

海底摩擦による非線形長波の減衰

首 藤 伸 夫*

1. はじめに

浅海での波の変形に影響のある諸因子としては、地形(水深, 湾幅), 波の非線形性, 波形, 海底摩擦などがある。前三者に対しては, すでに取扱ったので¹⁾, ここでは海底摩擦をも入れて議論することとする。

微小振幅表面波の海底摩擦による減衰に関しては, 数多くの研究がなされている。その取扱いの基本は, 波エネルギー伝播率の場所的な差は, 海底摩擦によるエネルギー消費によって生ずるとすることにある。

孤立波についても類似の取扱いを行ったものがある。

以上の扱いは, 境界層内は層流であるとするもの, または乱流であるとするものいずれもあるが, 現実には乱流となっている場合が多いと考えられる。このとき, 摩擦力はある代表流速によって, $\tau = fu|u|$ のように表現されるが, 摩擦係数 f は定常流中での値より大きいのが普通である。主流の流速, 方向が変化するため, 乱れは発生, 発達, 消滅を繰り返すので, 定常状態を維持する場合より大きなエネルギーを必要とするからである。梶浦の理論により現象を良く説明できる。

ここでは, まず, 長波であるとの仮定にたち, 有限振幅性, 分散性までの非線形効果, 水深および水路幅変化の効果, さらに海底摩擦による減衰効果のすべてを含んだ, 波形についての基本式を導く。海底摩擦は二乗則にしたがうものとする。用いられる代表流速は, 第一近似の水平流速で, 長波近似のために, これは鉛直方向には変化をせず一定である。

ついで, いくつかの解析例を示す。

特にクノイド波の波高減衰について簡単な計算式を, 一定水深, 一定水路幅の条件下で求め, 実験値と比較する。梶浦の理論と組み合わせると, 実験結果を良く説明できることがわかった。

2. 基本方程式

取りあげる式は

$$u_x + v_y + w_z = 0$$

$$\left. \begin{aligned} u_t + uu_x + vv_y + ww_z &= -\frac{1}{\rho} p_x + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z} \\ v_t + uv_x + vv_y + ww_z &= -\frac{1}{\rho} p_y \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z &= -\frac{1}{\rho} p_z - g \end{aligned} \right\} (1)$$

である。ここに x は波の進行方向, y はそれと直角な方向, z は鉛直方向にとってある。海底摩擦は x 方向のみに大きく作用すると考えている。

境界条件は, 水表面 $z = h_0 + \eta$ で

$$p = 0, \quad \eta_t + u\eta_x + v\eta_y = w, \quad \tau = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

海底面 $z = h(x)$ 上で

$$uh_x = w, \quad \tau = \tau_0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

水路側壁 $y = \pm b(x)$ で

$$ub_x = \pm v \quad \dots\dots\dots (4)$$

とする。波の進行方向と水路の中心線とは一致し, y 方向には水深は変化しないとしている。

これらを, Johnson¹⁾ の使った無次元表示を用い, 角谷²⁾ の移動座標系 (ξ, X) からみた摂動を行う。この方法は文献 3) (以後, 前報と呼ぶ) にあるものと全く同じであるので省略する。第一近似の解は, 前報のものと全く同じで

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{V_0} \eta_0, \quad p_0 = \eta_0, \quad w_0 = \frac{1}{d} \eta_{0\xi} [1 - d - z], \quad v_0 = 0 \\ &\dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

のように, 波形 η_0 を使って諸量が表現される。展開にあたっては, 流速などは $u = u_0 + \epsilon u_1 + \dots$ としたのに比べ, 摩擦力は $\tau = \epsilon^{1/2} \tau_0 + \epsilon^{3/2} \tau_1 + \dots$ としておき, 摩擦力の効果は第二近似から表われるように配慮してある。第二近似の解を求め, y 方向に積分して側壁条件を入れ, 鉛直方向に積分して水底および水面の条件を入れると, 第一近似の波形 η_0 に対する式をうる事ができる。簡単のために添字 0 をおとすと, 無次元表示では,

$$\begin{aligned} \alpha \eta_x + \frac{3}{2} d^{-3/2} \eta \eta_{\xi} + \frac{\kappa}{6} d^{1/2} \eta_{\xi\xi\xi} + \gamma \frac{b'}{2b} \eta + \sigma \frac{d'}{4d} \eta \\ + \frac{C}{2\sqrt{\kappa}} d^{-2} \eta |\eta| = 0 \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

となる。第 1 項は距離 X を通過して生ずる波形の変化であり, 第 2 項以下の効果によって生ずるのである。第

* 正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科

2項は有限振幅の効果, 第3項は分散性の効果, 第4項は水路幅変化の効果, 第5項は水深の効果で, 前報の結果と全く同じである。第6項が海底摩擦の効果である。海底摩擦は次元を有する形で $\tau = \rho C_1 u_0 |u_0|$ と表わされており, 式(6)の C は, $C_1 = \varepsilon^{1/2} C$ (ただし, ε は振幅水深比 a/h_0) となっている。 $\alpha, \kappa, \gamma, \sigma, C/\sqrt{\kappa}$ などは, それぞれの項の重要性を表わすパラメーターで, ε を基準としたものであることは, 前報と同様である。

式(6)を次元をもった形にかくと,

$$\eta_x + \frac{3}{2} g^{-1/2} d^{-3/2} \eta \eta_\xi + \frac{1}{6} g^{-3/2} d^{1/2} \eta \xi \xi \xi + \frac{1}{2} \frac{b_x}{b} \eta + \frac{1}{4} \frac{d_x}{d} \eta + \frac{1}{2} C_1 d^{-2} \eta |\eta| = 0 \dots\dots\dots (7)$$

で, 添字は偏微分を表わす。ここで, x : 水平距離, $\xi = \int (gd)^{-1/2} dx - t$, d : 静水時水深, b : 水路幅, g : 重力の加速度, t : 時間, である。

3. いくつかの解

(1) 線形長波の波高変化

式(7)で第2, 3項を省略すると

$$\frac{\eta_x}{\eta} + \frac{1}{2} \frac{b_x}{b} + \frac{1}{4} \frac{d_x}{d} + \frac{C_1}{2} \frac{|\eta|}{d^2} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

となる。これを解くと

$$\eta b^{1/2} d^{1/4} = \eta_0 b_0^{1/2} d_0^{1/4} \exp \left[- \int_{x_0}^x \frac{C_1}{2} \frac{|\eta|}{d^2} dx \right] \dots\dots\dots (9)$$

がえられる。

水深, 水路幅が変化せず, 摩擦の影響が小さく, 波形が振幅 a の正弦波のとき, 非線形力を等価線形力で置換えたとき, 小さな距離 x に対しては,

$$\eta = \eta_0 \exp \left[- \frac{4a_0}{3\pi} \frac{x}{d^2} \right] \dots\dots\dots (10)$$

とできる。

(2) 浅水波の摩擦のみによる減衰

式(7)は

$$\eta_x + \frac{3}{2} g^{-1/2} d^{-3/2} \eta \eta_\xi + \frac{C_1}{2} d^{-2} \eta |\eta| = 0 \dots\dots\dots (11)$$

を解くことになる。

$\eta > 0$ に対しては,

$$\eta_x + A \eta \eta_\xi + B \eta^2 = 0 \dots\dots\dots (12)$$

の形となるから, $x = x_0$ で $\eta = f(\xi) = f(-t)$ のように与えられた条件を満たす解は,

$$\eta = \frac{f \left[\xi + \frac{A}{B} \ln \{1 - B \eta (x - x_0)\} \right]}{1 + B(x - x_0) f \left[\xi + \frac{A}{B} \ln \{1 - B \eta (x - x_0)\} \right]} \dots\dots\dots (13)$$

となる。 $\eta < 0$ に対しては, 上式の B を $-B$ で置きかえればよい。ただし, $A = 3/2 \cdot g^{-1/2} d^{-3/2}$, $B = C_1 d^{-2}/2$

である。

4. クノイド波の波高変化

(1) 波高変化の基本式

式(7)を

$$\eta_x + \alpha_1 \eta \eta_\xi + \alpha_2 \eta \xi \xi \xi + \alpha_3 \eta |\eta| + \alpha_4 \eta = 0 \dots\dots\dots (14)$$

の形にかく。基本波形はクノイド波で, $\eta_0 = H \text{cn}^2 \beta + \delta$ として与えられ, 第二近似 η_1 が x に関する永年項をもたないという条件下に, H の変化を計算する。計算過程は前報と同じである。ここで,

$$\beta = A[\xi - Bx], \quad A = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{3}{4} \frac{gH}{d^2}} \dots\dots\dots (15)$$

である。また, アーセル数を $gHT^2/d^2 = U^2$ で定義しておくとし, H の変化は次式で与えられる。

$$\frac{1}{H} \frac{dH}{dx} - \frac{1}{2U} \frac{dU}{dx} + \alpha_4 + \frac{\delta}{H} \frac{I_2}{I_1} \left[\frac{1}{H} \frac{dH}{dx} - \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} + \alpha_4 \right] + \alpha_3 H \frac{I_0}{I_1} = 0 \dots\dots\dots (16)$$

ここで,

$$\alpha_4 = \frac{1}{2} \frac{b_x}{b} + \frac{1}{4} \frac{d_x}{d},$$

$$\alpha_3 = \frac{C_1}{2} d^{-2},$$

$$\delta = - \frac{H}{k^2} \left[\frac{E}{K} - k'^2 \right],$$

$$I_0 = \int_{-K}^K \left(\text{cn}^2 \beta + \frac{\delta}{H} \right)^2 \left| \text{cn}^2 \beta + \frac{\delta}{H} \right| d\beta,$$

$$I_1 = \int_{-K}^K \text{cn}^4 \beta d\beta$$

$$I_2 = \int_{-K}^K \text{cn}^2 \beta d\beta$$

である。

(2) 大きなアーセル数に対する $\delta I_2/HI_1, I_0/I_1$ の値

前報の結果により, $U^2 > 50$ に対しては

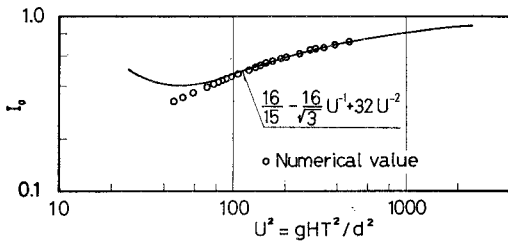
$$\frac{\delta I_2}{HI_1} = - \frac{2\sqrt{3}}{U} \dots\dots\dots (17)$$

として良い。最大3.5%程度の誤差を許容するならば, $U^2 > 40$ に対して上式を用いて十分である。

I_0/I_1 についても, $U^2 > 40$ 範囲で式(16)の積分に便利な形に求めることを考える。 I_0 は

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{-K}^K \left(\text{cn}^2 \beta + \frac{\delta}{H} \right)^2 \left| \text{cn}^2 \beta + \frac{\delta}{H} \right| d\beta \\ &= 2 \int_0^K \left(\text{cn}^2 \beta + \frac{\delta}{H} \right)^2 \left| \text{cn}^2 \beta + \frac{\delta}{H} \right| d\beta \\ &= 2 \int_0^{\beta_1} \left(\text{cn}^2 \beta + \frac{\delta}{H} \right)^3 d\beta - 2 \int_{\beta_1}^K \left(\text{cn}^2 \beta + \frac{\delta}{H} \right)^3 d\beta \\ &= 4 \int_0^{\beta_1} \left(\text{cn}^2 \beta + \frac{\delta}{H} \right)^3 d\beta - 2 \int_0^K \left(\text{cn}^2 \beta + \frac{\delta}{H} \right)^3 d\beta \end{aligned} \dots\dots\dots (18)$$

として計算する。ただし, β_1 は $\text{cn}^2 \beta_1 + (\delta/H) = 0$ を満たす値である。これを積分したのち, U の大きな所, つ



図—1 アーセル数の関数として表示した I_0

まり K の大きな所での展開を用いると

$$I_0 = \frac{16}{15} - \frac{16}{\sqrt{3}} U^{-1} + 32U^{-2} \dots\dots\dots (19)$$

表—1 I_0/I_1 の値

U^2	I_0/I_1
40~200	$0.05254U^{4/5}$
200~1000	$0.1516U^{2/5}$
1000~2500	$0.3025U^{1/5}$
2500以上	$\frac{4}{5}(1 - \frac{5\sqrt{3}}{U})$

と表現することができる。 I_0 を数値計算した値と式(19)の比較を図—1に示す。 $U^2 < 100$ では両者に差が目立つこと、および式(19)の

U^{-2} の項は積分に便利でないことを考えて、 $U^2 > 40$ に対する I_0/I_1 の値を表—1に示すように表現する。

(3) $d_x = b_x = 0$ のときのクノイド波の波高減衰

実験は摩擦の効果を特に取り上げることとしたので、式(16)の特別な場合の解を以下に求める。 $d = \text{const.}$ であるから、

$$U^2 = \frac{gT^2}{d^2} H, \text{ つまり } H = DU^2, \frac{H_x}{H} = 2 \frac{U_x}{U} \dots\dots\dots (20)$$

ただし、 $D = d^2/gT^2 = \text{const.}$ である。 $40 < U^2 < 2500$ の間では、

$$\frac{1}{U} \frac{dU}{dx} - \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{1}{U^2} \frac{dU}{dx} + \frac{2}{3} \alpha_3 D F U^{2+m} = 0 \dots\dots\dots (21)$$

の形の式となる。 F, m は定数で表—1に与えられている。式(21)の積分は容易である。たとえば、 $40 < U^2 < 200$ に対しては、

$$\left(\frac{U_0}{U}\right)^{14/5} \left[1 - \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{14}{19} \frac{1}{U}\right] - \left[1 - \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{14}{19} \frac{1}{U_0}\right] = \frac{28}{15} \alpha_3 D F U_0^{14/5} x \dots\dots\dots (22)$$

である。ただし、 U_0 は $x=0$ のときの U の値である。右辺第1項大括弧中の U を簡単のために U_0 で置きかえる。こうしても、 $H > 0.8H_0$ である限り、最大で 3% の誤差しか生じない。 H_0 は摩擦のきく区間の始端における波高で、 H は距離 x を走った後の波高である。したがって、 $H > 0.8H_0$ を保つように区間距離 x をきめるならば、 H を与える式は簡単なものとなる。

$U^2 > 2500$ のとき、式(16)は

$$\frac{1}{U} \left(1 - \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{1}{U}\right) \frac{dU}{dx} = -\frac{2}{3} \alpha_3 D U^2 \left(\frac{4}{5} - \frac{4\sqrt{3}}{U}\right) \dots\dots\dots (23)$$

となるが、この積分も容易に行うことができ、上にのべたと同様の配慮をすれば、 H を H_0 の関数として簡単に表現できる。

この結果を表—2に示す。マンニングの n を用いるなら、 C_1 を $gn^2 d^{-1/3}$ で置きかえればよい。

孤立波の場合、 $gHT^2/d^2 \rightarrow \infty$ として、

$$H = \frac{H_0}{1 + \frac{8}{15} \frac{C_1 H_0 x}{d^2}} \dots\dots\dots (24)$$

として良い。

5. 実験との比較

実験は、中央大学理工学部水理実験室の長さ 50m, 幅 1m, 高さ 1m の水槽によって行われた。実験中の水深は、10cm, 20cm, 30cm であった。実験波の周期は 2sec のみであり、波高は、最小で約 2cm, 最大で 12cm であり、この中間は約 2cm ごとに変化させた。

水路底 10m にわたって、棧粗度をつけ、1m ごとに波高を測定した。

棧粗度は、高さ 0.8cm, 幅 0.8cm の正方形断面を有するものを、8cm ピッチでおいた。

水路末端には、金網でつくった 1/25 の勾配の斜面があり、内部に消波材を入れてある。しかし、反射波を完全に消すことはできず、最大で 10%、普通には 6~7% の反射波を生じた。

測定された波高の場所的な分布には、当然反射波がふくまれている。波高減衰の測定は 10m の区間について 1m ごとに行ったので、始端での値を入れて 11 個ある。これらの平均的な曲線をひき、表—2の式を使って C_1 を求めた。

このように実験的に求めた C_1 を、定常流に対する実験式、正弦振動に対する理論式と比較することとする。

定常流に対する摩擦係数 C_s を、

$$u_*^2 = C_s \bar{u}^2 \dots\dots\dots (25)$$

と平均流速を使って定義し、棧粗度の大きさから、足立⁴⁾

表—2 摩擦による波高減衰

U^2	減 衰 法 則
40~200	$\left(\frac{H_0}{H}\right)^{1/5} - 1 = 4.90 \times 10^{-2} \frac{C_1 x}{gT^2} \left(\frac{gH_0 T^2}{d^2}\right)^{1/5} / \left[1 - \frac{1.70}{\sqrt{gH_0 T^2/d^2}}\right]$
200~1000	$\left(\frac{H_0}{H}\right)^{6/5} - 1 = 1.21 \times 10^{-1} \frac{C_1 x}{gT^2} \left(\frac{gH_0 T^2}{d^2}\right)^{6/5} / \left[1 - \frac{1.63}{\sqrt{gH_0 T^2/d^2}}\right]$
1000~2500	$\left(\frac{H_0}{H}\right)^{11/10} - 1 = 2.22 \times 10^{-1} \frac{C_1 x}{gT^2} \left(\frac{gH_0 T^2}{d^2}\right)^{11/10} / \left[1 - \frac{1.59}{\sqrt{gH_0 T^2/d^2}}\right]$
2500以上	$\frac{H_0}{H} - 1 = \frac{8}{15} \frac{C_1 H_0 x}{d^2} / \left[1 + \frac{4.23}{\sqrt{gH_0 T^2/d^2}}\right]$

にならって求めると、

- 水深 10 cm のとき $C_s=0.0227$
- 水深 20 cm のとき $C_s=0.0137$
- 水深 30 cm のとき $C_s=0.0108$

となった。

正弦振動に対しては梶浦の理論^{5),6)}がある。摩擦係数の計算式が与えられているが、その値を直接実験値と比較するわけには行かない。正弦波に対する平均のエネルギー消費と、クノイド波のそれとを等しいとおき、それぞれ定義のことなる摩擦係数間の関連をつけることとする。

境界層厚がうすい時は、梶浦⁵⁾によって、平均のエネルギー消費 $\langle E \rangle$ は、

$$\langle E \rangle = \frac{\rho}{2} \hat{C}_{K2} \cos \theta \hat{U}^3 \dots\dots\dots(26)$$

と与えられた。ここで、 \hat{U} は境界層外縁での水平流速の振幅、 θ は U に対する τ の位相の進みである。

また、境界層が水表面まで達している時は⁶⁾、

$$\langle E \rangle = \frac{\rho}{2} \frac{8}{3\pi} \hat{C}_{K1} \cos \theta \hat{U} \hat{u}^2 \dots\dots\dots(27)$$

である。 \hat{u} は平均流速の振幅、 \hat{U} は圧力勾配に対応する流速の振幅である。

本論文のクノイド波に対しては

$$\langle E \rangle = \frac{\rho}{2} 16 I C_1 \hat{u}^3 \dots\dots\dots(28)$$

となり、ここで、 $I=I_0/2K$ 、 \hat{u} は水平流速の振幅で鉛直方向には一様である。

$\langle E \rangle$ の三つの表現を等置して

$$\hat{C}_{K2} \cos \theta = \frac{8}{3\pi} \hat{C}_{K1} \cos \theta \left(\frac{\hat{u}}{\hat{U}} \right)^2 = 16 I C_1 \frac{\hat{u}^3}{\hat{U}^3} \dots\dots(29)$$

表-3 摩擦係数の換算に必要な I の値

U^2	I
40~200	0.08089 $U^{-1/5}$
200~1000	0.2334 $U^{-3/5}$
1000~2500	0.4657 $U^{-4/5}$
2500以上	$\frac{32}{15\sqrt{3}} \left(1 - \frac{5\sqrt{3}}{U}\right) \frac{1}{U}$

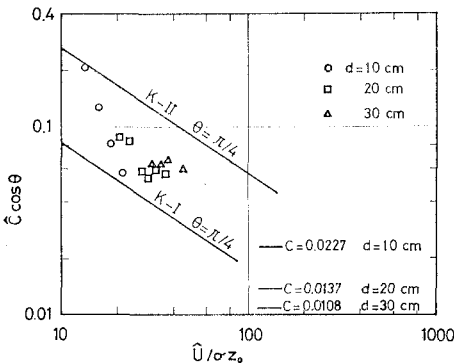


図-2 摩擦係数実験値の理論との比較

という関係をうる。 I は近似的に表-3のように表現される。

図-2に、実験値と理論値の比較を示す。実験の範囲では $\hat{u}/\hat{U} \approx 1$ 、 $\hat{u}/\hat{U} \approx 1$ として良かった。定常流に対する値よりははるかに大きな値をえた。梶浦の理論値の中間に存在する。したがって、境界層厚はうすくはないが、水表面に達するほど厚くもないと考えて良からう。

この実験では、水深に比べ、粗度がかなり大きい。以上から判断すると、現地における風波に対しては境界層厚のうすい場合に対する梶浦の理論から摩擦係数 C_{K2} を求め、式(29)によって C_1 に換算し、表-2の結果と組合わせて波高を計算すれば良い。

6. 結 論

有限振幅の影響、波頂曲率の影響、水深や水路幅の効果、海底摩擦の効果を含んだ、非線形長波の基本式(7)をえた。

いくつかの解析解を求めたのち、クノイド波の波高変化を与える式(16)を導びいた。

水深一定、水路幅一定のときには、海底摩擦による波高減衰は、表-2の式によって与えられる。ただし、区間距離が長くなって H/H_0 が 0.8 より小さくなると、これらの式の精度はおちる。このときは、 x を短くとりなおし、最初の区間の終端での H を次の区間の H_0 として計算すれば良い。

実験と比べた結果、現実の海岸の浅海での風波に対しては、境界層厚のうすい場合についての梶浦の理論からえられる摩擦係数と組合わせて用いれば十分であることが判明した。

謝 辞: 本研究に対し、文部省より科学研究費(研究代表者東北大学 岩崎敏夫教授)、また実吉奨学会より研究助成金をうけた。ここに記して謝意を表する。

実験に際しては、当時中央大学学生であった中央大学大学院生 森龍三、前田建設 八坂光洋両君の助力をえたことを付記する。

引用文献

- 1) Johnson, R.S.: On the development of a solitary wave moving over an uneven bottom, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 73, pp. 183~203, 1973.
- 2) Kakutani, T.: Effect of an uneven bottom on gravity waves, J. Phy. Soc. Japan, Vol. 30, No. 1, pp. 272~276, 1971.
- 3) 首藤伸夫: 非線形長波の変形, 第21回海講, pp. 57~63, 土木学会, 1974.
- 4) 足立昭平: 人工粗度の実験的研究, 土木学会論文集 No. 104, pp. 33~44, 1964.
- 5) Kajiura, K.: A model of the bottom boundary layer in water waves, Bul. Earthquake Res. Inst., Vol. 46, pp. 75~123, 1968.
- 6) Kajiura, K.: On the friction in an oscillatory current, Bul. Earthquake Res. Inst., Vol. 42, pp. 147~174, 1964.