

# 有限振幅波理論に基づく波の Shoaling について

山口 正 隆\*・土 屋 義 人\*\*

## 1. 緒 言

一様水深における有限振幅波理論を用いて計算された波のエネルギーフラックスおよび周期は水深が変化しても一定であるという条件から、水深変化に伴う波高および波長などの波の平均的特性を算出するいわゆる波の shoaling に関する研究は、すでに Le Méhauté ら<sup>1)</sup> や 岩垣および酒井<sup>2)</sup> によって行われ、それぞれすぐれた成果を得ている。この場合、彼らを用いた有限振幅波理論は Skjelbreia ら<sup>3)</sup> による Stokes 波の第3次および第5次近似解と Laitone<sup>4)</sup> によるクノイド波の第2次近似解を初等関数表示したハイパボリック波の第2次近似解である。

さて、波の shoaling に関する計算が一様水深における非粘性非回転流体としての有限振幅進行波理論に基づくかぎり、水深変化に伴う波形の変化や反射および底面摩擦などの影響を考慮できないことはいうまでもないが、波の shoaling の計算に関してさらに2つの問題があるように思われる。第1の問題は、すでに著者ら<sup>5)</sup> が種々検討したように、有限振幅波理論には波速の定義に関して2種類のものがあるので、それぞれの理論の shoaling の計算結果におよぼす相違とそれぞれの理論はいかなる場合により適合性があるかということである。第2の問題は近似解である有限振幅波理論を用いてエネルギーフラックスを計算する場合に、展開パラメーターのべき数をどこまで考慮するかということである。つまり、第  $n$  次近似解のエネルギーフラックスを計算するのか、あるいは厳密解としての無限級数解の第  $n$  次近似解を用いる場合に、第  $(n+1)$  次近似解の影響がエネルギーフラックスの計算結果に入らないように考慮するののかの問題である。たとえば、Le Méhauté らの Stokes 波による計算は後者の立場に立ち、岩垣らのハイパボリック波による計算は前者の立場に立脚している。

そこで、著者らは本論文において、第2の問題に対しては後者の立場に立ち、著者ら<sup>5)</sup> がすでに展開した Stokes の波速の第2定義による Stokes 波の第4次近似解

およびクノイド波の第2次近似解を用いて波の shoaling の計算を実施し、第1定義による計算結果との比較から第1の問題について若干考察しようとするものである。

## 2. 有限振幅波理論による波のエネルギーフラックス

Whitham<sup>6)</sup> によれば、単位時間に任意の断面を通過して輸送される波のエネルギーフラックス  $\bar{W}$  は次式で表わされる。

$$\bar{W} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-h}^{\eta} \left\{ \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) + p + \rho g z \right\} u dz dt \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $T$ : 周期、 $h$ : 水深、 $\eta$ : 静水面からの水位変動、 $u$ : 水平水粒子速度、 $w$ : 鉛直水粒子速度、 $p$ : 圧力強度、 $\rho$ : 流体の密度、 $g$ : 重力の加速度、 $t$ : 時間、 $x$  および  $z$ : 図-1に示すように、静水面上に取られた水平および鉛直座標、である。また、式(1)は Bernoulli の定理より次式に変換される。

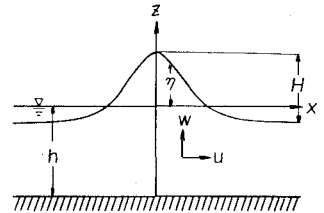


図-1 座 標 系

$$\bar{W} = -\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-h}^{\eta} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} u dz dt \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $\varphi$  は速度ポテンシャルである。さて、著者ら<sup>5)</sup> が Stokes の波速に対する第2定義を用い、Skjelbreia らの手法にならって計算した Stokes 波の第4次近似解を式(2)に代入し、第5次近似解以上の寄与がないように微小パラメーターのべき乗を考慮して計算したエネルギーフラックス  $\bar{W}_{S2}$  は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{W}_{S2} = & \frac{\rho c^3 \lambda^2}{8k} \left[ A_{11}^2 (2kh + \sinh 2kh) + 8\lambda^2 \right. \\ & \left. kh \left( A_{02}^2 + \frac{1}{2} A_{11} A_{13} + A_{32}^2 \right) \right. \\ & \left. + \frac{A_{11}^2 B_{22}}{8} + A_{02} A_{11} \cosh kh + \frac{A_{11} A_{22}}{2} \right] \end{aligned}$$

\* 正会員 工博 京都大学助教授 防災研究所  
 \*\* 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所

$$\begin{aligned} & \cosh kh + \frac{A_{11}A_{13}}{4} \sinh 2kh \\ & + \frac{3}{16}A_{11}^2 \sinh 2kh + \frac{A_{11}^2B_{22}}{8} \cosh 2kh \\ & + \frac{A_{11}A_{22}}{2} \cosh 3kh + \frac{A_{22}^2}{4} \sinh 4kh \Big] \\ & + O(\lambda^6) \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ここに、 $c$ : 波速、 $\lambda$ : 波形勾配に相当する微小量、 $kh = 2\pi/L$ 、 $L$ : 波長、 $A_{ij}$  および  $B_{ij}$ :  $kh$  のみの関数、である。式 (3) において  $A_{02} = 0$  とおけば、第1定義による通常の Stokes 波のエネルギーフラックス  $\bar{W}_{S1}$  となり、第3次あるいは第4次近似解を用いた Le Méhauté<sup>1)</sup>の結果と一致する。

次に、第2定義による Chappellear のクノイド波の第2次近似解<sup>5)</sup>を式 (1) に代入し、同様の立場から計算したエネルギーフラックス  $\bar{W}_{C2}$  は、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \bar{W}_{C2} = & \rho gh^2 \sqrt{gh} \\ & \left[ \frac{L_1^2}{3} \left\{ \kappa^2 - 1 + 2(2 - \kappa^2) \left( \frac{E}{K} \right) - 3 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \right\} \right. \\ & + \frac{13}{3} L_1^2 L_3 \left\{ \kappa^2 - 1 + 4 \left( \frac{E}{K} \right) - 2\kappa^2 \left( \frac{E}{K} \right) \right. \\ & - 3 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \Big] + \frac{L_1^3}{15} \left\{ 18\kappa^4 + 11\kappa^2 - 29 \right. \\ & + (-36\kappa^4 + 6\kappa^2 + 124) \left( \frac{E}{K} \right) - 5(7\kappa^2 + 25) \\ & \left. \left. \left( \frac{E}{K} \right)^2 + 30 \left( \frac{E}{K} \right)^3 \right\} + O(L_1^m L_3^n) \dots\dots (4) \right. \\ & \left. \qquad \qquad \qquad m+n=4 \right. \end{aligned}$$

ここに、 $L_1$  および  $L_3$ : 微小なパラメーター、 $\kappa$ : だ円関数の母数、 $K$  および  $E$ : 第1種および第2種完全だ円積分、である。また、第1定義による Chappellear のクノイド波の第2次近似解<sup>7)</sup>によれば、エネルギーフラックス  $\bar{W}_{C1}$  は次式になる。

$$\begin{aligned} \bar{W}_{C1} = & \rho gh^2 \sqrt{gh} \\ & \left[ \frac{L_1^2}{3} \left\{ \kappa^2 - 1 + 2(2 - \kappa^2) \left( \frac{E}{K} \right) - 3 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \right\} \right. \\ & + 5L_1^2 L_3 \left\{ \kappa^2 - 1 + 4 \left( \frac{E}{K} \right) - 2\kappa^2 \left( \frac{E}{K} \right) \right. \\ & - 3 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \Big] + \frac{L_1^3}{15} \left\{ 23\kappa^4 + 6\kappa^2 - 29 \right. \\ & + (-46\kappa^4 + 31\kappa^2 + 119) \left( \frac{E}{K} \right) \\ & - 15(4\kappa^2 + 7) \left( \frac{E}{K} \right)^2 + 15 \left( \frac{E}{K} \right)^3 \Big] \\ & + O(L_1^m L_3^n) \dots\dots\dots (5) \\ & \qquad \qquad \qquad m+n=4 \end{aligned}$$

式 (5) に第1次近似解による  $L_1$  と  $L_3$  との関係式

$$2L_3 + L_1 \left( \kappa^2 + \frac{E}{K} \right) = 0 \dots\dots\dots (6)$$

を代入し、若干の計算をすれば、式 (5) は  $O(L_1^m L_3^n)$

で式 (4) と一致することがわかる。

一方、平均水深で表示した Laitone によるクノイド波の第2次近似解<sup>9)</sup> (第2定義) によれば、エネルギーフラックス  $\bar{W}_{L2}$  は次式で表示される。

$$\begin{aligned} \bar{W}_{L2} = & \rho gh^2 \sqrt{gh} \\ & \left[ \frac{1}{3\kappa^4} \left\{ \kappa^2 - 1 - 2(\kappa^2 - 2) \left( \frac{E}{K} \right) - 3 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \right\} \right. \\ & \left( \frac{H}{h} \right)^2 + \frac{1}{30\kappa^6} \left\{ 4(-\kappa^4 + 3\kappa^2 - 2) \right. \\ & + (8\kappa^4 - 53\kappa^2 + 53) \left( \frac{E}{K} \right) + 60(\kappa^2 - 2) \left( \frac{E}{K} \right)^2 \\ & \left. \left. + 75 \left( \frac{E}{K} \right)^3 \right\} \left( \frac{H}{h} \right)^3 + O \left( \left( \frac{H}{h} \right)^4 \right) \right] \dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここに、 $H$  は波高である。式 (7) は第1定義によるクノイド波の第2次近似解によるエネルギーフラックス  $\bar{W}_{L1}$  とは  $O((H/h)^3)$  で完全に一致する。また、著者ら<sup>9)</sup>は Chappellear によるクノイド波理論における微小な展開パラメーター  $L_1$  および  $L_3$  を波高・水深比  $H/h$  で展開して  $(H/h)^2$  の項まで考慮すれば、その波の諸特性は Laitone による理論と同一になることを示していることから明らかなように、 $L_1$  および  $L_3$  の  $(H/h)^2$  まで考慮した展開式を式 (4) および (5) に代入すれば、 $O((H/h)^3)$  で式 (7) に一致する。

### 3. 有限振幅波理論に基づく波の Shoaling

一般に、一様水深における波動理論によって計算されたエネルギーフラックスを用いる波の変形の計算は、i) 任意断面におけるエネルギーフラックスは水深が変化しても一定、ii) 波の周期は不変という2つの仮定に基づいている。さらに、iii) 深海でのエネルギーフラックスは深海波としての Stokes 波の第4次近似解による結果で表示できる (深海波の場合、両定義による理論は一致する) という仮定を設けるならば、第2定義による Stokes 波の第4次近似解を用いた波の変形式は、次の2つの式になる。

$$\begin{aligned} & \left( \frac{h}{L} \right)^4 \lambda_0^2 \left( 1 + \frac{3}{4} \lambda_0^2 \right) = \left( \frac{h}{L_0} \right)^4 \lambda^2 \\ & \left[ \frac{A_{11}^2}{2} (2kh + \sinh 2kh) \right. \\ & + \lambda^2 \left\{ 4kh \left( A_{02}^2 + \frac{A_{11}A_{13}}{2} + A_{22}^2 \right) + \frac{A_{11}^2B_{22}}{2} \right. \\ & + 4A_{02}A_{11} \cosh kh + 2A_{11}A_{22} \cosh kh \\ & + A_{11}A_{13} \sinh 2kh + \frac{3}{4} A_{11}^2 \sinh 2kh \\ & + \frac{A_{11}^2B_{22}}{2} \cosh 2kh + 2A_{11}A_{22} \cosh 3kh \\ & \left. \left. + A_{22}^2 \sinh 4kh \right\} \right] \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$2\pi(1+\lambda_0^2)\left(\frac{h}{L_0}\right) = kh(1+C_1\lambda^2)\tanh kh \quad \dots(9)$$

ここに、 $C_1: kh$  のみの関数および  $\lambda_0$ : 深海波の場合の微小なパラメーター、であり、 $\lambda_0$  は沖波波高および沖波波長をそれぞれ  $H_0$  および  $L_0$  とすれば、次の関係式で表わされる。

$$\frac{\pi H_0}{L_0} = \frac{3}{8}\lambda_0^3 + \lambda_0 \quad \dots\dots\dots(10)$$

また、浅水波領域をも含めた Stokes 波理論の展開パラメーター  $\lambda$  は波速の定義に関係なく、次式で与えられる。

$$\frac{\pi H}{L} = B_{33}\lambda^3 + \lambda \quad \dots\dots\dots(11)$$

したがって、 $H_0/L_0$  および  $h/L_0$  を与えて水深変化に伴う波高および波長の変化を計算するためには、まず式(10)から  $\lambda_0$  を求め、次に、式(8)および(9)からレギュラーファルシ法を用いて  $h/L$  および  $\lambda$  を算出し、最後に式(11)から  $H/L$  を計算すればよい。

一方、クノイド波理論による場合の波の変形の計算式は、近似の程度が同一でなく、また全く性質の異なる波動理論による結果を接続することに問題はあっても、岩垣らにならって便宜的に Stokes 波の場合の iii) の仮定を用いれば、次式になる。

$$\lambda_0^2\left(1 + \frac{3}{4}\lambda_0^2\right)\left\{\frac{1}{2\pi}(1+\lambda_0^2)\left(\frac{h}{L_0}\right)\right\}^{3/2} = 8\pi\left(\frac{h}{L_0}\right)^4 \left(\frac{\bar{W}_c}{\rho gh^2\sqrt{gh}}\right) \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$\frac{1}{2\pi}(1+\lambda_0^2)\left(\frac{h}{L_0}\right)\left(\frac{L}{h}\right)^2 = \left(\frac{c}{\sqrt{gh}}\right)^2 \quad \dots\dots\dots(13)$$

式(12)および(13)を用いて波の変形を計算する場合、 $L/h$ ,  $c/\sqrt{gh}$  およびクノイド波理論によるエネルギーフラックス  $\bar{W}_c$  にそれぞれのクノイド波理論による結果を代入して解けばよいわけであるが、いずれの定義による Chappellear のクノイド波理論を用いる場合も、次の2つの関係式が付加される。

$$\frac{H}{h} = \kappa^2 L_1 \left\{ 1 + \frac{1}{4} L_1 (7\kappa^2 + 10) + 6L_3 \right\} \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$2L_3 + L_1 \left( \kappa^2 + \frac{E}{K} \right) + L_2 \left\{ -\frac{1}{5} (-9\kappa^4 - 6\kappa^2 + 1) + 2(\kappa^2 + 1) \left( \frac{E}{K} \right) \right\} + 6L_1 L_3 \left( \kappa^2 + \frac{E}{K} \right) + L_3^2 = 0 \quad \dots\dots\dots(15)$$

Chappellear の理論を用いた実際計算にあたっては、与えられた  $H_0/L_0$  および  $h/L_0$  に対して式(10)から  $\lambda_0$  を計算したのち、式(12), (13) および (15) を非線型連立方程式のサブルーチンあるいはレギュラーファルシ法とニュートン法を併用した方法を用いて同時に  $L_1, L_3$  および  $\kappa$  を求め、それらを用いて  $H/h$  および  $L/h$  を算

出した。また、Laitone の理論による場合は、式(12)および(13)を同様の方法で計算した。なお、クノイド波理論では  $h/L_0$  の値が小さくかつ碎波限界に近づくにつれて  $\kappa$  の値がほとんど1になるので、 $\kappa$  に対して  $10^{-10}$  の精度で数値計算を行った。

### 4. 数値計算結果とその考察

図-2 は Stokes 波の第4次近似解を用いて計算した  $H/H_0$  と  $h/L_0$  との関係を  $H_0/L_0$  をパラメーターにして示したものである。図中の破線は波速  $c$  が波の峯の位相での水面における水平水粒子速度  $u_{70}$  に等しいとして求

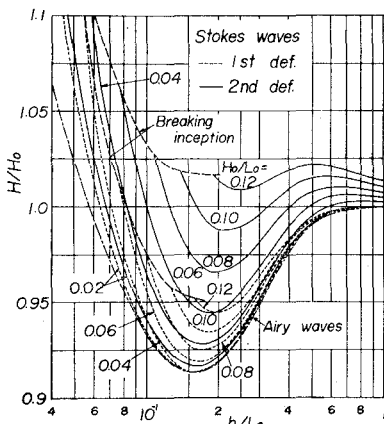


図-2 Stokes 波理論に基づく波高変化の計算結果

めたそれぞれの理論による碎波点である。さて、図によれば、いずれの定義による Stokes 波理論を用いても、同一の  $h/L_0$  に対する  $H/H_0$  の値は微小振幅波理論による結果より大きいことがわかる。また、第2定義による  $H/H_0$  の値は第1定義による結果よりさらに最大7%程度大きくっており、しかも  $h/L_0$  の値の比較的大きな領域においても  $H/H_0$  の値は1以上になる。以上のように、波速の定義の相違によって水深変化に伴う波高変化特性は大きく異なることがわかる。

図-3 は Chappellear によるクノイド波理論を用いた場合の  $H/H_0$  の計算結果を示したものであり、図中には前述の Stokes 波理論による結果も図示してある。図から明らかなように、クノイド波理論の適用性が問題となる  $h/L_0$  の値の大きい領域では Stokes 波理論の場合とは逆に第1定義による  $H/H_0$  の値の方が第2定義による結果と比較して若干大きいけれども、 $h/L_0$  の値が減少するにつれて、その差は小さくなっている。この結果は、孤立波理論の場合には両定義によるクノイド波理論が一致することから考えて了解されよう。また、第2定義のクノイド波理論による  $H/H_0$  の計算結果が  $h/L_0$  の大きい領域で微小振幅波理論による結果より小さくなっているのは、この領域でのクノイド波理論の適用性から考

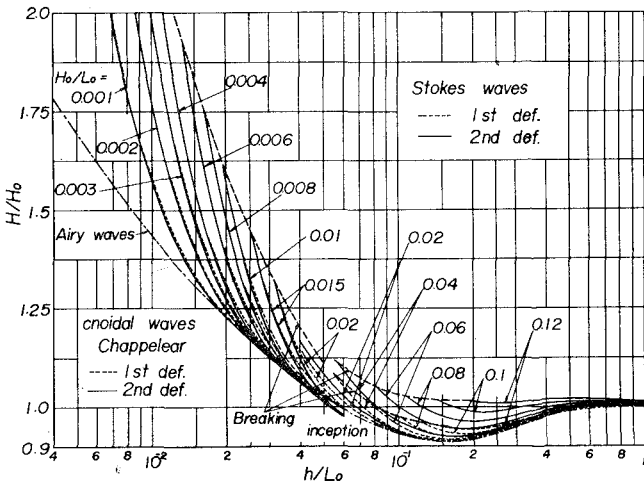


図-3 Stokes 波理論およびクノイド波理論に基づく波高変化の計算結果

えてやむをえないと考えられる。さらに、Stokes 波理論による結果からクノイド波理論による結果への接続は、第1定義による結果に対してより滑らかなようである。しかし、両者の近似度が異なるうえに、それぞれ性質の異なる波動理論であるので、理論的には必ずしも問題にならないであろう。

一方、第2定義による Chappellear のクノイド波理論による  $H/H_0$  の計算結果と Laitone のそれとを比較したのが図-4である。周知のように、Laitone の理論による波の峯の位相での水面における水平水粒子速度は、砕波点に近づくにつれて著しく増大するので  $c = u_0$  として計算された砕波点での  $H/H_0$  の値は Chappellear の結果よりかなり小さくなっている。この図から Chappellear の理論に基づく  $H/H_0$  の計算結果の  $h/L_0$  に対する増加率は、Laitone の

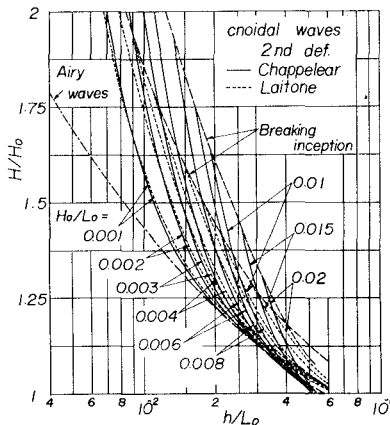


図-4 第2定義による Chappellear および Laitone のクノイド波理論に基づく波高変化の計算結果

理論による結果に比べて若干大きい程度であり、両理論による結果の相違はわずかであることがわかる。

次に、水深変化に伴う波長の変化について検討しよう。

図-5 は Stokes 波理論および Chappellear のクノイド波理論に基づいて計算した  $L/L_0$  と  $h/L_0$  との関係を  $H_0/L_0$  をパラメーターにして示したもので、図中の黒丸は砕波点を示す。クノイド波理論によれば、波速の計算結果から推定されるように、同一の  $H_0/L_0$  および  $h/L_0$  に対して第1定義による計算の方が第2定義による結果に比べてより小さくなり、その傾向は  $H_0/L_0$  の値の大きいほど著しい。一方、Stokes 波理論による場合にも同様の傾向がうかがえるが、特に第2定義による計算結果は、それ以外の理論による結果

がいずれも微小振幅波理論より大きいものに対して、 $H_0/L_0$  の値が大きいほど、 $h/L_0 > 0.15$  の領域で微小振幅波理論による結果より小さくなっている。一方、図-6 は第2定義による Chappellear の理論および Laitone の理論による  $L/L_0$  の計算結果を比較したものである。この場合にも図-4 に示した  $H/H_0$  の計算結果と同様に、クノイド波理論の適用性が問題になる  $H_0/L_0$  および  $h/L_0$  の値の大きい領域とさらに砕波点付近において両者の差が増加している。

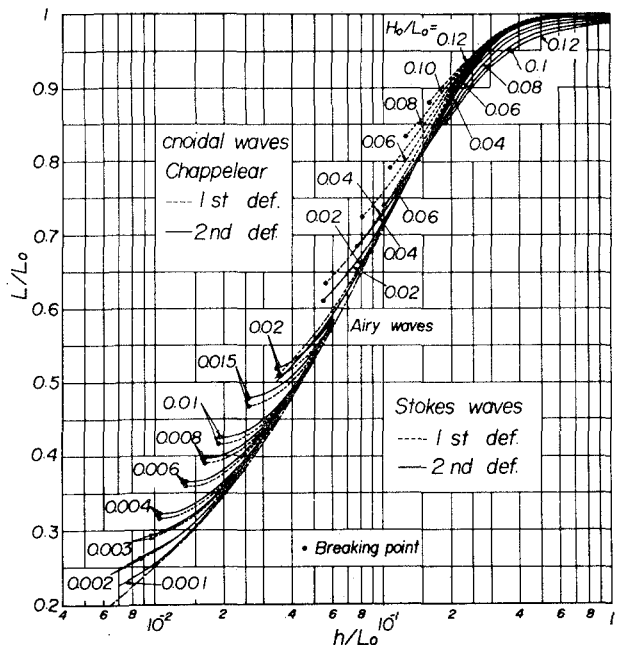
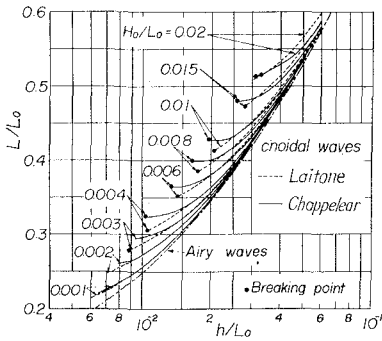


図-5 Stokes 波理論およびクノイド波理論に基づく波長変化の計算結果



図—6 第2定義による Chappellear および Laitone のクノイド波理論に基づく波長変化の計算結果

## 5. 結 語

以上、著者らは本論文において、一様水深における有限振幅波理論に基づく波の shoaling の計算上の問題点と著者らの研究の立場を述べたのち、とくに Stokes 波の第4次近似解およびクノイド波の第2次近似解を用いて波速の定義の差異に起因する波の変形特性の相違の程度を明らかにした。

そこで、今後それぞれの波速の物理的特性をできるだけ満足するような実験装置を用いて波の shoaling に関する実験を実施し、各理論の適合性やそのための水理的条件を検討するとともに、著者らの研究の立場から省略した高次項の波の変形計算に及ぼす影響を明らかにしたいと考えている。

最後に、クノイド波理論による波の shoaling の数値計算にあたり、適切なご助言をいただいた京大工学部木

村晃助手および図面の作成に助力いただいた同防災研究所芝野照夫助手に謝意を表明する次第である。なお、本研究の数値計算は防災研究所資料センターの FACOM 230-25 および京大大型計算機センターの FACOM 230-75 によるものである。

## 参 考 文 献

- 1) Le Méhauté and L.M. Webb: Periodic gravity waves over a gentle slope at a third order of approximation, Proc. 9th Conf. on Coastal Engg., 1964, pp. 23-40.
- 2) 岩垣雄一・酒井哲郎: 有限振幅波の Shoaling について, 第14回海岸工学講演会講演集, 1967, pp. 1-7.
- 3) Skjelbreia, L. and J.A. Hendrickson: Fifth order gravity waves, Proc. 7th Conf. on Coastal Engg., 1960, pp. 184-197.
- 4) Laitone, E.V.: The second approximation to cnoidal and solitary waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 9, 1961, pp. 430-440.
- 5) Tsuchiya, Y. and M. Yamaguchi: Some considerations on water particle velocities of finite amplitude wave theories, Coastal Engg. in Japan, Vol. 15, 1972, pp. 43-57.
- 6) Whitham, G.B.: Mass, momentum and energy flux in water waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 12, 1961, pp. 135-143.
- 7) Chappellear, J.E.: Shallow-water waves, Jour. Geophys. Res., Vol. 67, No. 12, 1962, pp. 4693-4704.
- 8) Laitone, E.V.: Series solutions for shallow water waves, Jour. Geophys. Res., Vol. 70, No. 4, 1965, pp. 995-998.
- 9) Yamaguchi, M. and Y. Tsuchiya: Relation between wave characteristics of cnoidal wave theory derived by Laitone and by Chappellear, Bulletin of DPRI, Kyoto Univ., Vol. 24, Part 3, 1974, pp. 217-231.

