

# 流れの中における Stokes 波の Shoaling について

黄 煌 輝\*・郭 金 棟\*\*

## 1. 序 論

外海に面した原子力・火力発電所の取放水路中、または河口に侵入して来た波および流れのある海域で波が伝播する場合、流れとの干渉によって波の位相速度に変化が起こり、波長、波高も変わる。これに関して Unna, Yu は深海の場合について波高の変化を議論し、Longuet-Higgins, Stewart, Whitham らは一様流の中における波と流れの共存系の mass flux, energy flux と momentum flux について一般的な理論展開を示している。また、浜田・加藤は流れの流速分布が一様でない場合について有限振幅波の理論計算を行った。岩崎・佐藤はさらに波のエネルギー逸散を考えて波高の減衰を考察した。また Jonsson・Wang は水深・水路幅が一定である一様流の中における Stokes 2 次近似波の水位・波高と波長を求めている。これらの研究はいずれも流速が一定でかつ水深一定である場合についての考察であり、水深あるいは水路幅が変わる場合の波についての議論はまだないようである。

取放水路や河口の場合、流量はほぼ一定であり、水路幅および水深は断面によって変わりうる。したがって流速と波速が一定であるという仮定を設けるよりも、むしろ流量が一定であるとし、単位幅流量と水深によって流速を表示した方が便利である。ここではさらに波動は Stokes 波 3 次近似解を用いて波高の Shoaling の計算を試みる。

## 2. 理論的考察

流速分布が一様である定常流の中で波が伝わる場合、ある固定断面  $S$  を通過して輸送される平均のエネルギー伝達率  $R$  は Longuet-Higgins・Stewart によると、次式によって表わされる。

$$R = \int_S \left( p + \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g z \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad \dots\dots(1)$$

ここで、 $p$  は圧力、 $\mathbf{n}$  は  $S$  断面法線方向ベクトル、 $\rho$  は流体の密度、 $g$  は重力加速度、 $\mathbf{u}$  は波動水粒子速度のベ

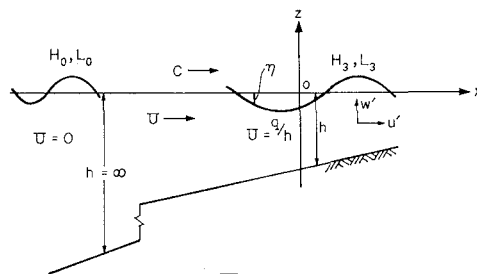


図-1

クトル  $\mathbf{u}'(u', w')$  と流れの流速  $U$  の和である。座標系を図-1 のようにとり、流れと同じ方向を  $x$  とすると、水深が  $h$  である水路において単位時間単位幅当りに通過する平均のエネルギー伝達率は次式のように表わされる。

$$R_x = \int_{-h}^{\eta} \left( p + \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g z \right) u dz = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \quad \dots\dots(2)$$

ここで、 $h$  は水深、 $\eta$  は静水面からの水面変動、流速はそれぞれ:

$$\left. \begin{aligned} U &= U(x, 0, 0) \\ u &= U + u' \\ u &= U + u' \end{aligned} \right\} \dots(3)$$

であり、また  $R_1, R_2, R_3, R_4$  は Longuet-Higgins によるとそれぞれ次式で与えられる。

$$R_1 = \int_{-h}^{\eta} \left( p + \frac{1}{2} \rho u'^2 + \rho g z \right) u' dz = EC_G \quad \dots\dots(4)$$

$$R_2 = \int_{-h}^{\eta} \left( p + \frac{1}{2} \rho u'^2 + \rho g z + \rho u'^2 \right) dz U = EU + S_x U \quad \dots\dots(5)$$

$$R_3 = \int_{-h}^{\eta} \frac{3}{2} \rho u' dz U^2 = \frac{3}{2} \frac{EU^2}{C} \quad \dots\dots(6)$$

$$R_4 = \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} \rho dz U^3 = \frac{1}{2} \rho h U^3 \quad \dots\dots(7)$$

すなわち  $R_1$  は流れがない場合の波のエネルギー伝達率であり  $EC_G$  に等しい。ただし、 $E$  は単位面積当りの波

\* 工修 台湾, 成功大学水利系 研究生  
\*\* 正会員 工博 台湾, 中興大学土木系 教授

のエネルギーであり,  $C_G$  はエネルギーの伝達速度である。また,  $R_2$  は波動による動エネルギーと位置エネルギーが流れによって輸送される仕事,  $EU$ , と流れの radiation stress,  $S_X$ , に対する抵抗による仕事  $S_X U$  によって表わされる。ただし,  $E, S_X$  は次式で表示される。

$$E = \int_{-h}^{\eta} \left( p + \frac{1}{2} \rho u'^2 + \rho g z \right) dz \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$S_X = \int_{-h}^{\eta} \left( p + \rho u'^2 \right) dz - \frac{1}{2} \rho g h^2 = E \left( \frac{2C_G}{C} - \frac{1}{2} \right) \dots\dots\dots (9)$$

よって energy flux は次のように表現される。

$$R_X = EC_G + E \left( \frac{2C_G}{C} + \frac{1}{2} \right) U + \frac{3}{2} \frac{EU^2}{C} + \frac{1}{2} \rho h U^3 \dots\dots\dots (10)$$

Skjelbreia の Stokes 波理論の第3次近似によると velocity potential  $\phi_3$  水面波形  $\eta_3$  および波速  $C_3$  はおのおの式 (11), (12) と式 (13) で表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{a} \phi_3(x, z, t) = & F_1 \cosh k(z+h) \sin \theta \\ & + \frac{1}{2} F_2 \cdot \cosh 2k(z+h) \cdot \sin 2\theta \\ & + \frac{1}{3} F_3 \cdot \cosh 3k(z+h) \cdot \sin 3\theta \end{aligned} \dots\dots\dots (11)$$

$$\begin{aligned} \eta_3 = & a \cos \theta + \left( \frac{ak}{2} \right) \cdot f_2 \cdot \cos 2\theta \\ & + \left( \frac{ak}{2} \right)^2 \cdot f_3 \cdot \cos 3\theta \end{aligned} \dots\dots\dots (12)$$

$$C_3^2 = C_1^2 A_2 \dots\dots\dots (13)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \theta &= kx - \sigma t \\ F_1 &= \frac{ak}{\sinh kh} \\ F_2 &= \frac{3}{4} (ak)^2 \frac{1}{(\sinh kh)^4} \\ F_3 &= \frac{3}{64} (ak)^3 \frac{(11 - 2 \cosh 2kh)}{(\sinh kh)^7} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= \frac{\cosh kh (\cosh 2kh + 2)}{2 (\sinh kh)^3} \\ f_3 &= \frac{3}{16} \frac{8 (\cosh kh)^6 + 1}{(\sinh kh)^6} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

$$C_1^2 = \frac{g}{k} \tanh kh \dots\dots\dots (16)$$

$$A_2 = 1 + \left( \frac{2\pi a}{L_3} \right)^2 \frac{\cosh kh + 8}{8 (\sinh kh)^4} \dots\dots\dots (17)$$

ただし,  $k$  は波数,  $\sigma$  は角周波数,  $a$  は振幅,  $C_1$  は1次近似の波速,  $L_3$  は3次近似の波長である。

単位面積当りの波の平均エネルギーは

$$\begin{aligned} E_3 = & \bar{E}_p + \bar{E}_k = \frac{\rho g}{2LT} \int_t^{t+T} \int_0^L \eta_3^2 dx dt \\ & + \frac{\rho}{2LT} \int_t^{t+T} \int_0^L \int_0^{z+h} \left[ \left( \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & \times dx dz dt \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

で表わされ, 式 (11) と式 (12) を用いて代入すると式 (19) となる。

$$\begin{aligned} E_3 = & \frac{1}{4} \rho g a^2 \left( 1 + \frac{a^2 k^2}{4} f_2^2 \right) + \frac{1}{4} \rho g a^2 \\ & \times \left\{ 1 + a^2 k^2 \left[ 1 + \frac{f_2}{2 \sinh 2kh} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\cosh 4kh + 8}{8 (\sinh kh)^4} \right] \right\} = \frac{1}{4} \rho g a^2 A_1 \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} A_1 = & 2 + a^2 k^2 \left[ 1 + \frac{f_2^2}{4} + \frac{f_2}{2 \sinh 2kh} \right. \\ & \left. + \frac{\cosh 4kh + 8}{8 (\sinh kh)^4} \right] \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

$\bar{E}_p, \bar{E}_k$  はそれぞれ単位面積当りの平均の potential energy と kinematic energy である。

波の群速度は

$$C_{G3} = \frac{d\sigma}{dk} = \frac{d(kC_3)}{dk} = \frac{C_1}{2} A_3 \dots\dots\dots (21)$$

ただし,

$$\begin{aligned} A_3 = & 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} + \frac{(2\pi a/L_3)^2}{8 (\sinh kh)^4} \\ & \times \left\{ (8 \cosh^4 kh - 8 \cosh^2 kh + 9) \right. \\ & \left. - \frac{2kh}{\sinh 2kh} (8 \cosh^4 kh + 28 \cosh^2 kh - 9) \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots (22)$$

である。そこで, 式 (19), 式 (21) と式 (13) を式 (10) に代入しかつ流れの速度  $U$  は単位幅当りの流量  $q$  と水深  $h$  より,  $U = q/h$  として表示すると,  $x$  に垂直な断面において単位幅当りに輸送されるエネルギーは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} R_X = & \frac{1}{4} \rho g a^2 A_1 A_3 \frac{C_1}{2} \\ & + \frac{1}{4} \rho g a^2 A_1 \left( \frac{1}{2} + A_2^{-1/2} \cdot A_3 \right) \frac{q}{h} \\ & + \frac{3}{8} \rho g a^2 A_1 C_1^{-1} \cdot A_2^{-1/2} \left( \frac{q}{h} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho h \left( \frac{q}{h} \right)^3 \end{aligned} \dots\dots\dots (23)$$

深海においては水深は無量大となり流速は  $U \rightarrow 0$  に漸近する。したがって深海における単位幅当りのエネルギー伝達率  $R_0$  は波のみとなり, Le Méhauté・Webb が Stokes 波理論に基づいて求めた次式を用いて表わすことができる。

$$R_0 = \frac{\rho T^5}{32\pi} \left(\frac{L_0}{T^2}\right)^4 \lambda_0^3 \left[4 \left(1 + \frac{3}{4} \lambda_0^3\right)\right] \dots\dots\dots (24)$$

ただし、 $\lambda_0$  は次式によって求める。

$$\frac{\pi H_0}{L_0} = \lambda_0 + \frac{3}{8} \lambda_0^3 \dots\dots\dots (25)$$

$$\frac{L_0}{T^2} = \frac{g}{2\pi} (1 + \lambda_0^3) \dots\dots\dots (26)$$

ここで、 $T$  は波の周期、 $L_0$  は深海波の波長、 $H_0$  は深海での波高である。

深海より水深  $h$  の浅海域まで伝わってきた波と流れのエネルギー損失が微小で無視できる場合、エネルギー保存則より

$$R_0 = R_x \dots\dots\dots (27)$$

となる。よって式 (23) と式 (24) を式 (27) に代入し、さらに  $\rho g^2 T H_0^3$  でわり無次元化すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{32\pi} (1 + \lambda_0^3)^2 \left(\frac{3}{8} \lambda_0^3 + 1\right)^{-2} \left(1 + \frac{3}{4} \lambda_0^3\right) \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{a}{H_0}\right)^2 \left(\frac{\tanh kh}{2\pi}\right) A_1 A_2^{1/2} A_3 \\ &+ \frac{1}{4} \left(\frac{a}{H_0}\right)^2 \left(\frac{h}{gT^2}\right)^{-1} \left(\frac{q}{g^2 T^3}\right) A_1 \\ &\times \left(\frac{1}{2} + A_2^{1/2} A_3\right) + \frac{3}{4} \left(\frac{a}{H_0}\right)^2 \left(\frac{h}{gT^2}\right)^{-2} \\ &\times \left(\frac{q}{g^2 T^3}\right)^2 \left(\frac{\tanh kh}{\pi}\right)^{-1} A_1 A_2^{-1} \\ &+ 2\pi^2 \left(\frac{H_0}{L_0}\right)^{-2} \left(\frac{h}{gT^2}\right)^{-2} \left(\frac{q}{g^2 T^3}\right)^3 \dots\dots (28) \end{aligned}$$

式 (28) の左辺は  $\lambda_0$  の変数であり、式 (25) と式 (26) によって深海波の steepness,  $H_0/L_0$  によって表現できる。右辺の式の中での  $a/H_0$  は浅海波の振幅と深海波の波高比であり、Stokes 波理論より波高  $H_3$  と振幅  $a$  の関係が次式によって計算できる。

$$\frac{\pi H_3}{L_3} = \frac{2\pi a}{L_3} + \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi a}{L_3}\right)^3 f_3 \left(\frac{h}{L_3}\right) \dots\dots\dots (29)$$

$q/g^2 T^3$  は流れの流量を表わす無次元量であり、 $H_0/L_0$ ,  $h/gT^2$  および  $q/g^2 T^3$  が与えられれば、式 (28) より水深と波高の関係が求められる。

**3. 理論計算による波高の変化**

深海の波浪条件  $H_0/L_0$  を与えれば式 (24) と式 (25) より  $\lambda_0$  が求められ式 (28) 左辺の深海におけるエネルギー輸送率が計算できる。さらに無次元流量  $q/g^2 T^3$  と相対水深  $h/L_3$  を与えれば  $a/H_0$  が解け  $a$  と  $H_3$  の関係式より波の shoaling coefficient  $H_3/H_0$  が求められる。しかし式 (28) 右辺の  $A_2, A_3$  は  $a/L_3$  の陰関数であるがために数値計算はかなりむづかしくなる。そこでまず式 (28) 右辺の  $a/H_0$  を次のように書き変える。

$$\frac{a}{H_0} = \left(\frac{a}{L_3}\right) \left(\frac{L_3}{L_0}\right) \left(\frac{L_0}{H_0}\right) \dots\dots\dots (30)$$

さらに式 (28) を次式のように書き改める。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{32\pi} \cdot \frac{1}{4\pi^2} (1 + \lambda_0^3) \lambda_0^3 \left[4 \left(1 + \frac{3}{4} \lambda_0^3\right)\right] \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{a}{L_3}\right)^2 \left(\frac{L_3}{L_0}\right)^2 \left(\frac{\tanh kh}{2\pi}\right) A_1 A_2^{1/2} A_3 \\ &+ \frac{1}{4} \left(\frac{a}{L_3}\right)^2 \left(\frac{L_3}{L_0}\right)^2 \left(\frac{q}{g^2 T^3}\right) \\ &\times \left(\frac{h}{gT^2}\right)^{-1} A_1 \left(\frac{1}{2} + A_2^{1/2} A_3\right) \\ &+ \frac{3}{4} \left(\frac{a}{L_3}\right)^2 \left(\frac{L_3}{L_0}\right)^2 \left(\frac{q}{g^2 T^3}\right)^2 \left(\frac{h}{gT^2}\right)^{-2} \\ &\times \left(\frac{\tanh kh}{\pi}\right)^{-1} A_1 A_2^{-1} \\ &+ 2\pi^2 \left(\frac{q}{g^2 T^3}\right)^3 \left(\frac{h}{gT^2}\right)^{-2} \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

Stokes 波の第 3 次近似解では水深  $h$  での波長  $L_3$  と深海波の波長  $L_0$  との比は次式で表示できる。

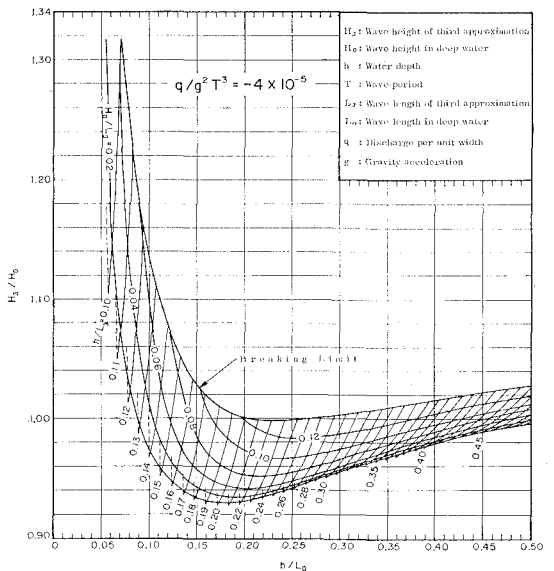
$$\frac{L_3}{L_0} = \left[1 + \left(\frac{2\pi a}{L_3}\right)^2 \frac{\cosh 4kh + 8}{8(\sinh kh)^4}\right] \tanh kh \quad (32)$$

また

$$\frac{h}{gT^2} = \frac{h}{2\pi L_0} (1 + \lambda_0^3) = \frac{1}{2\pi} \frac{h}{L_3} \frac{L_3}{L_0} (1 + \lambda_0^3) \dots\dots\dots (33)$$

によって与えられる。

ここではまず  $H_3/L_3$  と  $h/L_3$  の値を与えて式 (29) と式 (32) より  $a/L_3, L_3/L_0$  を求め、さらに  $A_1, A_2$  と  $A_3$  を求めておき、かつ  $q/g^2 T^3$  の値を与えておく



図—2

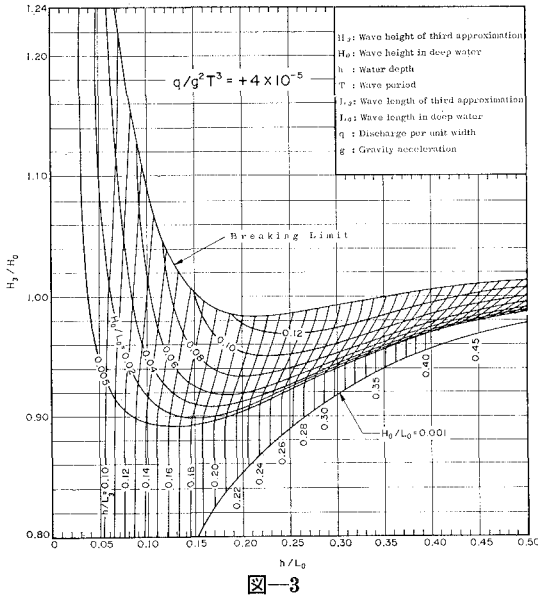


図-3

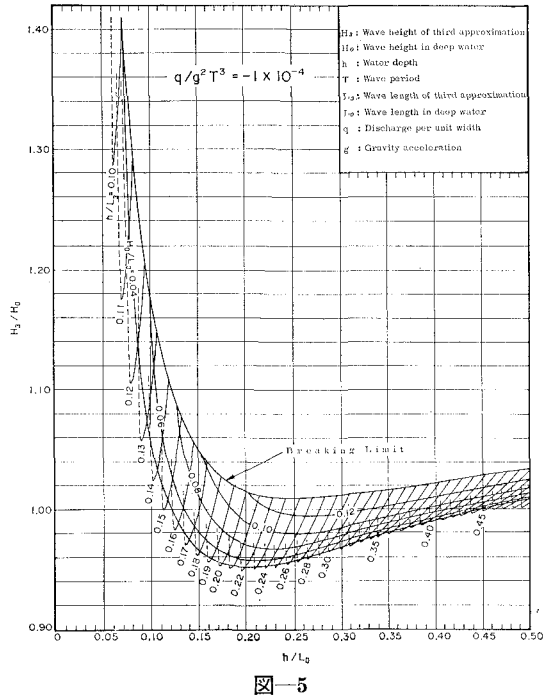


図-5

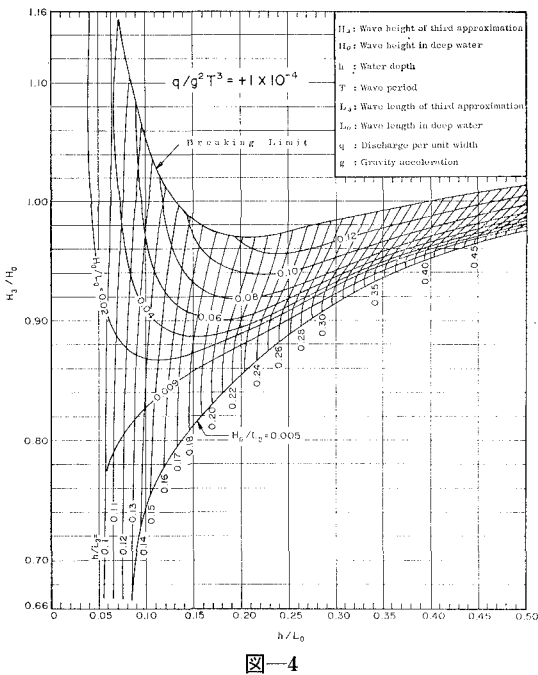


図-4

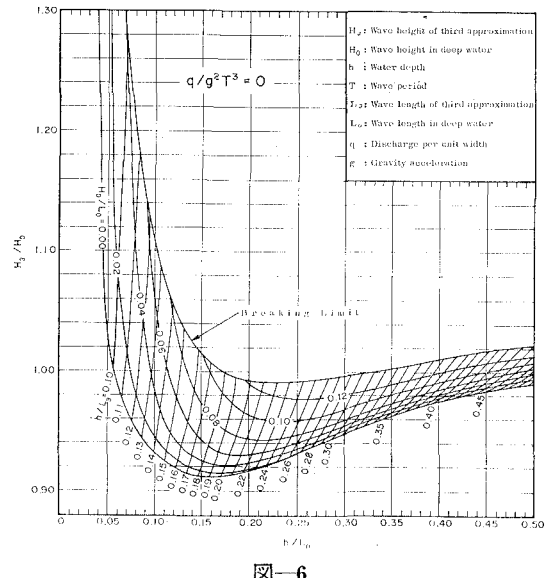


図-6

(28) より  $\lambda_0$  の値が求められ、式 (25) より  $H_0/L_0$  が計算できる。さらに

$$\frac{H_3}{H_0} = \left(\frac{H_3}{L_3}\right) \left(\frac{H_0}{L_0}\right)^{-1} \left(\frac{L_3}{L_0}\right) \dots\dots\dots (34)$$

より  $H_0/L_0$  の波が水深  $h/L_0$  における  $H_3/H_0$ 、すなわち波高の shoaling coefficient が求められる。

流れのある場合の波の碎波条件は深海の場合 Yu によると  $U/C=4$  と示しているが浅海の場合まだ不明である。ここでは近似的に Miche の理論

$$\frac{H_b}{L_b} = 0.142 \tanh kh \dots\dots\dots (35)$$

がそのまま適用しうるとして計算する。

以上のように異なる  $q/g^2 T^3$ ,  $H_3/L_3$  と  $h/L_3$  の値を与え、波高の変化を電子計算機によって計算を行い、式 (35) をみたとところで計算を打ち切る。図-2~図-6 は理論計算による波高変化の曲線を示したいくつかの例である。図-2 は  $q/g^2 T^3=0$ 、すなわち  $q=U=0$  の流れの存在しない場合の Stokes 波の3次近似解による波

高の shoaling を示す。図-3 は  $q/g^2 T^3 = 4 \times 10^{-5}$ 、図-4 は  $q/g^2 T^3 = 10^{-4}$  の場合の波高変化を示す。これらの図を比較してみると、波向と流れが同じ場合波高は低減する。特に  $h/L_0$  が小さく水深が浅いところの波高の減衰が著しく、また流れが強いほど波高は小さくなる。図-5 と図-6 は波が流れを遡上する場合についての計算例であり、図-5 は  $q/g^2 T^3 = -4 \times 10^{-5}$ 、図-6 は  $q/g^2 T^3 = -10^{-4}$  について波高の shoaling を示したものである。この場合波は流れに押され流れのない場合よりも波高が大きくなる。

4. 実験結果との比較

実験は成功大学水工実験所の波浪循環水槽を用いて行った。この水槽は長さ 40 m、幅 200 cm、高さ 170 cm で、12'' の鋼管循環ポンプによって流れを起こすことができる。海底勾配は 1/30 のコンクリートモルタルによって舗装した。実験にあたっては波の周期は 1.2~2.0 sec、一様水深部での波高は 5~20 cm、 $H_0/L_0 = 0.02 \sim 0.09$  の範囲のものを用いた。流量は  $q/g^2 T^3 = 4 \times 10^{-5} \sim$

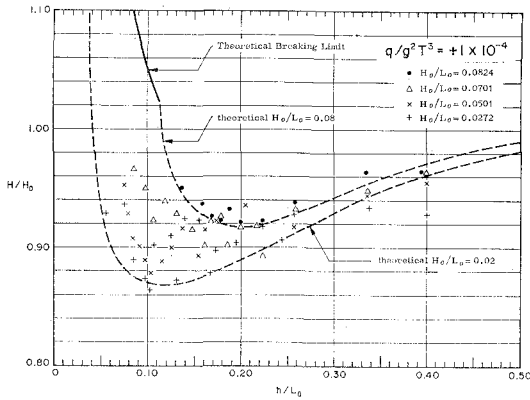


図-7

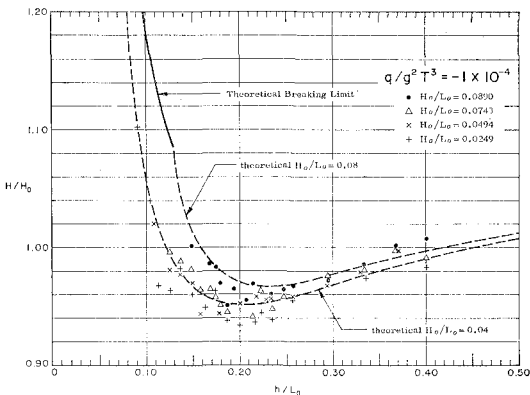


図-8

$10^{-4}$  二種について波と同じ方向と逆方向について実験を行った。波高は抵抗線式波高計を用いて測定した。図-7 は流れと波が同じ方向の場合の波高変化を理論値と比較した一例であり、測定値はかなり理論値と良い一致を示している。図-8 は流れと波が逆方向に向っている場合の実験結果と理論値の比較であり、 $H_0/L_0$  の小さい範囲では実測値は理論値よりやや小さくなっているが  $H_0/L_0$  の大きい場合においては良い一致を示す。

5. 結 語

以上、著者らは、流れのある Stokes 波の 3 次近似解の shoaling についてエネルギー保存則より理論計算を行い実験値と比較しその妥当性を検討したところ、次のような結論を得た。

- (1) Stokes 波 3 次近似解の shoaling について、流れのない場合の計算曲線を Le Méhauté・Webb の理論曲線と比較したところ、 $H_0/L_0 = 0$  の場合、二者は一致するが、 $H_0/L_0$  が大きい場合著者らの理論値は Le Méhauté らの理論値よりも若干大きい。Le Méhauté らの論文を詳細に検討したところ式 (22) の  $C_\alpha$  の計算に誤算があった。二者の相違は恐らくこれによるものであろう。
- (2) 流れが波と同じ方向の場合、波高は減衰し、逆方向の場合に増大する。しかしいずれも波高は水深の減少とともに一時は減少しさらに水浅が小さくなると波高は大きくなる。
- (3) Stokes 波理論の波高変化の理論曲線は、かなり実験値とよく一致する。

参 考 文 献

- 1) 浜田徳一・加藤 始：流れの中の有限振幅波の計算，第 10 回海岸工学講演会講演集，1963.
- 2) 岩崎敏夫・佐藤道郎：流れを遡る波のエネルギーの減衰について，第 17 回海岸工学講演会論文集，1970.
- 3) Jonsson, I.G. & J.D. Wang: Interaction between wave and currents, Proc. of 11th Conf. Coastal Eng., 1970.
- 4) Le Méhauté, B. & L., Webb: Periodic gravity wave over a gentle slope at a third of approximation, Proc. 9th Conf. on Coastal Eng., 1964.
- 5) Koh, C.Y. & B. Le Méhauté: Wave shoaling, Jour. Geoph. Res., Vol. 71, No. 8, 1966.
- 6) Longuet-Higgins, M.S. & R.W. Stewart: Changes in form of short gravity waves on long waves and tidal currents, Jour. Fluid Mech., Vol. 8, 1960.
- 7) Longuet-Higgins, M.S. & R.W. Stewart: The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents, Jour. Fluid Mech., Vol. 10, 1961.