

二層流境界面の抵抗係数に関する一考察

玉 井 信 行*

1. はじめに

二層流境界面の抵抗係数に関しては、塩水楔の侵入長さ、境界面形状を決定する重要な因子として、従来も数種の提案がされてきた。理論的取扱いの代表的なものは、Keulegan¹⁾に始まる非粘性解に基づいて内部波のエネルギー逸散を考えるものと、Rayleigh-Taylor 型の不安定理論の粘性解を応用した浜田²⁾の議論がある。しかし、非粘性解は界面における速度の不連続性、また Rayleigh-Taylor 型の不安定解においては主流が存在しない点に物理現象との大きな差異があり、両者共に未だ充分満足できる段階には達しておらず、これを融合することが実際の現象により即した解析であろう。水理委員会密度流研究小委員会の活動を通じて、上述の点についての進展を図りたい、と考えたのがこのような研究を試みた動機である。本論文においては、主流を主要解と摂動解に分割して考え、摂動解においては粘性の影響を考慮して界面に沿う粘性境界層の解を求め、それに基づいて境界面の抵抗係数を理論的に導いた。

2. 理論的考察

通常の流れを問題とするならば、流れとしてのモードは層流と乱流の二つとなるが、二層流の場合には多くの研究者によって指摘されているように、内部波が中間のモードとして存在する。抵抗係数に関して言えば、層流の場合には理論的な記述が可能であり、一例として嶋・椎貝・玉井³⁾のものを挙げる。また、乱れが発達して乱流拡散が大きくなり、境界面が完全に攪乱されるような場合には二層流とは異なる取り扱いが必要となる。この中間の状態として考えられるのが、境界面に内部波が生ずる場合である。内部波は規則的であり、この状態はいわゆる層流でもなく、乱流でもない、と考えられる。

さらに、内部波が中間のモードになっているとすれば、乱れ自体は存在してもかなり弱いものである。これは境界面付近には密度勾配が存在し、それが乱れを抑制する故である。境界面付近では密度勾配が大きく、Richardson 数が安定領域に属していれば、上層流の Reynolds 数が大きくても境界面付近では乱れは発達していない、と考えるのが適当である。そこで、境界面に安定な内部

波が発生している場合には、エネルギー逸散は粘性によって支配されていると考える。

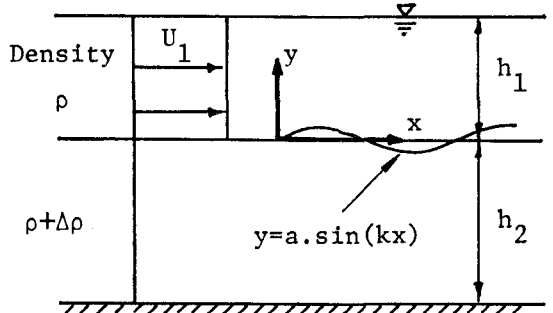


図-1 二層流系の模式図

考察の対象は二次元的な二層流とし、基礎式は境界面内部波に沿う曲線座標系に対して誘導する。記号を図-1のごとく定める。座標系 (x, y) は内部波速 c とともに進行する移動座標系とする。この (x, y) 平面を次の等角写像を用いて曲線座標系 (ξ, η) 面に写像する。

$$\zeta = \xi + i\eta = z - ia e^{ikx}, \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $z = x + iy$ である。式 (1) より

$$\xi = x + a e^{-ky} \sin kx, \quad \eta = y - a e^{-ky} \cos kx, \quad (2)$$

となり、変換の Jacobian は次式となる。

$$J = 1 + 2ake^{-ky} \cos kx + O(a^2), \dots\dots\dots (3)$$

境界面は、 a^2 のオーダーを無視すれば $\eta = 0$ とかける。

$\mathbf{u} = (u, v)$ を変換された移動座標系における速度ベクトルとし、速度は ξ, η の増加する方向に正とする。運動方程式より圧力項を消去した渦度の方程式は

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} - \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \wedge \nabla p \dots\dots\dots (4)$$

であり、 $\boldsymbol{\omega}$ は渦度ベクトル、 ∇ は gradient operator、 $\cdot$ は内積、 $\wedge$ はベクトル積を示す。非圧縮性流体の連続式は

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \dots\dots\dots (5)$$

であり、密度変化が存在する場合にも volume flux としては近似的に式 (5) を用いる。密度効果を考慮する必要のある場合は、この他に buoyancy flux に関する平衡則を用いればよい。変換は等角であるから、線素 ds の新座標系における表示は、 $ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2$ である。したがって連続式は、

* 正会員 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科

$$J \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (J^{-1/2} u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J^{-1/2} v) \right] = 0, \dots\dots\dots (6)$$

であり、これは次式で定義される流れ関数により満たされる。

$$u = J^{1/2} \frac{\partial X}{\partial \eta}, \quad v = -J^{1/2} \frac{\partial X}{\partial \xi} \dots\dots\dots (7)$$

二次元の問題においては、渦度ベクトルは $\xi-\eta$ 平面に垂直な一成分のみであり、 $|\omega| = \omega$ と書いてスカラー的な取扱いが可能である。二次元問題では、式 (4) の左辺第 2 項は消失し、式 (4) は次式となる。

$$-\frac{\partial(X, J D^2 X)}{\partial(\xi, \eta)} = \nu D^2 (J D^2 X) + D \left(\frac{1}{\rho} \right) \wedge D p, \dots\dots\dots (8)$$

$$\text{ここに,} \quad \omega = -J D^2 X, \quad D^2 = \partial^2 / \partial \xi^2 + \partial^2 / \partial \eta^2, \\ D = \partial / \partial \xi + \partial / \partial \eta$$

である。

この方程式の第零次解 ω_0 は $J=1$ の場合で、内部境界面が非常に平滑な場合に相当する。また密度は上下両層で不連続であると考えれば、境界面が平滑に近い場合には、 $D(1/\rho)$ と Dp とは同一方向のベクトルとなり式 (8) の右辺第 2 項は消失する。したがって、 ω_0 を求めるのは (x, y) 座標系の問題に帰着する。下層が停止している場合には、基礎式は結局次式となる。

$$(U_1 - c) \frac{\partial \omega_0}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 U_1 は上層流速、 c は内部波速である。上層流れは大局的には非粘性のよう流れと考えられ、粘性の及ぶ範囲は局限され、粘性は上層全体に対しては副次的な役割を果たしていると考えている。したがって、境界層厚さは内部波の波長に比し小で、 $\partial^2 / \partial y^2 \gg \partial^2 / \partial x^2$ であり、

$$(U_1 - c) \frac{\partial \omega_0}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2}, \dots\dots\dots (10)$$

が渦度の満足すべき基礎式と考えられる。

速度 u は、非粘性解 U と粘性による摂動項 u' の和で表現する。

$$u = U + u' = -\nabla \phi + u', \dots\dots\dots (11)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -(U_1 - c)x + \frac{(U_1 - c)a}{\sinh kh_1} \\ &\quad \times \cosh k(y - h_1) \cdot \cos kx, \\ U &= -\phi_x = U_1 - c + \frac{(U_1 - c)ak}{\sinh kh_1} \\ &\quad \times \cosh k(y - h_1) \sin kx. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

境界面での流速は、 $y=0$ において $u = U_1 - c$ であれば粘性流の条件を満たすから

$$u' = -(U_1 - c)ak \coth kh_1 \cdot \sin kx, \quad y=0 \quad (13)$$

したがって、解は $y=0$ において式 (13) を満たし、 $y = +\infty$ では消失するような ω_0 、ひいては u' を見出せばよい。境界層厚が微小であれば $\omega_0 \approx -\partial u' / \partial y$ と考えられ、式 (10) を書き直すと

$$(U_1 - c) \frac{\partial u'}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}, \dots\dots\dots (14)$$

式 (13) を考慮して

$$u' = -(U_1 - c)ak \coth kh_1 e^{-\beta y} \sin(kx + \beta y)$$

とおく。式 (14) を満足する β は

$$\beta^2 = \frac{(c - U_1)k}{2\nu}, \dots\dots\dots (15)$$

β が実数で求まるためには、 c が U_1 より大きくなければならない。流れの方向へ伝播する内部波はこの条件を満たすが、波長に対応して条件を求めておく次のようになる。下層は停止し、上下層の密度差が微小な場合には、 $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, $g' \equiv g \cdot \Delta\rho / \rho_1$ と書くと $c > U_1$ の条件は

$$\frac{g'}{k} > U_1^2 \coth kh_2.$$

(i) 長波性の波に対しては $\coth kh_2 \approx 1/kh_2$ であるから

$$\frac{1}{F_i^2} \frac{h_2}{h_1} > 1, \dots\dots\dots (16)$$

となる。 $F_i = U_1 / \sqrt{g' h_1}$ は密度フルード数である。塩水くさびなどの現象では $F_i < 1$ であり、下層水深の方が大きいから式 (16) は通常満足される。

(ii) 波長が短い場合には $\coth kh_2 \approx 1$ であって

$$\lambda > 2\pi h_1 \cdot F_i^2, \dots\dots\dots (17)$$

となる。ここに、 λ は波長であり、安定な波長には最小値があることを示す。したがって、式 (16), (17) に示されるごとく、実数の β を与える場合が存在するので、願意に適する

$$\beta = [(c - U_1)k / 2\nu]^{1/2}, \dots\dots\dots (18)$$

の場合につき考察を進める。この結果より

$$\omega_0 = \beta(c - U_1)ak \coth kh_1 e^{-\beta y} \{ \sin(kx + \beta y) - \cos(kx + \beta y) \}, \dots\dots\dots (19)$$

ここでは底面が固体壁である場合と同様に、境界層は上層流れのもののみを考えている。下層は静止し、かつ密度分布が不連続であり、内部波面が非常に平滑な零次解においてはこうした取扱も近似的に成立するものと考えている。波面状の固体壁に沿う流れでは、第一次解が求められているが、内部境界面においては密度分布の要因を表現するのに不明な点が多いので、現状では摂動項に粘性の影響を考慮するという第一段階までしか解析が進んでいない。しかし、基本式 (10) は 0 次のオーダーであるが、境界条件としては $O(a)$ までの影響を取り入れていると言えるであろう。

現在の考察では、エネルギー逸散は内部境界層で生じ、式(19)に示される渦度がその大きさを決める。

$$\dot{E} = -\mu \int_0^\delta \omega_0^2 dy,$$

ここに δ は境界層の厚さであり、上付きのバーは一波長についての平均を示す。

$$\overline{\omega_0^2} = \beta^2 (c - U_1)^2 a^2 k^2 \coth^2 kh_1 \cdot e^{-2\beta y}, \dots\dots (20)$$

であるから

$$\dot{E} = -\frac{1}{2} \mu \beta (c - U_1)^2 a^2 k^2 \coth^2 kh_1 \cdot \dots\dots (21)$$

せん断応力は $|\dot{E}|/c$ で与えられるから、抵抗係数 f の定義と結びつけると

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}} R_e^{-1/2} \frac{\sqrt{U_1(c-U_1)}}{c} \left(\frac{c}{U_1} - 1 \right)^2 \sqrt{k h_1} \times a^2 k^2 \coth^2 kh_1 \cdot \dots\dots (22)$$

式(22)より f は上層のレイノルズ数 $R_e = U_1 h_1 / \nu$ の平方根に逆比例することが解るが、密度フルード数への依存度は $U_1/c = F$ の形が定まらないと決定できない。内部波速は内部波の特性により分類できるので、それぞれの場合に対してもう少し簡単な形を求めておこう。

長波性の場合には F は次式で与えられる。

$$\frac{1}{F} = \frac{c}{U_1} = \frac{h_2 + \sqrt{h_2(h_1 + h_2)}/Fi^2 - h_1 h_2}{h_1 + h_2}.$$

(i) $h_2 \gg h_1$ の場合には、式(22)は次のようになる。

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{1 + F_i} (R_e \cdot Fi^3)^{-1/2} (ak)^2 (kh_1)^{-3/2}. \quad (23)$$

(ii) $h_2 \simeq h_1$ の場合には次式のようになる。

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}} R_e^{-1/2} F^{1/2} (1 - F)^{1/2} \left(\frac{1}{F} - 1 \right)^2 \times (ak)^2 (kh_1)^{-3/2}, \dots\dots (24)$$

ここに $F = Fi(\sqrt{2 - Fi^2} - Fi)/(1 - Fi^2)$ 。

波長が短い場合にも式(17)の条件が満足されれば、式(22)が適用できると考えられる。波長が短い場合には、 $\coth kh_1 \simeq \coth kh_2 \simeq 1$ であるから

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \sqrt{\frac{\lambda g'}{\pi U_1^2} - 1} \right].$$

この場合に条件を満たす最も短い波では $\lambda = 2\pi h_1 Fi^2$ であるから $1/F = 0$ または 1 となる。 $F = 1$ ではエネルギー逸散がなくなり、また $F = \infty$ は内部波が進行しない場合に相当し、いずれも通常観測される現象ではなくなる。

3. 観測結果の整理および考察

理論の項で得られた結果を参考にして、従来得られている結果を再整理してみる。式(22)の結果より、境界面の抵抗係数の値は内部波自身の特性に左右されることが

わかる。室内実験、現地観測ともにそうした内部波の特性(波高、波長、波速)には言及していないので、どのような整理方法をとっても値は相当散乱することが予測される。しかし、現地の資料では下層水深の方が大きいであろうことと、また $Fi \ll 1$ の場合には式(24)の形式は式(23)に一致することを考慮して、式(23)を基に考察を進める。前述したように波の性質自身については不明確な点が多いので、 ak とか kh_1 の値は仮に等しいと考えれば、 $(1 + Fi)f$ と $(Re \cdot Fi^3)^{-1/2}$ とが比例関係にあることになる。従来用いられてきた形式は、 f を $\Psi \equiv Re \cdot Fi^2$ の関数で表現することであった。

図-2 に $(1 + Fi)f$ と $Re \cdot Fi^3$ との関係が両対数紙上に示されている。筆者の実験⁹⁾は、幅 15 cm、長さ 420 cm 勾配 1.27/100 の水路に生じた定常な塩水楔の観測より得られたものである。塩水層の厚さを数値積分より求め、観測された内部境界面の形状に最もよく適合する抵抗係数の値を算出している。上層水深は楔侵入長の中間点における値を用いた。Lofquist の実験⁹⁾は幅 23.3 cm、長さ 30 m の水平水路で行われ、静止した上層水の下部を塩水が運動する形式である。界面での水路幅平均のせん断応力は、界面の勾配、壁面応力、速度変化から算出された。摩擦抵抗係数は最大流速に関して与えてあるが、換算は可能である。中村・阿部⁹⁾は九頭竜川で行った実測の結果を発表している。抵抗係数の算定法は浜田・堀口⁷⁾の方法を川幅が変化する場合に拡張して、測定地点における f の値を求めた。須賀・高橋⁹⁾は利根川における実測および幅 0.80 m、長さ 100 m あるいは幅 0.30 m、長さ 30 m の二種の水路での実験結果を発表している。抵抗係数の算定方法は浜田らの方法によっている。従来、Lofquist の結果は Valembois により数例について紹介されていたが、発表されているすべての結果を表示すると、図-2 の左下にみられる一群の特異な結果が含まれていることがわかる。また、中村ら⁹⁾による神通川、金子¹⁰⁾による伏木港の実測結果もあるが、発表されている資料では Ψ の値のみであり、 Re 、 Fi のそれぞれの値が不明であるので記載できなかった。しかし、従来の f vs. Ψ の関係図において、これらの観測値は九頭竜川の資料とほぼ同一領域にあり、九頭竜川の資料でほぼ代表できると考えられる。

図-2 の横軸は $\Psi \cdot Fi$ であるので、図-2 は従来の Ψ による整理と比べて大幅な変化はない。しかしながら、 Re 数の最も大きな領域にある利根川における抵抗係数の値はほぼ $\Psi^{-6/5}$ に比例しており、勾配が急であったものが多少修正され、全体としては本論文の指標の方がまとまりがよいように思われる。図-2 に引かれた実線は

$$(1 + Fi)f = 0.32 (Re \cdot Fi^3)^{-1/2} \dots\dots (25)$$

の関係を示している。また、Lofquist の実験結果は全体として Re 数、 Fi 数が変化してもほぼ一定の抵抗係数

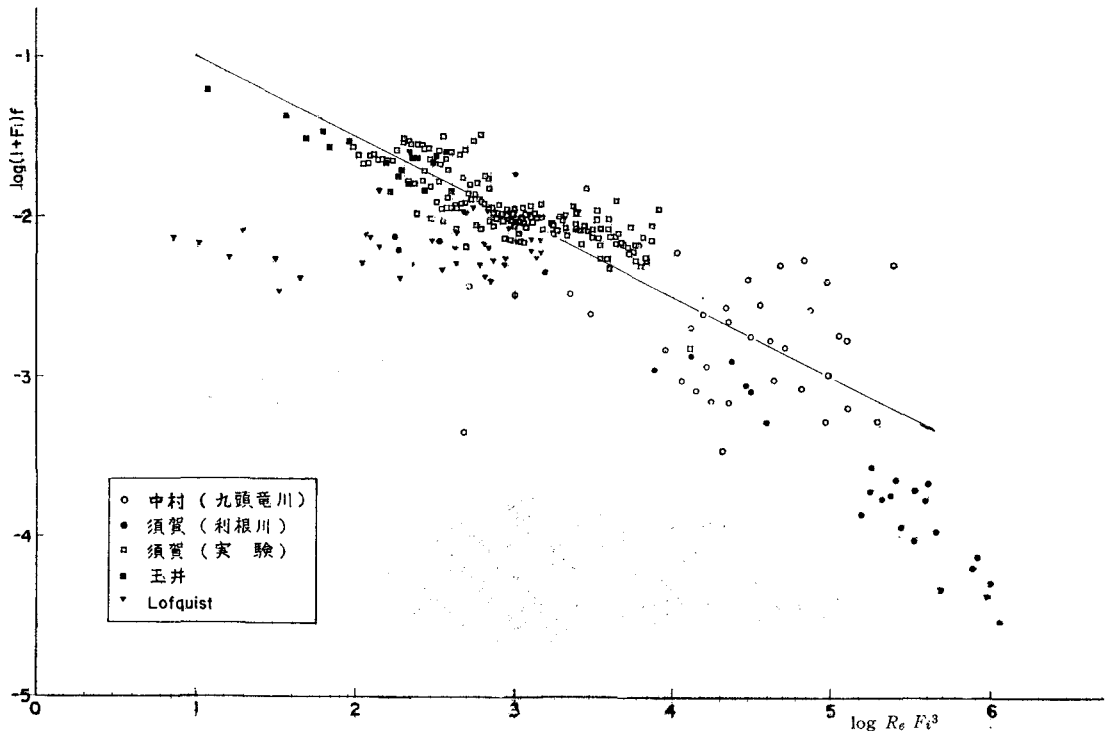


図-2 界面抵抗係数

値を与えているが、この原因は不明である。図-2の左下の一群のデータは Lofquist の実験の中では F_i の値が一桁小さく、 10^{-2} のオーダーで行われた結果である。両対数紙上で勾配はほぼ $-1/2$ で、係数値が異なる関係にある。しかし、 f が $(1+F_i)^{-1} \cdot (Re \cdot F_i^3)^{-1/2}$ に比例するとしても、その比例定数の詳細な動向については現段階では確定的なことは言えない。

4. まとめ

内部波が存在する場合の境界面付近の流れにつき、最も簡単な場合を考察した。摂動項により粘性の効果を考慮して界面の抵抗係数を求めた。それを参考にして従来の結果を再整理すると、界面の抵抗係数 f は $(1+F_i)^{-1} \cdot (Re \cdot F_i^3)^{-1/2}$ に比例すると考えた方が Ψ をパラメータとするよりやや良好な結果を与える。

本稿を閉じるに当たり、下記の方々には特にお世話になったことを記し、深く謝意を表わしたい。

水理委員会密度流研究小委員会委員長 東北大学 岩崎敏夫教授にはその活動を通して多くの示唆を与えて頂いた。また、電力中央研究所 中村宏氏、土木研究所 須賀堯三氏よりは実測、実験の細部の結果を提供して頂き、資料の再整理が可能となった。結果の整理、図の作成は東京大学水工実験室 廣沢佑甫氏による。

参考文献

- 1) Keulegan, G. H.: "Interfacial instability and mixing in stratified flows," Jour. of Research, Nat. Bureau of Standard, Vol. 43, pp. 487-500, 1949.
- 2) 浜田徳一:「密度流の問題(1)」, 第13回海岸工学講演会講演集, 土木学会, pp. 259-262, 1966.
- 3) 嶋祐之・椎貝博美・玉井信行:「河床勾配のある場合の塩水楔について」, 第19回年次学術講演会, 土木学会, II-71, 1964.
- 4) 玉井信行:「河口密度流の研究」, 東京大学卒業論文, 1964.
- 5) Lofquist, K.: "Flow and stress near an interface between stratified liquids," The Physics of Fluids, Vol. 3, No. 2, pp. 158-175, 1960.
- 6) 中村 宏・阿部宣行:「九頭竜川河口塩水くさびの研究」, 電力中央研究所技術第二研究所報告, No. 70519, 1970.
- 7) 浜田徳一・堀口孝男:「塩水楔の性質について」, 第7回海岸工学講演会講演集, 土木学会, pp. 163-171, 1960.
- 8) 須賀堯三・高橋 晃:「塩水くさびに関する大型水路実験による二・三の考察」, 第26回年次学術講演会, 土木学会, pp. 137-140, 1971.
- 9) 中村 宏・稲松敏夫:「神通川河口の塩水くさびについて」, 第13回海岸工学講演会講演集, 土木学会, pp. 295-301, 1966.
- 10) 金子安雄:「2層流境界面抵抗係数の一例」, 第13回海岸工学講演会講演集, 土木学会, pp. 263-267, 1966.