

一様流を伴う有限振幅波の理論

土屋 義人*・安田 孝志**

1. 緒 言

沿岸海洋での水理現象を究明する場合、波のみならず流れをも考慮することが一般に必要なことから、波と流れの共存系に関する研究^{1),2)}が数多く行われてきた。流れの Reynolds stress³⁾を考慮する立場では、ほとんどの場合微小振幅波理論が適用され、波の有限振幅波としての特性は無視されている。また、Longuet-Higgins ら⁴⁾による波と流れの相互作用を考慮した展開では、波の有限振幅波の特性がある程度導入されて、いわゆる radiation stress の概念が導かれてきた。

本研究では、流れを伴う有限振幅波の特性を明らかにするため、一様流の場合のクノイド波理論を試み、波の特性を究明することにした。

2. 一様流を伴う有限振幅波の基礎方程式の誘導

(1) 基礎方程式

流れの速度を U とし、波による水平および鉛直水粒子速度をそれぞれ u および w とすれば、Euler の運動方程式は連続方程式とともに次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} (u+U)_t + (u+U)(u+U)_x + w(u+U)_z &= -p_x/\rho \\ w_t + (u+U)w_x + w w_z &= -p_z/\rho - g \\ (u+U)_x + w_z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

非回転運動を考え、次のように速度ポテンシャル ϕ を定義する。

$$\left. \begin{aligned} (u+U)_z - w_x &= 0; \quad u = \phi_x, \quad U = \phi_{0x}, \quad w = \phi_z \\ &\dots\dots\dots (2) \end{aligned} \right\}$$

したがって、Bernoulli 式は次式で表わされる。

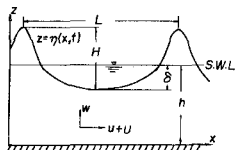


図-1 座標系および記号の説明

$$\left. \begin{aligned} \phi_t + \int \phi_{0xt} dx + (1/2)\{(\phi_x + \phi_{0x})^2 + \phi_z^2\} \\ + p/\rho + gz = \text{const.} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

U を定常と考え、座標を 図-1 に示すようにとることにすれば、基礎方程式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2(\phi + \phi_0) &= 0 \\ \phi_t + \frac{1}{2}\{(\phi_x + \phi_{0x})^2 + \phi_z^2\} + gz'|_{z=h+z'} &= \text{const.} \\ z'_t + z'_z(\phi_x + \phi_{0x}) - \phi_x|_{z=h+z'} &= 0 \\ \phi_z|_{z=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 g は重力の加速度である。次に、次式で表わされる無次元量を定義する。

$$\left. \begin{aligned} \phi^* &= \phi/h \sqrt{gh}, \quad \phi_0^* = \phi_0/h \sqrt{gh}, \quad x^* = x/h \\ z^* &= z/h, \quad t^* = t \sqrt{g/h}, \quad z'^* = z'/h, \\ F_r &= U/\sqrt{gh} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

式(5)を用いて式(4)を書き換えると、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2(\phi^* + \phi_0^*) &= 0 \\ \phi_{t^*}^* + (1/2)\{(\phi_{x^*}^* + F_r)^2 + \phi_{z^*}^{*2}\} + z'^{*}|_{z^*=1+z'^*} \\ &= \text{const.} \\ z'^{*}_t + z'^{*}_z(\phi_{x^*}^* + F_r) - \phi_{x^*}^*|_{z^*=1+z'^*} &= 0 \\ \phi_{z^*}^*|_{z^*=0} &= 0 \end{aligned} \right\} (6)$$

(2) 波動方程式の誘導

ここでは、流れを一様流と仮定し、 $(\sqrt{gh} + U)$ の動座標で考えれば、流れのない場合のクノイド波の理論と同様に取扱うことができるので、次式の Gardner—Morikawa 変換が適用できる。

$$\xi = \varepsilon^{1/2}\{x^* - (1 + F_r)t^*\}, \quad \tau = \varepsilon^{3/2}t^*, \quad \zeta = z^* \quad (7)$$

ここに、 $\varepsilon = (h/L)^2$, h : 平均水深および L : 波長である。式(7)を用いて式(6)を書き換えると、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \phi_{\xi\xi}^* + \phi_{\tau\tau}^* &= 0 \\ -\varepsilon^{1/2}\phi_{\xi\xi}^* + \varepsilon^{3/2}\phi_{\tau\tau}^* + (1/2)\{\varepsilon\phi_{\xi\xi}^{*2} + \phi_{\tau\tau}^{*2}\} \\ + z'^{*}|_{\zeta=1+z'^*} &= 0 \\ -\varepsilon^{1/2}z'^{*}_\tau + \varepsilon^{3/2}z'^{*}_\zeta + \varepsilon z'^{*}_\xi \phi_{\xi}^* - \phi_{\xi}^*|_{\zeta=1+z'^*} &= 0 \\ \phi_{\zeta}^*|_{\zeta=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

したがって、基礎式には F_r の影響が陽には現われない。これは、自由表面の境界条件に含まれる $F_r\phi_{x^*}^*$ および

* 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所
** 正会員 工修 京都大学助手 防災研究所

$F_7 z_7^*$ の非線型項が, Gardner—Morikawa 変換で消去されるためである。式(7)の変換に対応して ϕ^* および z' に対するせつ動解を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \phi^*(x^*, z^*, t^*) \\ = \varepsilon^{1/2} \phi_1(\xi, \tau, \zeta) + \varepsilon^{3/2} \phi_3(\xi, \tau, \zeta) + \dots \\ z'(x^*, t^*) = \varepsilon \eta_1(\xi, \tau) \\ = \varepsilon \eta_1(\xi, \tau) + \varepsilon^2 \eta_2(\xi, \tau) + \dots \end{aligned} \right\} (9)$$

式(7), (8) および (9) より, 一樣流を伴う有限振幅波に関する水面変動 η のみで表示された基礎方程式として, 次式が導びかれる。

$$\begin{aligned} \eta_\tau + \frac{3}{2} \eta \eta_\xi + \frac{1}{6} \eta \eta_{\xi\xi\xi} = -\varepsilon \left\{ \frac{1}{15} \eta \eta_{\xi\xi\xi\xi\xi} + \frac{1}{6} \eta \eta_{\xi\xi\xi} \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \eta_\xi \eta_{\xi\xi} + \frac{2}{3} \eta \eta_{\xi\xi\xi} + \frac{3}{2} \eta^2 \eta_\xi + \frac{3}{2} \eta \eta_\tau + \eta_\xi + \Omega_\tau \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \Omega_{\tau\xi} \right\} + \varepsilon^2 F^*(\eta) \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

$$\Omega_\xi - \eta = \varepsilon \left\{ \Omega_\tau + \eta \Omega_\xi + \frac{1}{2} \eta \eta_{\xi\xi} - \frac{1}{2} \eta^2 \right\} + \varepsilon^2 G(\eta) (11)$$

式(10)の右辺を $\varepsilon F(\eta)$ と表わせば, その特性曲線として,

$$d\xi/d\tau = (3/2)\eta + (1/6)(\eta \eta_{\xi\xi\xi}/\eta_\xi) - \varepsilon F(\eta)/\eta_\xi (12)$$

が得られる。この関係による位相速度が

$$d\xi/d\tau = c^* = c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \dots (= \text{const.}) \dots \dots \dots (13)$$

で表わされ, それが一定値をとるようないわゆる定形波を対象として, 式(10)および(11)の波動解を求めることにする。そうすれば, $\sigma = \xi - c^* \tau$ で表わされる変数変換を行って, 式(10)および(11)より一樣流を伴う有限振幅波に関する波動方程式として, 次式の常微分方程式が導びかれる。

$$\begin{aligned} -c^* \eta_\sigma + \frac{3}{2} \eta \eta_\sigma + \frac{1}{6} \eta \eta_{\sigma\sigma\sigma} = -\varepsilon \left\{ \frac{1}{15} \eta \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{6} c^* \eta_{\sigma\sigma\sigma} \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \eta_\sigma \eta_\sigma + \frac{2}{3} \eta \eta_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{3}{2} \eta^2 \eta_\sigma - \frac{5}{2} c^* \eta \eta_\sigma \right. \\ \left. + \frac{1}{2} c^{*2} \eta_\sigma \right\} + \varepsilon^2 F^{**}(\eta) \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

この方程式によれば, 一樣流の場合には, 波動に及ぼす

流れの効果は式中には現われず, すでに著者らが取扱った流れのない場合の基礎方程式⁵⁾と全く一致する。

3. 一樣流を伴う有限振幅波のせつ動解

前述したように, 解くべき基礎方程式は流れのない場合のクノイド波の基礎式と同一であることから, 以下ではそのせつ動解として得られた波の特性の表示を列記することにす。

まず, 波形は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{z'}{h} = \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + O(\varepsilon^3) \\ = -\lambda \left\{ \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) - \text{cn}^2 \vartheta \right\} + \frac{\lambda^2}{4k^4} \left[4 \left(\frac{E}{K} \right) \right. \\ \left. \times \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) + 4k^2 - 5 \right\} + 5k^4 - 13k^2 + 8 \right] \\ - \frac{\lambda^2}{2k^2} \left\{ 6 \left(\frac{E}{K} \right) + 4k^2 - 5 \right\} \text{cn}^2 \vartheta + \frac{3}{4} \lambda^2 \text{cn}^4 \vartheta \\ + O(\lambda^3) \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned} \vartheta = (1/2k)(3\lambda)^{1/2} \{ (x/h) - (ct/h) \} \\ \lambda = 2k^2 \left\{ 12 \left(\frac{E}{K} \right) + 5k^2 - 10 \right\}^{-1} \left(1 - \left[1 - \frac{1}{k^2} \right] \right. \\ \left. \times \left(\frac{H}{h} \right) \left\{ 12 \left(\frac{E}{K} \right) + 5k^2 - 10 \right\}^{1/2} \right) \ll 1 \end{aligned} \dots \dots \dots (16)$$

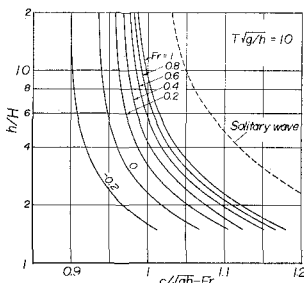
また, k は楕円積分の母数, K および E はそれぞれ第1および第2種完全楕円積分である。この場合, 母数 k は次式で定められる。

$$2K = (1/2k)(3\lambda)^{1/2} (c/\sqrt{gh}) T \sqrt{g/h} \dots \dots \dots (17)$$

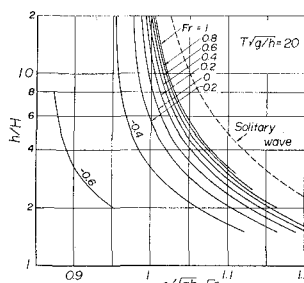
波の谷から静水面までの距離を δ とすれば, 次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{h} = \frac{\lambda}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) - \frac{\lambda^2}{4k^2} \left[4 \left(\frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + 4k^2 - 5 \right\} + 5k^4 - 13k^2 + 8 \right] + O(\lambda^3) \dots (18) \end{aligned}$$

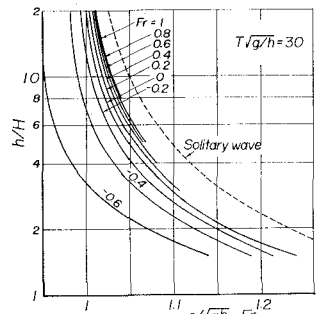
一方, 波速は,



(a)



(b)



(c)

図-2 一樣流を伴う有限振幅波の波速の特性

$$\begin{aligned} \frac{c}{\sqrt{gh}} &= 1 + F_r + \varepsilon c_0 + \varepsilon^2 c_1 + O(\varepsilon^3) \\ &= 1 + F_r - \frac{\lambda}{2k^2} \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) + k^2 - 2 \right\} \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{40k^4} \left[15 \left(\frac{E}{K} \right) \left\{ 9 \left(\frac{E}{K} \right) + 6k^2 - 12 \right\} \right. \\ &\quad \left. + 19k^4 - 64k^2 + 64 \right] + O(\lambda^3) \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

となる。図-2 は式(17)を用いて上式による波速の特性を計算したものであり、横軸には波速と一様流の流速との差を示し、 F_r の符号が負の場合は逆流を表わす。また、式(19)における $(c/\sqrt{gh} - F_r)$ の値は $F_r \rightarrow \infty$ にお

いては孤立波となることから、図中にはその関係を示してある。この場合には、soliton の衝突と同様に孤立波と一様流との非線型干渉は起こらないことは興味深い。式(19)によれば、波速は一様流の流速に線形的に加えらるるようになりけられるが、式(17)との関係から図-2に示すようにそこには非線型効果が現われ、それは $T\sqrt{g/h}$ の値が小さくなると著しいことがわかる。そして、 $F_r < 0$ で大きくなると、後述するように水粒子速度の分布から定形波として存在しないことになるようである。一様流を伴う有限振幅波の水平および鉛直水粒子速度は、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{U+u}{\sqrt{gh}} &= F_r + \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \left\{ \eta_2 + \frac{1}{2} \eta_1^2 + \frac{1}{2} (1 - \zeta^2) \eta_{100} - c_0 \zeta_1 \right\} + O(\varepsilon^3) \\ &= F_r + \lambda \left\{ \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) - \text{cn}^2 \vartheta \right\} + \frac{\lambda^2}{4k^4} \left[2 \left(\frac{E}{K} \right) \left\{ 4 \left(\frac{E}{K} \right) + 6k^2 - 7 \right\} + 5k^4 - 11k^2 + 6 + 3k^2(1 - k^2) \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ 1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} \right] - \frac{\lambda^2}{2k^2} \left\{ 5 \left(\frac{E}{K} \right) - k^2 - 2 + 3(2k^2 - 1) \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} \text{cn}^2 \vartheta + \frac{\lambda^2}{4} \left\{ 9 \left(\frac{z}{h} \right)^2 - 4 \right\} \text{cn}^4 \vartheta + O(\lambda^3) \dots\dots\dots (20) \\ \frac{w}{\sqrt{gh}} &= \left(\frac{3}{k^2} \lambda^3 \right)^{1/2} \left(\frac{z}{h} \right) \left(1 - \frac{\lambda}{2k^2} \left[5 \left(\frac{E}{K} \right) - k^2 - 2 + (2k^2 - 1) \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \left\{ 4 - 3 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} k^2 \text{cn}^2 \vartheta \right] \right) + O(\lambda^3) \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

この場合、上式で表わされる水平水粒子速度を一周期平均の残留速度 u_0 と周期成分 u_w とに分けて表示すれば、次式(22)のようになる。

$$\begin{aligned} (U+u)/\sqrt{gh} &= F_r + u_0/\sqrt{gh} + u_w/\sqrt{gh} \\ &\quad + O(\lambda^3) \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_0}{\sqrt{gh}} &= \frac{\lambda^2}{6k^4} \left[- \left(\frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] \\ \frac{u_w}{\sqrt{gh}} &= -\lambda \left\{ \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) - \text{cn}^2 \vartheta \right\} + \frac{5\lambda^2}{12k^4} \left[\left(\frac{E}{K} \right) \left\{ 6 \left(\frac{E}{K} \right) + 8k^2 - 10 \right\} + 3k^4 - 7k^2 + 4 \right] \\ &\quad - \frac{3\lambda^2}{4k^2} (k^2 - 1) \left\{ 1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} - \frac{\lambda^2}{2k^2} \left\{ 5 \left(\frac{E}{K} \right) - k^2 - 2 + 3(2k^2 - 1) \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} \text{cn}^2 \vartheta \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{4} \left\{ 9 \left(\frac{z}{h} \right)^2 - 4 \right\} \text{cn}^4 \vartheta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

式(22)および(23)によれば、水平水粒子速度は一様流に非周期成分の残留速度が加わり、これが Euler 座標での実質的な質量輸送を表わすことがわかる。図-3 は式(20)による水平水粒子速度の鉛直分布を計算した結果であるが、その横軸は波の水平水粒子速度 u/\sqrt{gh} であ

る。これから一様流が順流の場合には、非線型効果はさほど大きくないが、逆流の場合には流速の勾配が著しくなり、水底付近では逆向きの流れが発生する傾向となる。しかし、この傾向は $T\sqrt{g/h}$ の値が大きくなると、顕著でなくなるが、これは波の特性が孤立波に近づくため

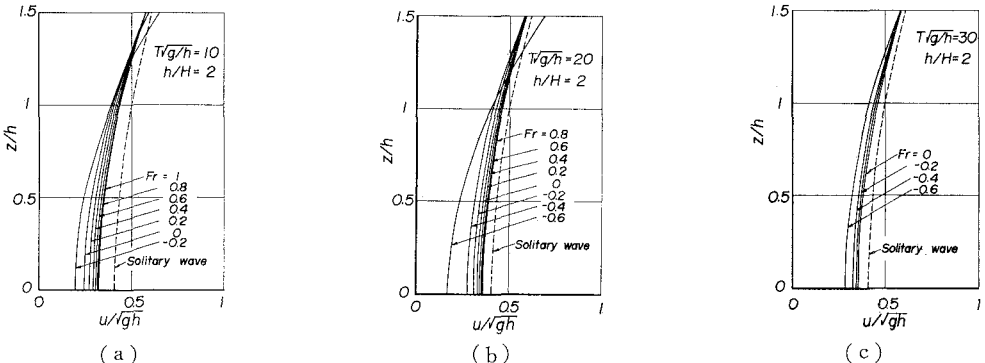


図-3 一様流を伴う有限振幅波の水平水粒子速度の特性

であろう。なお、圧力は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho gh} &= 1 - \zeta + \varepsilon(1 - Fr)\eta_1 + \varepsilon^2 \left[(1 - Fr) \left\{ \eta_2 + \frac{1}{2}(1 - \zeta^2)\eta_{100} \right\} - Fr \left(\frac{1}{2}\eta_1^2 - c_0\eta_1 \right) \right] + 0(\varepsilon^3) \\ &= \frac{1}{h}(h - z) + \lambda(1 - Fr) \left\{ \text{cn}^2\theta - \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\} + \frac{\lambda^2}{4k^4} \left(4 \left(\frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) + 4k^2 - 5 \right\} + 5k^4 - 16k^2 \right. \\ &\quad \left. + 11 + 3(k^2 - 1) \left(\frac{z}{h} \right)^2 - Fr \left[2 \left(\frac{E}{K} \right) \left\{ 4 \left(\frac{E}{K} \right) + 6k^2 - 7 \right\} + 5k^4 - 11k^2 + 6 + 3k^2(1 - k^2) \left\{ 1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} \right] \right) \\ &\quad - \frac{\lambda^2}{2k^2} \left[6 \left(\frac{E}{K} \right) - 2k^2 - 2 + 3(2k^2 - 1) \left(\frac{z}{h} \right)^2 + Fr \left\{ -5 \left(\frac{E}{K} \right) + k^2 + 2 - 3(2k^2 - 1) \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} \right] \text{cn}^2\theta \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{4} \left[9 \left(\frac{z}{h} \right)^2 - 4 - Fr \left\{ 9 \left(\frac{z}{h} \right)^2 - 4 \right\} \right] \text{cn}^4\theta + 0(\lambda^3) \dots \dots \dots (24) \end{aligned}$$

4. 一様流を伴う有限振幅波の質量流束、エネルギーおよびエネルギーフラックス

ここでは、前述したせつ動解を用いて、波の保存量についての計算結果を示し、若干の考察をしよう。

(1) 質量流束 (Mass flux)

質量流束 Q_0 は、次式で表わされる。

$$Q_0 = \int_0^{h+z'} \rho(u+U) dz \dots \dots \dots (25)$$

ここで、式(20)による u についての表示を用いて上式を書き換えれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{Q_0}{\rho h \sqrt{gh}} &= \int_0^{1+\varepsilon\eta} \left[Fr + \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2 \left\{ \eta_2 - c_0\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_1^2 + \frac{1}{2}(1 - \zeta^2)\eta_{100} \right\} + \varepsilon^3 \left\{ \eta_3 + \eta_1\eta_2 - c_0\eta_2 - c_{17}\eta_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}(1 - \zeta^2)\eta_{200} + \frac{1}{24}(\zeta^4 - 6\zeta^2 + 5)\eta_{20000} - \frac{1}{2}(1 - \zeta^2)c_0\eta_{100} + \frac{1}{2}(3 - \zeta^2)\eta_{17100} + \frac{1}{2}(2 - \zeta^2)\eta_{110}^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}\eta_1^3 - \frac{3}{2}c_0\eta_1^2 + c_{17}^2\eta_1 \right\} + 0(\varepsilon^4) \right] d\zeta \\ &= Fr + \varepsilon^2 \left(\frac{3}{2}\eta_1^2 \right) + \varepsilon^3 \left(3\eta_1\eta_2 + \eta_1^3 - \frac{5}{2}c_0\eta_1^2 + \frac{1}{3}\eta_{200} + \frac{2}{15}\eta_{10000} - \frac{1}{3}c_0\eta_{100} + \frac{4}{3}\eta_{17100} + \frac{5}{6}\eta_{110}^2 \right) + 0(\varepsilon^4) \quad (26) \end{aligned}$$

このように、一次形式である Q_0 に関しては、第2次近似解を用いて、 ε^3 のオーダーまで計算できることになり、その結果は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{Q_0}{\rho h \sqrt{gh}} &= Fr + \frac{\lambda^2}{2k^4} \left[- \left(\frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 4 \right\} \right. \\ &\quad \left. + k^2 - 1 \right] - \frac{\lambda^3}{60k^6} \left[-375 \left(\frac{E}{K} \right)^2 \left(\frac{E}{K} \right) \right. \\ &\quad \left. + k^2 - 2 \right] + \left(\frac{E}{K} \right) \left[104k^4 + 661k^2 - 691 \right] \\ &\quad + 168k^6 + 128k^4 - 603k^2 + 307 \quad \left. \right] \\ &\quad + 0(\lambda^4) \dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

ただし、以下に示す波のエネルギーおよびエネルギーフラックスの表示との関係で第2次近似解の範囲で統一する場合には、上式右辺第2項までを採用すべきであろう。

図-4 は式(27)の右辺第2項までを用いて計算した Mass flux の関係を示す。この場合にも前述した波速や水粒子速度と同じく一様流の Fr の影響が現われるが、 $T\sqrt{g/h}$ の値が大きいかほどその影響が著しくなり、波速などの傾向と相違する。

(2) 波のエネルギーおよびエネルギーフラックス

次に、波の位置エネルギー E_p は、

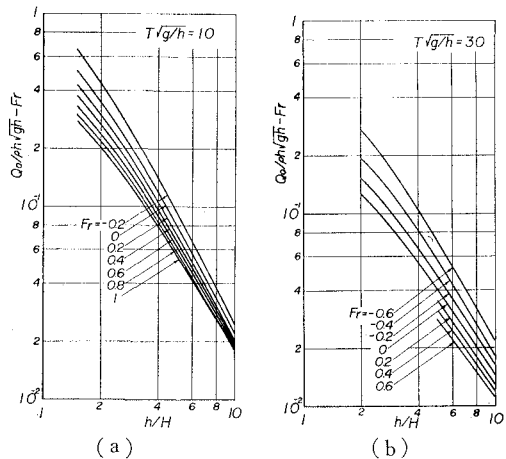


図-4 一様流を伴う有限振幅波の Mass flux の特性

$$E_p = \int_h^{h+z'} \rho g(z-h) dz \dots \dots \dots (28)$$

で表わされるので、(1)の場合と同様に変形すれば、次式が得られる。

$$\frac{E_p}{\rho gh^2} = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2}\eta_1^2 \right) + \varepsilon^3(\eta_1\eta_2) + 0(\varepsilon^4) \dots \dots \dots (29)$$

これから、 (H/h) のオーダーまで表示できて次式が得ら

れる。

$$\frac{E_p}{\rho g H^2} = \frac{\lambda^2}{6k^4} \left(\frac{h}{H}\right)^2 \left[-\left(\frac{E}{K}\right) \left\{ 3\left(\frac{E}{K}\right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] + \frac{\lambda^3}{30k^6} \left(\frac{h}{H}\right)^2 \left\{ 90\left(\frac{E}{K}\right)^2 \left(\frac{E}{K} + k^2 - 2\right) + \left(\frac{E}{K}\right) (22k^4 - 112k^2 + 112) - 11k^4 + 33k^2 - 22 \right\} + 0 \left\{ \lambda^4 \left(\frac{h}{H}\right)^2 \right\} \quad (30)$$

また、運動エネルギー E_K は、

$$E_K = \int_0^{h+z'} (\rho/2) \{ (u+U)^2 + w^2 \} dz \quad \dots\dots\dots (31)$$

で表わされるので、同様な計算によって次式のように変形することができる。

$$\begin{aligned} \frac{E_K}{\rho g h^2} &= \frac{1}{2} \int_0^{1+\varepsilon\eta} \left(F_r^2 + \varepsilon(2F_r\eta_1) + \varepsilon^2 \left[\eta_1^2 + 2F_r \left\{ \eta_2 - c_0\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_1^2 + \frac{1}{2}(1-\zeta^2)\eta_{1\sigma\sigma} \right\} \right] + \varepsilon^3 \left[2\eta_1\eta_2 + 2\eta_1^3 - 2c_0\eta_1^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{3}\eta_1\eta_{1\sigma\sigma} + \frac{1}{3}\eta_{1\sigma}^2 + 2F_r \left\{ \eta_3 + \eta_1\eta_2 - c_0\eta_2 - c_1\eta_1 + \frac{1}{2}(1-\zeta^2)\eta_{2\sigma\sigma} + \frac{1}{24}(\zeta^4 - 6\zeta^2 + 5)\eta_{1\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{2}(1-\zeta^2)c_0\eta_{1\sigma\sigma} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}(3-\zeta^2)\eta_1\eta_{1\sigma\sigma} + \frac{1}{2}(2-\zeta^2)\eta_{1\sigma}^2 + \frac{1}{2}\eta_1^3 - \frac{3}{2}c_0\eta_1^2 + c_2^2\eta_1 \right\} \right] + 0(\varepsilon^4) \Big) d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \left[F_r^2 + \varepsilon^2 \{ (1+3F_r)\eta_1^2 \} + \varepsilon^3 \left\{ 2\eta_1\eta_2 + 2\eta_1^3 - 2c_0\eta_1^2 + \frac{2}{3}\eta_1\eta_{1\sigma\sigma} + \frac{1}{3}\eta_{1\sigma}^2 + F_r \left(6\eta_1\eta_2 + 2\eta_1^3 - 5c_0\eta_1^2 + \frac{2}{3}\eta_{2\sigma\sigma} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{4}{15}\eta_{1\sigma\sigma\sigma} + \frac{8}{3}\eta_1\eta_{1\sigma\sigma} + \frac{5}{3}\eta_{1\sigma}^2 \right\} \right] + 0(\varepsilon^4) \quad \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{E_K}{\rho g H^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{h}{H}\right)^2 F_r^2 + \frac{\lambda^2}{6k^4} \left(\frac{h}{H}\right)^2 (1+3F_r) \left[-\left(\frac{E}{K}\right) \left\{ 3\left(\frac{E}{K}\right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] - \frac{\lambda^3}{60k^6} \left(\frac{h}{H}\right)^2 \\ &\quad \times \left(2 \left[15\left(\frac{E}{K}\right)^2 \left\{ 7\left(\frac{E}{K}\right) + 11k^2 - 18 \right\} - \left(\frac{E}{K}\right) (36k^4 - 199k^2 + 199) + 47k^4 - 111k^2 + 64 \right] \right. \\ &\quad \left. - F_r \left\{ -375\left(\frac{E}{K}\right)^2 \left(\frac{E}{K} + k^2 - 2\right) + \left(\frac{E}{K}\right) (104k^4 + 661k^2 - 691) + 168k^6 + 128k^4 - 603k^2 + 307 \right\} \right) \\ &\quad + 0 \left\{ \lambda^4 \left(\frac{h}{H}\right)^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

次に、エネルギーフラックス W は、

$$W = - \int_0^{h+z'} \rho \phi_t (\phi_\sigma + U) dz \quad \dots\dots\dots (34)$$

で表わされるので、同様な計算の結果、次式ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{W}{\rho g h^2 \sqrt{gh}} &= \int_0^{1+\varepsilon\eta} \left(\varepsilon(1+F_r)\eta_1 + \varepsilon^2 \left[\eta_1^2 + F_r \left\{ \eta_2 + \frac{1}{2}\eta_1^2 + \frac{1}{2}(1-\zeta^2)\eta_{1\sigma\sigma} \right\} \right] + \varepsilon^3 \left[2\eta_1\eta_2 + \eta_1^3 - 2c_0\eta_1^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1-\zeta^2)\eta_1\eta_{1\sigma\sigma} + c_0\eta_1^2 + F_r \left\{ \eta_3 + \eta_1\eta_2 + \frac{1}{2}(1-\zeta^2)\eta_{2\sigma\sigma} + \frac{1}{24}(\zeta^4 - 6\zeta^2 + 5)\eta_{1\sigma\sigma\sigma} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}(3-\zeta^2)\eta_1\eta_{1\sigma\sigma} + \frac{1}{2}(2-\zeta^2)\eta_{1\sigma}^2 + \frac{1}{2}\eta_1^3 - \frac{1}{2}c_0\eta_1^2 \right\} \right] + 0(\varepsilon^4) \Big) d\zeta \\ &= \varepsilon^2 \left(1 + \frac{3}{2}F_r \right) \eta_1^2 + \varepsilon^3 \left[2\eta_1\eta_2 + \eta_1^3 - 2c_0\eta_1^2 + \frac{2}{3}\eta_1\eta_{1\sigma\sigma} + c_0\eta_1^2 + F_r \left\{ \eta_1\eta_2 + \frac{1}{3}\eta_{2\sigma\sigma} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{15}\eta_{1\sigma\sigma\sigma} + \frac{4}{3}\eta_1\eta_{1\sigma\sigma} + \frac{5}{6}\eta_{1\sigma}^2 + \frac{1}{2}\eta_1^3 - \frac{1}{2}c_0\eta_1^2 \right\} \right] + 0(\varepsilon^4) \quad \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

したがって、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{W}{\rho g H^2 \sqrt{gh}} &= \frac{\lambda^2}{6k^4} \left(\frac{h}{H}\right)^2 (2+3F_r) \left[-\left(\frac{E}{K}\right) \left\{ 3\left(\frac{E}{K}\right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] + \frac{\lambda^3}{60k^6} \left(\frac{h}{H}\right)^2 \left(2 \left[-15\left(\frac{E}{K}\right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left\{ 17\left(\frac{E}{K}\right) + 31k^2 - 38 \right\} + \left(\frac{E}{K}\right) (104k^4 + 179k^2 - 389) - 45k^6 + 142k^4 - 201k^2 + 104 \right] \right. \\ &\quad \left. + F_r \left[-510\left(\frac{E}{K}\right)^2 \left\{ \left(\frac{E}{K}\right) + k^2 - 2 \right\} + \left(\frac{E}{K}\right) (74k^4 + 862k^2 - 856) + 186k^6 + 143k^4 - 648k^2 + 337 \right] \right) \\ &\quad + 0 \left\{ \lambda^4 \left(\frac{h}{H}\right)^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

5. 結 語

以上、一様流を伴う有限振幅波理論を試み、その特性を一様流の Froude 数を導入した一般的な表示で示した。その結果、波速および水平水粒子速度に及ぼす Froude 数 F_r の影響は、 $T\sqrt{g/h}$ の値が小さくなると著しくなるが、 $F_r \rightarrow \infty$ においては孤立波の関係に収束し、波と流れの直接的な相互干渉は起こらないことを示すとともに、一様流が逆流の場合には波の峯付近の水粒子速度が増大して定形波として存在しなくなる傾向になることが見出された。

ついで、一様流を伴う有限振幅波の保存量についての表示を導くとともに、特に Mass flux に及ぼす Froude 数の影響を明らかにすることができた。

最後に、図面の作製に熱心にご協力いただいた芝野照夫助手に厚く謝意を表明したい。

参 考 文 献

- 1) Yu, Yi-Yuan: Breaking of Waves by an Opposing Current, Trans. A.G.U., Vol. 33, No. 1, 1952, pp. 39-41.
- 2) Sarpkaya, T.: Oscillatory Gravity Waves in Flowing Water, Trans. A.S.C.E., No. 2873, 1955, pp. 564-586.
- 3) Yih, Chia-Shun: Surface Waves in Flowing Water, Jour. Fluid Mech., Vol. 51, 1972, pp. 209-220.
- 4) Longuet-Higgins, M.S. and R.W. Stewart: Changes in the Form of Short Gravity Waves on Long Waves and Tidal Currents, Jour. Fluid Mech., Vol. 9, 1960, pp. 565-583.
- 5) 土屋義人・安田孝志: 新しいクノイド波理論の試み, 第21回海岸工学講演会論文集, 1974, pp. 65-71.