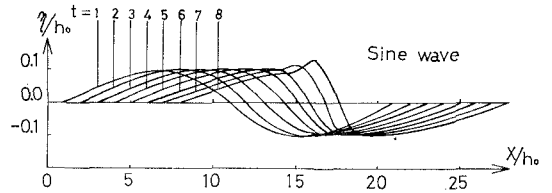


図-4

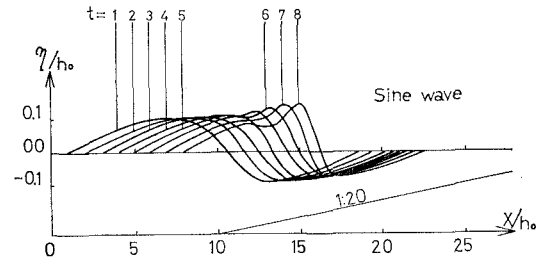


図-5

振幅分散の効果があらわれて波形が前傾することが示されている。

図-5 は底勾配 1/20 の水路において、上と同じ諸元の正弦波が進入する場合の計算結果で、やはり有限振幅の長波方程式を用いている。図では  $x/h_0=10$  のところに存在する底勾配の変化点より、斜面上へ波が半波長進入した時刻を  $t=0$  としてある。現われた波形の変化は一様水深の場合よりも顕著であり、傾斜面を進むにつれて波の山は高く、また波の谷は浅くなることわかる。さらに水深が浅くなる時の状況については、しかし次のような理由で計算ができなかった。

有限振幅長波方程式の計算は時間ステップを進めるにつれて安定性が失われ、特に水深変化の場合には  $t=8$  以後、急速に不安定となった。明らかに最高波の波高水深比に比すと著しく小さいことから、砕波が生じたとは考えにくい。この点は将来の課題である。

図-6 は初期波形に孤立波を用いた Boussinesq 方程式による計算結果である。与えた初期波形の最大振幅は  $\eta_0/h_0=0.10$  である。図中太線は初期波形、細線が進行波形であるが、波形変化はほとんどなく、得られた解が定常解であることを裏づけている。

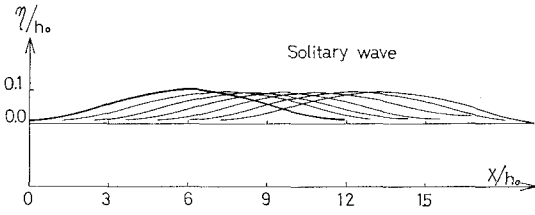


図-6

6. 孤立波状の実験波の計算結果

孤立波状の分散性非保存波の変形は河口付近の長波の問題と関連してはなほ興味のある問題である。そこで本論文において開発された計算プログラムを利用し、Boussinesq 方程式および有限振幅長波方程式によって計算を行い、実験値と比較することにした。

実験波形は、水路内に垂直に立てた造波板を水平方向にピストン式に移動させることによって孤立波状の波を発生させ、進行とともに変化する波形を抵抗線式波高計によって測定したものである。水路は幅 0.8m, 高さ 0.5m, 長さは 20m の二次元水路である。図-7 にその略図を示す。

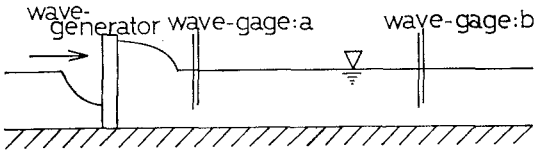


図-7

表-2

	$\eta/h_0$ max	周期	フーセル数	$h_0$
I	0.53	1.63 sec	4.5	15 cm
II	0.43	2.78	1.9	27

計算は a 点の測定波形を初期波形として与えて、追跡した。表-2 に初期波形の諸元を示した。

分割の大きさは波形 I については  $\Delta t=0.28$ , 波形 II については  $\Delta t=0.31$  とした。計算結果を図-8, 9 に示す。それぞれの図の右側が Boussinesq 方程式によるもの、左側が有限振幅長波方程式によるものである。また a 点の測定波形を上部に、b 点の測定波形を下部に示した。

波形 I は a 点で分裂の徴候が現われており、波形 II は a 点ですでに分裂が始まっている。b 点では 2 つの波形はいずれも同程度の分裂傾向でソリトンが現われている。しかし実測値に比して、有限振幅長波方程式の解では、山谷のひだが浅く、Boussinesq 方程式の解では山谷のひだが深すぎる。摩擦の効果などを今後は考慮せねばならないのであろう。

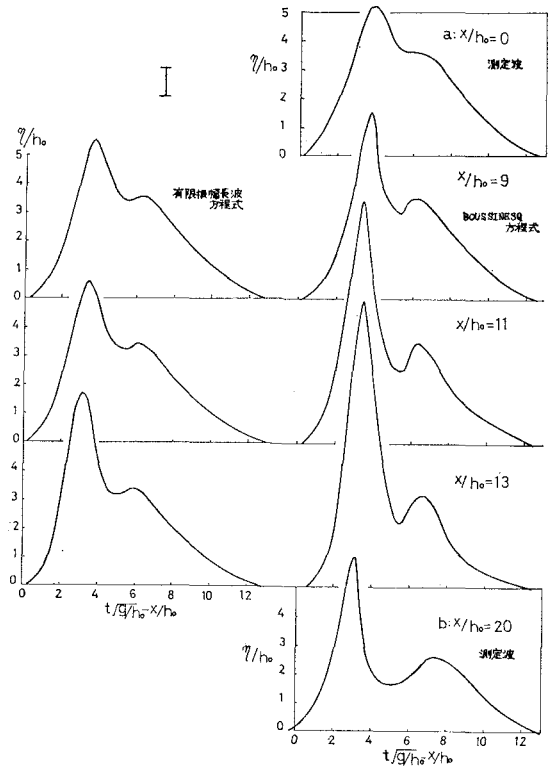


図-8

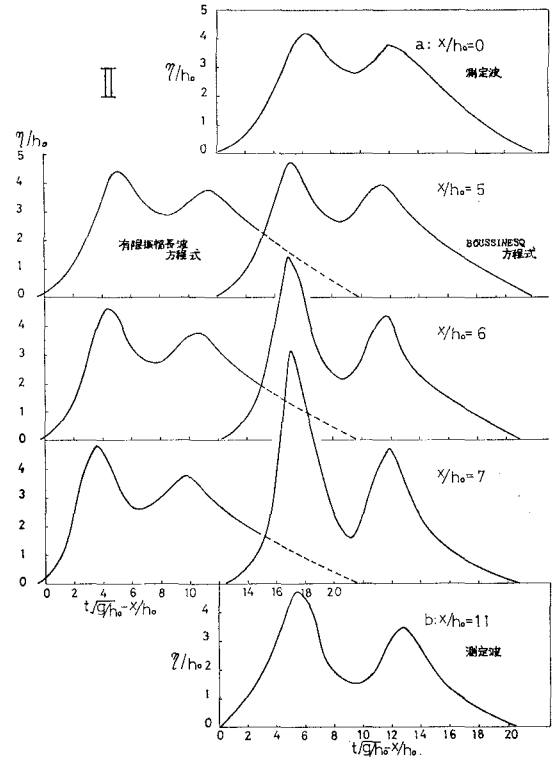


図-9

しかしながら、Boussinesq 方程式による計算の安定性についていえば波形 I, II ともに  $b$  点に相当する計算波形を得るに至らなかった。波形 I では最高波高比は  $\eta/h_0=1.0$  となった時点で、また波形 II では同じく  $\eta/h_0=1.05$  となった時点で不安定となった。この値は最高波の値よりも高いから、計算上は満足できるものである。実験波では波形 I が  $b$  点通過後、波形 II は  $b$  点を通過してかなり後に砕波している。これらの事実より、実際の波の変形を表現するには、やはり何等かの工夫が必要であるといえよう。計算技術上からいえば、波高の大きさと誤差との関係や、分割の大きさの影響、誤差伝播の評価などを検討すべきなのであろう。

## 5. あとがき

有限要素法として本論文で扱った方法によれば、線型方程式、非線型方程式ならびに Boussinesq 方程式をすべて、同一の手法によって定式化することができる。この方程式より派生する K-dV 方程式においては従属変数を1個(流速,あるいは偏差値)としてよい。さらにこの方法の便利なのは水深変化の取扱いが容易なことである。計算精度の面では、要素形状より時間間隔  $\Delta t$  の大きさが精度決定上支配的である。

しかし計算時間はかなり長くなるし、また本文中にの

べた不安定問題もある。さらに摩擦の効果をいかに取入れるかということも、この計算法を実用化する上で考慮すべき問題と考えられる。

最後にこの計算は東北大学 NEAC 2200 モデル 700 を用いて行った。また実験値は東北大学文部技官 佐藤栄司, 東北大学大学院学生 小杉達郎, その他の諸君を煩らわした。ここに記して厚く謝意を表する。

## 参 考 文 献

- 1) 首藤伸夫: 非線形長波の変形—水路幅, 水深の変化する場合—第21回海岸工学講演会論文集, 1974.
- 2) Oden, J. T., Zienkiewicz, O. C., Gallagher, R. H., Taylor, C.: Finite Element Methods in Flow Problems, UAH Press, 1974.
- 3) Oden, J.T.: Lectures on Finite Element Methods in Continuum Mechanics, UAH Press, 1973.
- 4) 坂井藤一・河合三四郎: 波動解析への有限要素法の適用, 第20回海岸工学講演会論文集, 1973.
- 5) 坂井藤一・月岡康一: 波動解析への有限要素法の適用(第2報), 第21回海岸工学講演会論文集, 1974.
- 6) Oden, J.T.: Finite Element Analogue of Navier Stokes Equation, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE Vol. 96, No. EM4, Aug. 1970.
- 7) Taylor, C., Hood, P.: A Numerical Solution of the Navier Stokes Equation Using the Finite Element Technique, Computers & Fluids, Vol. 1, 1973.