

孤立性段波のソリトン分裂に関する研究

岩崎 敏夫*・真野 明**・小杉 達郎**

1. まえがき

浅海における非保存波の非線型変形については、近時、K-dV 方程式を基本として解析解や数値解が多く提示されるようになったが、実験水路はおおむね短かきに失して、分散が完成してソリトン波列を形成するまでとか、さらに分裂したソリトンが伝播にともなっていくかに変形するかについてはよくわかっていなかった。本研究では長さ 100 m の 2 次元水路を用いて孤立性段波のソリトン分裂に関して実験的に研究し、興味ある諸性質を明らかにすることができた。孤立性分散波と称したのは造波板の一回限りの水平移動によって生じる一山とさざ波からなる非保存波のことである。

2. 実験概要

本実験に使用した水路の概略を 図-1 に示す。全長 100 m、水路高は延長 79.5 m の区間が 0.5 m、延長 20.5 m の区間が 1.0 m になっており、その間の 0.5 m の区

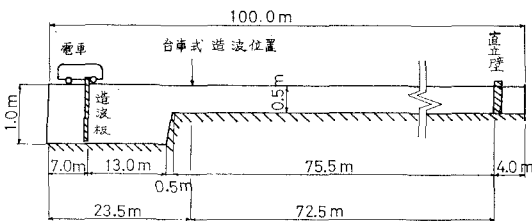


図-1 水路および造波装置

間を 45° 度の斜面でつないでいる。造波装置は台車式と電車式の 2 種類とし、いずれも水路延長に直角に造波板をとりつけた。台車式は、造波された波がそのまま一様水深の所を伝播するように高水路部に設置し、また電車式は低水路で造波し、比較的ゆっくりとした動きで、造波板のストロークも長くとれるようにしてあり、長周期の波もおこせるのが特徴である。いずれの造波装置とも造波板の移動距離と経過時間との関係は、ほぼ直線的であり、平均移動速度 V_0 は、台車式の場合 $V_0/C_0=0.23\sim 0.49$ 、

電車式の場合 $0.05\sim 0.10$ であった。ここで $C_0=\sqrt{gh}$ (h は造波地点の水深) である。また V_0 と発生段波の最高波高 η_0 との間にはほぼ直線的関係があり、台車式で $V_0/C_0=0.79\eta_0/h$ 、電車式で $V_0/C_0=0.96\eta_0/h$ で表わされた。台車式の場合には、 η_0 と碎波との間に密接な関係があり、 $\eta_0/h>0.5$ の場合に Spilling 型の碎波が起こった。室田・岩田¹⁾の研究では、理想段波波高と水深の比で、0.25 以上で Spilling 型碎波になることが報告されているが、本実験値とはかなり異なる。これは後に述べるように、初期波高だけでなく段波の波長、波形が影響してくるためと思われる。

このようにして造波された波の伝播に伴う波形の変形と、水路他端に到達した分散波列の鉛直壁による重複波高およびその波圧を測定した。波高測定は 5 台の抵抗線式波高計を用いた。また直立壁での遡上高は薬品を使って痕跡を正確に測定した。本論文では波高計の位置は高水路水深 h で無次元化して x/h で示すが、台車式の場合の原点は水路端より 23.5 m の地点であり、電車式の場合は斜面を登りきった地点であり、この波形を初期波形とした。圧力は 5 台の圧力変換器により鉛直方向の波圧分布を測定した。

実験ケースの一部を表-1 に示す。Case 1~4 が台車式、Case 5~18 が電車式による造波である。この他に Case 19~30 について水深を 10.5~18.5 cm に変えて台車式による実験を行っている。

3. 孤立性分散波の特性

孤立性分散波のソリトン分裂の状況を 図-2、図-3 に示す。造波地点における台形状の波形が伝播とともにひだが深くなり、最初の小さな凹凸が各ソリトンに成長していく様子がわかる。ソリトンはその伝播速度から、波高の大きい順に整列するが、整列し終るまでの距離を Hammack-Segur²⁾ は、えり分け距離 d_s として次のように定義している。

$$(d_s/h)=(\eta_0/l_0)^{-1} \dots\dots\dots(3.1)$$

ここで、 η_0 は初期最大波高、 l_0 は孤立性段波の静水面より上の部分の長さをとる。式 (3.1) による d_s/h を

* 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科
** 学生会員 工修 東北大学大学院 工学研究科

表-1 実験 ケース

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Case	h	Stroke	η_0/h	U_s	d_s/h	N_e	N_c	α_e	α_c
1	15.0	0.5	0.20	73	95	2	1~3	1.45	1.58
2	"	1.5	0.26	478	15	5	4~6	1.51	1.51
3	"	0.5	0.39	60	32	2	0~2	1.40	1.49
4	"	1.5	0.55	389	49	4	2~4	B 1.53	1.68
5	"	0.05	0.21	148	138	2	2	1.66	1.52
6	"	"	0.35	408	96	2	2	1.46	1.65
7	"	"	0.43	545	84	2	3	1.63	1.60
8	"	0.5	0.28	1 168	231	5	7	1.69	1.72
9	"	"	0.32	1 072	181	5	6	1.83	1.74
10	"	"	0.43	1 338	131	7	6	B 1.81	1.74
11	"	1.05	0.31	3 921	359	10	13	1.48	1.61
12	"	"	0.33	2 721	279	9~	10	1.77	1.74
13	"	"	0.42	2 738	192	10~	10	B 1.93	1.83
14	"	"	0.51	2 996	149	11~	9	1.81	1.81
15	"	1.50	0.25	4 961	552	12~	16	1.82	1.76
16	"	"	0.33	4 647	354	12~	15	1.86	1.72
17	"	"	0.43	4 989	253	14~	15	B 1.93	1.76
18	"	"	0.58	6 177	178	13~	13	1.61	1.79

B は Breaking

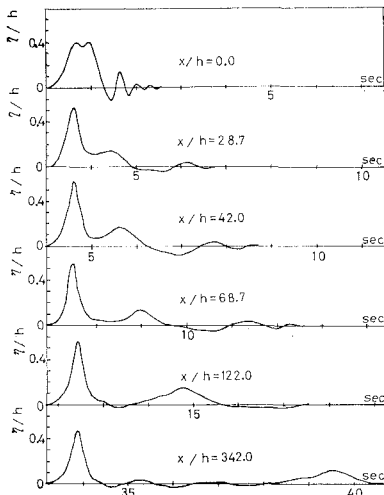


図-2 台車式による波形 (Case 3)

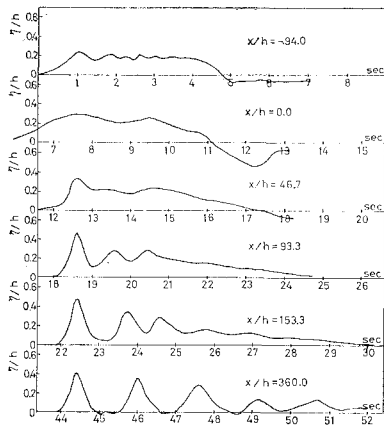


図-3 電車式による波形 (Case 8)

表-1 の第6列に示す。図-2 (Case 3), 図-3 (Case 8) の実験波形から見ると, おおの 69 < d_s/h < 122, 153 < d_s/h < 360 となっており, 式 (3.1) は少し小さめの値を与えるようであるが, おおむね実験値と合致する。電車式の場合に直立壁は, $x/h=503$ で表わせるので, ほとんどの実験ケースとも直立壁に到達するまでに, えり分けが完了していることがわかる。

次に Gardner その他³⁾ によると, K-dV 方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \dots\dots\dots(3.2)$$

を変数変換により, 次のような Sturm-Liouville 型の方程式

$$d^2\phi(X)/dX^2 + (\lambda + u(X, 0))\phi(X) = 0 \dots\dots(3.3)$$

に変換した場合には, 各ソリトンの振幅は負の固有値によって, $2|\lambda|$ で与えられる。したがってソリトンの総数 N は, 固有関数の性質から, 式 (3.3) において $\lambda=0$ とした次の式

$$d^2\phi(X)/dX^2 + u(X, 0)\phi(X) = 0 \dots\dots\dots(3.4)$$

に対応する固有関数の根を数えれば良い。 $u(X, 0)$ は初期波形として与えられるので, 式 (3.4) は Runge-Kutta 法等によって容易に数値積分されて求まる。ここで各量は, K-dV 方程式の形から次の様に無次元化されている。

$$X = h^{-1}[x - (gh)^{1/2}t] \quad u(X, 0) = (3/2h)\eta(x, 0) \dots\dots\dots(3.5)$$

この方法によって計算した結果を表-1 の第8列 Case 5 以降に示す。また, 初期波形が比較的簡単な形状の場合には, Segur⁴⁾ によって次式のように N の上限と下限が与えられている。

$$\tan(l_2 Q_2^{1/2}) \leq \frac{2Q_3^{1/2}}{Q_2 - Q_3}$$

$$\longrightarrow \frac{l_2 Q_3^{1/2}}{\pi} - 1 < N < \frac{l_1 Q_1^{1/2}}{\pi} + 1 \dots\dots\dots (3.6)$$

$$\tan(l_2 Q_3^{1/2}) \geq \frac{2Q_3^{1/2}}{Q_2 - Q_3}$$

$$\longrightarrow \frac{l_2 Q_3^{1/2}}{\pi} \leq N < \frac{l_1 Q_1^{1/2}}{\pi} + 1 \dots\dots\dots (3.7)$$

式中の符号を図-4に示す。式(3.6),(3.7)によって計算した結果をCase 1~4について示す。第7列に実験値を示したがCase 1~4では中に入っており、またソリトン数が10以下では良く一致した。ソリトン数10以上のものについては、実験上はソリトンとさざ波の区別が明確でなくなったり、直立壁までにえり分けが完了しなかったものもあって10~のように表わしたが、一応よい対応をしていると見なせるであろう。

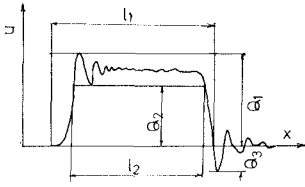


図-4 符号の定義

4. 先導ソリトンの変形過程

図-2,3を見てもわかるとおり、先導ソリトンは分散を続けながらその波高を増加させていく、先導ソリトンの波高の変化を x/h に対して示したのが、図-5である。この先導ソリトンは x/h が150程度までにならず

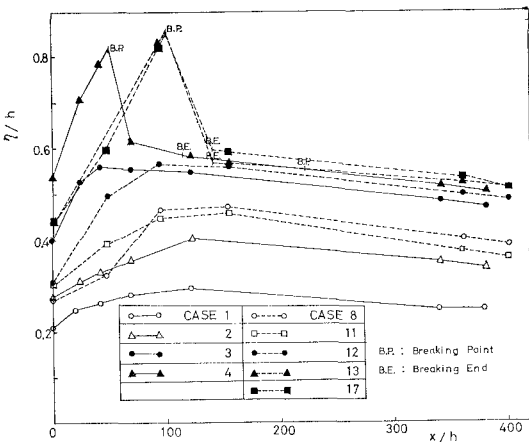


図-5 先導ソリトンの波高変化

もピークをもち、あとは一様に減衰している。このピークの位置は砕波を除いて、波形記録の観測から第2番目のソリトンを分離する位置と関係がある。またピークに達するまでの増加の割合は、一般に初期波高が高いほど大きい。図-6は波高増加率を初期波高 η_0/h に対してプロットしたものであるが、この傾向が良くあらわれ

ている。ここで波高増加率 n は図-5において、ピークに達するまでの波高計測点における平均勾配で表わした。本実験では、砕波波高は直線補外により求められている。図-6は○△が台車式、●▲が電車式の場合であるが、台車式の場合 $\eta_0/h > 0.5$ で、電車式の場合 $\eta_0/h > 0.4$ で Spilling 型砕波であった。室岡・岩田の研究¹⁾では、波形・波高増加率の定義が若干異なるが、その中で波高水深比 0.25~0.35 で Spilling 型砕波という結果であるがこれとはかなり異なった結果である。

砕波後は、ピークから x/h が40程度で波形が整形し孤立波状になる。 η_0/h が0.4あるいは0.5を越えて砕波したものは、この砕波整形後ほぼ同じ波高でまた同じ減衰率で進行する。しかし砕波しない場合には図-5で、Case 8, 11, 12を比べて見ると初期波高はほとんど同じであるのに、その後の波高変化はかなり異なっており、初期波高のみではその後の変形を論じられない

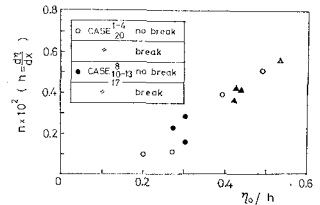


図-6 波高増加率

いことがわかる。ピークの波高(砕波したものについては、波高計で測定されている最高のもの)を η_0 で割って増幅率 α_0 を計算したものを表-1の第9列に示す。初期波形 $u(X,0)$ が与えられた場合の個々のソリトンの波高が $2|\lambda|$ であることから、式(3.3)より $|\lambda|$ を求めて実験値と比較する。Rayleigh-Ritzの方法により汎関数は次式で与えられる。

$$\lambda(\phi) = \min_{\phi(X)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - u(X,0)\phi^2 \right) \times dx \right] \dots\dots\dots (4.1)$$

試験関数 ϕ の境界条件は、 $X \rightarrow \pm\infty$ で $\phi \rightarrow 0$ である。今回の計算では、Hermite の多項式 H_n と指数関数の積を用いた。

$$\phi(x) = (k_0 H_0 + k_1 H_1 + k_2 H_2 + k_3 H_3) \exp(-k_4 X^2) \dots\dots\dots (4.2)$$

パラメーター $k_0 \sim k_4$ を種々変えて、 λ が最小になるようにした。これによって計算された $|\lambda|$ を用いて波高増幅率 α_0 を表-1第10列に示す。実験値第9列と比較して見ると、有効数字2桁をとって見た場合に非常によく合っていることがわかる。前に述べたCase 8, 11, 12についても増幅率の大きい順からならべるとCase 12 ($\alpha_0=1.77, \alpha_0=1.74$), Case 8 (1.69, 1.72), Case 11 (1.48, 1.61) となって実験の傾向をよく再現している。しかしCase 10, 13, 17の砕波した場合はいずれも実験値の方が計算値より高くなっており、砕波限界という物

理的条件を考えると、これは不合理であり、その結果の理由についてはいまだ明らかでない。

砕波しなかった波についてもピークを過ぎると波高はほぼ一様に減衰している。このピークを過ぎて、減衰が一樣になってからの波高減衰率を増加率と同様に定義すると、その減衰開始点の波高に対して、**図-7**のようにプロットされる。图中曲線は Keulegan⁵⁾ が孤立波について導いた粘性による波高減衰の式である。

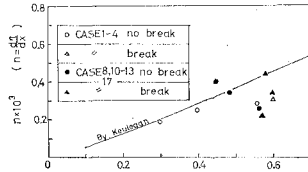


図-7 波高減衰率

また、実験から得られた先導ソリトンの伝播速度は、 $C/C_0 = 0.98 + 0.46\eta/h$ の直線で表わされ、孤立波理論のそれよりは、やはり粘性等の影響で若干小さな値となっている。ここで C_0 は線型長波の波速である。

5. 孤立波の反射およびその波圧

長距離の伝播でえり分けられた個々のソリトンは、孤立波の性質をもつので、それが直立壁で反射してどのような変形をするかをこの節で述べる。

鉛直壁における孤立波の遡上高 H_R を、入射孤立波の波高 H に対してプロットしたのが **図-8** である。丸印が本実験値であり、一点鎖線が Street 他⁶⁾ による実験結果である。また $H_R/H = 2.0$ は線型理論による完全重複波高であり、点線が Wallace の doublet の理論を使った理論解であり、Street の論文より転記した。

本実験値は、ばらついているが、Street の実験値に近い傾向をもつ。しかし、 H/h が 0.5 付近ではかなり高い値をもっている。Wallace の解は $H/h = 0.3 \sim 0.4$ 付近では実験値とよくあっているようであるが、この解は

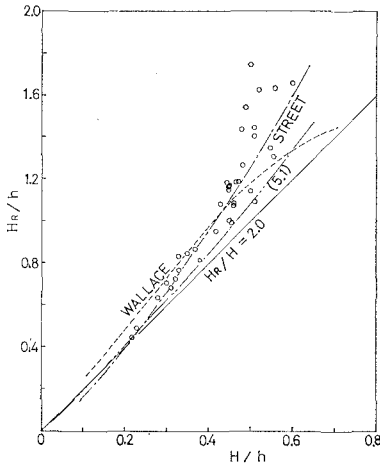


図-8 孤立波の遡上高

上に凸の曲線となっており、入射波高の高い所では、実験値から離れてしまう。Benney 他⁷⁾ は摂動展開の方法を用いて、第2次近似の項まで求めているが、誘導に誤りがあるものと思われるので改めて計算を行うと、次元量で表わして次式に示すとおりになる。

$$\begin{aligned}
 (\eta/h) = & (A_0/h)(\text{sech}^2 B\theta_1 + \text{sech}^2 B\theta_2) \\
 & + (3/4)(A_0/h)^2[\text{sech}^2 B\theta_1(2 - \text{sech}^2 B\theta_1) \\
 & + \text{sech}^2 B\theta_2(2 - \text{sech}^2 B\theta_2)] + (1/2)(A_0/h)^2 \\
 & \times [\text{sech}^2 B\theta_1 \text{sech}^2 B\theta_2 \\
 & - \tanh B\theta_1 \tanh B\theta_2(\text{sech}^2 B\theta_1 + \text{sech}^2 B\theta_2)] \\
 & \dots \dots \dots (5.1)
 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 \theta_1 = x - ct, \quad \theta_2 = -x - ct \quad B = (3A_0/4h^3)^{1/2} \\
 c = (gh)^{1/2}(1 + (A_0/2h) + (19/40)(A_0/h)^2) \\
 + O((A_0/h)^3) \dots \dots \dots (5.2)
 \end{aligned}$$

図-8 の二点鎖線は式 (5.1), (5.2) を示す。この曲線は実験値の下限をとっており、決して実験値をよく表わしているとはいえないが、上に凹になっており、Wallace の理論曲線よりは実験値の傾向に近いように思われる。他にクノイド波の完全重複波についての2次近似までの解が首藤⁹⁾ により求められており、母数 $k \rightarrow 1$ の極限をとると形式上孤立波の解となるが、これによると二点鎖線よりちょっと上にずれる程度である。

次にこの反射による波圧の測定例を **図-9** に示す。

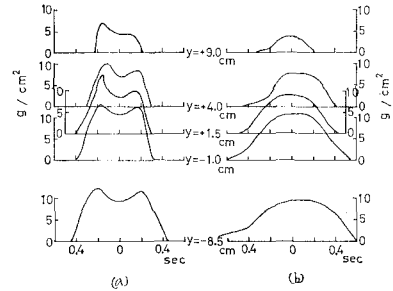


図-9 波圧測定例

Case 14 の場合であり、a) が先導ソリトンによる双峰型波圧分布を示し、b) が2番目のソリトンによる重複型波圧分布を示す。图中 y は静水面より上方にとってある。双峰型波圧については、表面波に対して合田他⁹⁾ の研究があり、高次の波数成分の影響によって現われることが述べられているが、孤立波に関しては明らかでない。しかし式 (5.1) 程度の近似解では静水面での圧力は $\rho g \eta$ で表わされるだけであるから、双峰型の出現は期待できない。そこで便宜的に Munk の孤立波における有効波長の概念¹⁰⁾ を利用して、合田の結果と比較する。**図-10** は双峰型出現限界を H/L と h/L の関係において示す。 L は直立壁より (100~200) h 離れた地点における実測周期を波長に換算したものである。合田によると浅水域

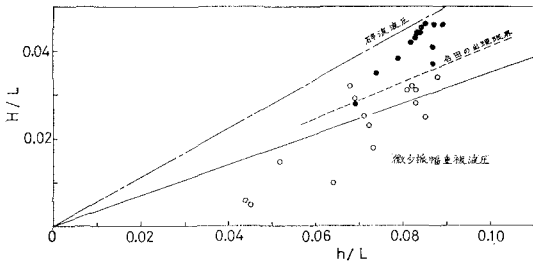


図-10 双峰型波圧の出現限界

における静水面での出現限界は $H/h=0.35$ であり、これを図中に点線で示した。黒丸が双峰型波圧であり白丸が1山のものである。2個の白丸を除いて、いずれも合田の限界により、ふり分けられていることがわかる。

静水面上での最大波圧 p_{max} を前述の H/L に対して示したのが 図-11 である。波形勾配が大きくなるほど p_{max}/w_0H は小さくなっており、遡上高 H_R とは相対的に波圧分布が slender になっ

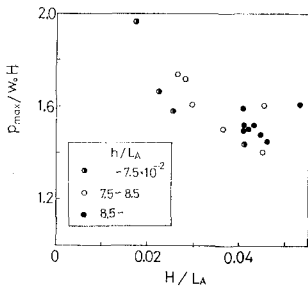


図-11 静水面上の最大波圧

てきて、遡上高が高くなっても、それからの静水圧は十分に働かないことがわかる。式 (5.1) の解は $p_{max}=\rho g H_R$ であるので p_{max}/w_0H はいずれも 2.0 を越え、図には示していない。

6. おわりに

以上、孤立性段波が与えられた場合のソリトンの数、

波高増幅率、減衰率について明らかにすることができたが、孤立波の反射ならびに波圧については、理論的裏づけが乏しく今後いっそうの研究がなされなければならない。

最後に、厳寒の中、本実験を熱心に遂行して頂いた、大森信慈(現 下水道事業センター)、山田正雄(現 東北大学大学院)の両君に甚大な謝意を表します。

参考文献

- 1) 室田 明・岩田好一朗: 段波の変形に関する研究, 土木学会論文集, No. 160, 1966.
- 2) Hammack, J.L. and H. Segur: The Korteweg-de Vries Equation and Water Waves. Part 2, J. Fluid Mech., 65, 2, 1974.
- 3) Gardner・Green・Kruskal・Miura: Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation, Phys. Rev. Letters, 19, 19, 1967.
- 4) Segur H.: The Korteweg-de Vries Equation and Water Waves Part 1., J. FLuid Mech., 59, 4, 1973.
- 5) Keulegan G.H.: Gradual Damping of Solitary Waves, National Bureau of Standards, 40, 1948.
- 6) Street・Camfield: Observations and Experiments on the Solitary Wave Deformation, Proc. 10th Conf. Coastal Eng.
- 7) D.J. Benney: On the interactions of permanent waves of finite amplitude, J. Math. Phys., 43, 4, 1964.
- 8) 首藤伸夫: 有限振幅の定常長波, 第15回海岸工学講演会講演集, 1968.
- 9) 合田良実・柿崎秀作: 有限振幅重複波ならびにその波圧に関する研究, 港湾技術研究所報告, 5, 10, 1966.
- 10) Munk, W.H.: The Solitary Wave Theory and Its Application to Surf Problems, Ann. of the New York Acad. of Sci., 51, 1959.