

非定常拡散方程式の数値解法

——沈降速度を考えた鉛直拡散——

大 西 亮 *

1. 序 論

波による拡散は、漂砂¹⁾や海底漁場からの物質の浮上りに対して^{2),3)}、重要な問題といえる。また、潮流による沈降性物質の輸送は、単に拡散係数^{16),17)}を論ずる問題として解決できないと考えられる⁴⁾⁻⁶⁾。そこで、筆者らはこの問題を非定常拡散の問題と考え、前回は乱れの定義と測定方法について報告した^{7),8)}。今回は数値積分法について検討した結果を報告する。

これまで波による砂の浮遊は漂砂の問題として多くの研究成果があるが^{1),9)-11)}、これらは時間平均濃度を対象としているために、定常流が存在しない場合の砂の輸送は説明することができない。これに対して Postoma⁶⁾は浮遊濃度の時間的変化を念頭において、往復運動による底質の移動を図式的に示し、Wadden zee における微細粒子が湾奥に集まる現象を説明した。同様の現象は有明海にも見られる^{4),5)}。また服部¹¹⁾は定常波による底質の浮遊濃度を測定し、時間平均濃度は節で小さく、腹へ行くにしたがって大きくなることを示した。この現象を服部は拡散係数は一定として、浮遊粒子と水粒子の運動の遅れを入れた解析解で説明している。しかしながら筆者ら^{7),12)}が測定した波動運動下の粗底上の乱流構造はたしかに時間変化している。このために、場所的、時間的に拡散係数がどのように変化すれば服部の実測値を説明することができるであろうか。また、2次流の影響はどうであろうか。という疑問が生ずる。この問題は理論解析が必要であるが、境界条件が複雑であるので数値解析によって検討を加えた。その結果を報告する。

2. 計算方法

(1) 基礎式の無次元化

沈降（または浮上）する物質の鉛直拡散は、座標を時間 t 、水平方向 x 、鉛直方向 z （上向きに正）とすれば次式で表わされる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + (w + w_s) \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) \quad (1)$$

ここに、 c : 濃度、 u, w, x, z 方向の流速、 w_s : 沈降

（または浮上）速度、 κ_x, κ_z : x, z 方向の拡散係数である。

式 (1) を最大濃度 c_0 、波の周期 T 、波長 L 、波速 $c_w (=L/T)$ で無次元化すれば

$$\frac{\partial c'}{\partial t'} - u' \frac{\partial c'}{\partial x'} + (w' + w'_s) \frac{\partial c'}{\partial z'} = \left(\kappa'_x \frac{\partial c'}{\partial x'} \right) + \frac{\partial}{\partial z'} \left(\kappa'_z \frac{\partial c'}{\partial z'} \right) \quad (2)$$

となる。ここに

$$\left. \begin{aligned} c' &= c/c_0, \quad t' = t/T, \quad x' = x/L \\ z' &= z/L, \quad u' = u/c_w, \quad w' = w/c_w, \\ w'_s &= w_s/c_w, \quad \kappa'_x = T \cdot \kappa_x / L^2, \quad \kappa'_z = T \cdot \kappa_z / L^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

である。

(2) 基礎式の差分化^{13),14)}

差分間隔は

t 軸に沿って $\Delta t_0, \Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$

x 軸に沿って $\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i$

z 軸に沿って $\Delta z_0, \Delta z_1, \Delta z_2, \dots, \Delta z_j$

とする。

u, w, κ_x, κ_z は $u(i, j, n), w(i, j, n), \kappa_x(i, j, n), \kappa_z(i, j, n)$ とする。 $\kappa_x(i, j+1/2, n)$ は点 (i, j, n) と $(i, j+1, n)$ の中間点の κ_x を表す。差分方程式は前進型と連立型があり、前者は差分間隔を考えなければ発散する。

すなわち

$$r = \frac{\Delta t \cdot \kappa_z^2}{(\Delta z)^2} \leq \frac{1}{6} \quad (4)$$

が必要である。後者は差分間隔に関係なく解くことができるが、既知量の中に $(n+1)$ の項を含むので反復法、弛緩法を用いたり、格子点数の少ない場合は逆行列を求めて解くことができる。ここでは前進型と連立型を併用する差分方程式によって計算する。

前進型の差分は

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{c(i, j, n+1) - c(i, j, n)}{\Delta t_n} \quad (5)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{c(i+1, j, n) - c(i, j, n)}{\Delta x_i} \quad (6)$$

$$\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{c(i, j+1, n) - c(i, j, n)}{\Delta z_j} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} u(i+1/2, j, n) \\ w(i, j+1/2, n) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

* 正会員 農林省農業土木試験場

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa_z \frac{\partial c}{\partial z}\right) &= \frac{\partial}{\partial z}(\kappa_z \cdot c_z) \\ &= \frac{2}{\Delta z_j + \Delta z_{j-1}} \left\{ \kappa_z(i, j+1/2; n) \right. \\ &\quad \times \frac{c_{i,j+1}^{(n)} - c_{i,j}^{(n)}}{\Delta z_j} - \kappa_z(i, j-1/2; n) \\ &\quad \times \frac{c_{i,j}^{(n)} - c_{i,j-1}^{(n)}}{\Delta z_{j-1}} \left. \right\} \dots\dots\dots (9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa_x \frac{\partial c}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}(\kappa_x \cdot c_x) \\ &= \frac{2}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \left\{ \kappa_x(i+1/2, j; n) \right. \\ &\quad \times \frac{c_{i+1,j}^{(n)} - c_{i,j}^{(n)}}{\Delta x_i} - \kappa_x(i-1/2, j, n) \\ &\quad \times \frac{c_{i,j}^{(n)} - c_{i-1,j}^{(n)}}{\Delta x_{i-1}} \left. \right\} \dots\dots\dots (10)\end{aligned}$$

ここに、 $c_{i,j}^{(n)} = c(i, j; n)$ である。

となる。式(2)に式(5)~(10)を代入して $c_{i,j}^{(n+1)}$ について解けば前進型の差分式となる。

連立型の差分は

$$\left(\frac{\partial c}{\partial z}\right)_{i,j+1} = \frac{1}{4\Delta z_i} \{ (c_{i,j+1}^{(n+1)} + c_{i,j+1}^{(n)}) - (c_{i,j-1}^{(n+1)} + c_{i,j-1}^{(n)}) \} \dots\dots\dots (11)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial z}\left(\kappa_z \frac{\partial c}{\partial z}\right) &= \frac{1}{\Delta z_j + \Delta z_{j-1}} \left[\frac{\kappa_z(i, j+1/2; n+1/2)}{\Delta z_j} \right. \\ &\quad \times \{ (c_{i,j+1}^{(n+1)} + c_{i,j+1}^{(n)}) - (c_{i,j-1}^{(n+1)} + c_{i,j-1}^{(n)}) \} \\ &\quad - \frac{\kappa_z(i, j+1/2; n+1/2)}{\Delta z_{j-1}} \{ (c_{i,j}^{(n+1)}) \\ &\quad + c_{i,j}^{(n)} \} - (c_{i,j+1}^{(n+1)} + c_{i,j}^{(n)}) \left. \right] \dots\dots\dots (12)\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_{i+1,j} = \frac{1}{4\Delta x_i} \{ (c_{i+1,j}^{(n+1)} + c_{i+1,j}^{(n)}) - (c_{i-1,j}^{(n+1)} + c_{i-1,j}^{(n)}) \} \dots\dots\dots (13)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa_x \frac{\partial c}{\partial x}\right) &= \frac{1}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \left[\frac{\kappa_x(i+1/2, j; n+1/2)}{\Delta x_i} \right. \\ &\quad \times \{ (c_{i+1,j}^{(n+1)} + c_{i+1,j}^{(n)}) - (c_{i-1,j}^{(n+1)} + c_{i-1,j}^{(n)}) \} \\ &\quad - \frac{\kappa_x(i-1/2, j; n+1/2)}{\Delta x_{i-1}} \{ (c_{i,j}^{(n+1)}) \\ &\quad + c_{i,j}^{(n)} \} - (c_{i+1,j}^{(n+1)} + c_{i,j}^{(n)}) \left. \right] \dots\dots\dots (14)\end{aligned}$$

となる。式(2)に式(5)と式(11)~(14)を代入して $c_{i,j}^{(n+1)}$ について解けば連立型の差分式となる。いま i, j 点以外の $(n+1)$ の項に $(1-\delta)$ をかけて連立型差分式を整理すれば

$$c_{i,j}^{(n+1)} = \frac{\text{Bunsi}}{\text{Bunbo}} \dots\dots\dots (15)$$

ここに、

$$\begin{aligned}\text{Bunbo} &= \frac{1}{\Delta t_n} + \frac{(1+\delta)(1-\delta)}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\kappa_x(i+1/2, j; n+1/2)}{\Delta x_i} \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\times \frac{\kappa_x(i-1/2, j; n+1/2)}{\Delta x_{i-1}} \left. \right\} \\ &+ \frac{(1+\delta)(1-\delta)}{\Delta z_j + \Delta z_{j-1}} \left\{ \frac{\kappa_z(i, j+1/2; n+1/2)}{\Delta z_j} \right. \\ &+ \frac{\kappa_z(i, j+1/2; n+1/2)}{\Delta z_{j-1}} \left. \right\} \dots\dots\dots (16)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Bunsi} &= \frac{c_{i,j}^{(n)}}{\Delta t_n} - \frac{(1+\delta)u(i+1/2, j; n+1/2)}{4\Delta x_i} \\ &\quad \times [\{c_{i+1,j}^{(n+1)} - c_{i-1,j}^{(n+1)}\}(1-\delta) \\ &\quad + \{c_{i+1,j}^{(n)} - c_{i-1,j}^{(n)}\}] \\ &\quad - \frac{(1+\delta)\{w(i, j+1/2; n+1/2) + w_s\}}{4\Delta z_j} \\ &\quad \times [\{c_{i,j+1}^{(n+1)} - c_{i,j-1}^{(n+1)}\}(1-\delta) \\ &\quad + \{c_{i,j+1}^{(n)} - c_{i,j-1}^{(n)}\}] \\ &\quad + \frac{(1+\delta)}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \left[\frac{\kappa_x(i+1/2, j; n+1/2)}{\Delta x_i} \right. \\ &\quad \times \{c_{i+1,j}^{(n+1)}(1-\delta) + c_{i+1,j}^{(n)} - c_{i,j}^{(n)}\} \\ &\quad - \frac{\kappa_x(i-1/2, j; n+1/2)}{\Delta x_{i-1}} \\ &\quad \times \{c_{i,j}^{(n)} - c_{i-1,j}^{(n)} - c_{i-1,j}^{(n+1)}(1-\delta)\} \left. \right] \\ &\quad + \frac{(1+\delta)}{\Delta z_j + \Delta z_{j-1}} \left[\frac{\kappa_z(i, j+1/2; n+1/2)}{\Delta z_j} \right. \\ &\quad \times \{c_{i,j+1}^{(n+1)}(1-\delta) + c_{i,j+1}^{(n)} - c_{i,j}^{(n)}\} \\ &\quad - \frac{\kappa_z(i, j-1/2; n+1/2)}{\Delta z_{j-1}} \\ &\quad \times \{c_{i,j}^{(n)} - c_{i,j-1}^{(n)} - c_{i,j-1}^{(n+1)}(1-\delta)\} \left. \right] \dots\dots\dots (17)\end{aligned}$$

である。式(16)、式(17)において、 $\delta=1$ ならば前進型、 $\delta=0$ ならば連立型となる。前進型と連立型を併用する場合は $0 < \delta < 1$ の値を定める。本報告では $\delta=0.75$ を用いた。

(3) 境界条件の設定

初期条件は水中の濃度を0として計算を始める。底面の境界条件は、浮遊粒子の浮上りのメカニズムを考えて与えなければならない。ここでは底面条件の影響を見る目的で強制的に次のようにあたえた。

まず、底の濃度分布は一定と考えると、ケースⅠを

$$\frac{c}{c_0} \Big|_{z=0} = c' \Big|_{z=0} = 1.0 \dots\dots\dots (18)$$

とする。

次に、底質の浮上りは底面の摩擦速度 u_* の影響と考慮される。そこで摩擦速度 u_* は底面近くの流速に比例すると考えてケースⅡを

$$\frac{c}{c_0} \Big|_{z=0} = c' \Big|_{z=0} = \left| \cos 2\pi x' \sin 2\pi t' \right| \dots\dots\dots (19)$$

とする。

次に、式(19)とはまったく逆の形でケースⅢを

$$\frac{c}{c_0} \Big|_{z=0} = c' \Big|_{z=0} = \left| \sin 2\pi x' \cos 2\pi t' \right| \dots\dots\dots (20)$$

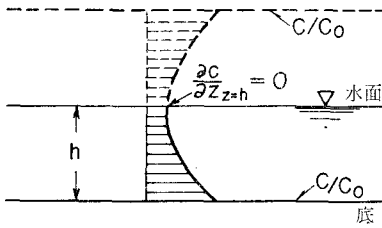


図-1 水面の境界条件

とする。

水面の境界条件は図-1に示すように全反射するものとして $\partial C/\partial z=0$ とする。いま $\partial C/\partial z|_{z=h}$ を差分式で表わせば格子間隔が十分に狭いとして

$$\left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=h} = -3c_{i,j_{\max}}^{(n+1)} + 4c_{i,j_{\max}-1}^{(n+1)} - c_{i,j_{\max}-2}^{(n+1)} + O((\Delta z)^2) \quad (21)$$

であるので、

$$c_{i,j_{\max}}^{(n+1)} = \frac{1}{3} \{ 4c_{i,j_{\max}-1}^{(n+1)} - c_{i,j_{\max}-2}^{(n+1)} \} \quad (22)$$

として求められる。

3. 計算条件

定常波の流速は微小振幅波理論によって与える。波の条件は、水深 $h=100$ cm, 周期 $T=3.5$ 秒, 波長 $L=1035$ cm, 波高 $H=5.0$ cm とする。ケース I と II の拡散係数は一般の概念に合せて流速 u に比例すると考え

$$\kappa_z = K_z |\cos 2\pi x' \sin 2\pi t'| = \kappa_x \quad (23)$$

とする。 $\bar{\kappa}_z$ については、野田¹⁵⁾ が実験と現地調査をまとめた結果 z の関数となるが、ここでは $\bar{\kappa}_z$ は z 方向に一定として計算する (このための濃度分布のひずみは今後検討を加えることにする)。以上を考えて

$$K_z = 10 \text{ cm}^2/\text{sec} \quad (24)$$

を用いる。また、ケース III については、一般概念とは逆に

$$\kappa_z = K_z |\sin 2\pi x' \cos 2\pi t'| = \kappa_x \quad (25)$$

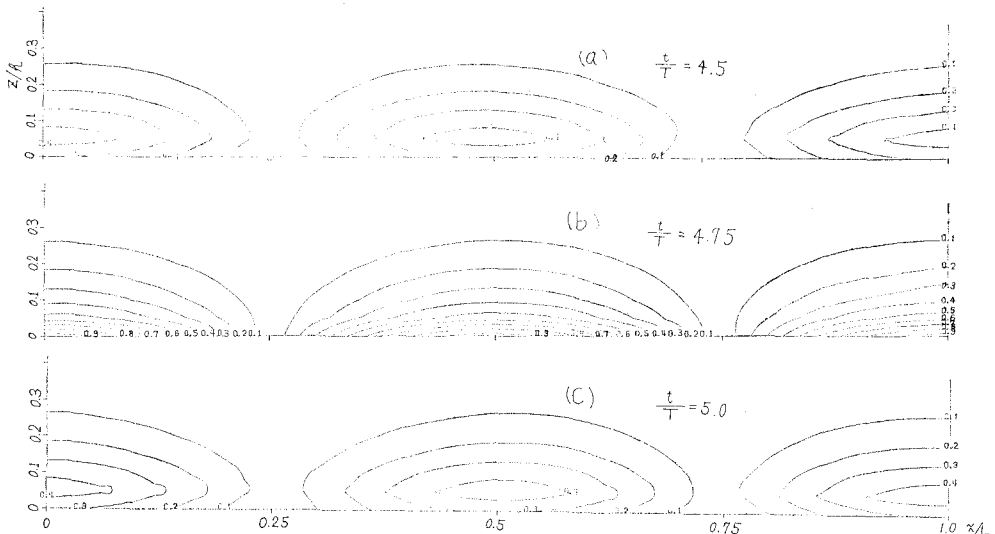
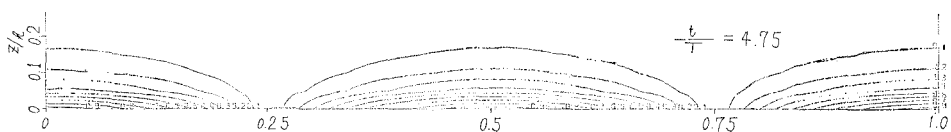
とする。

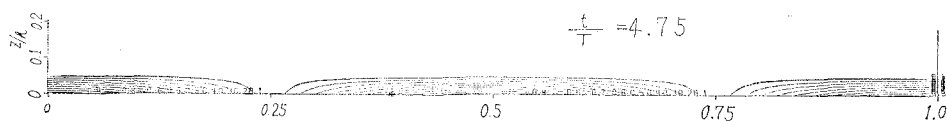
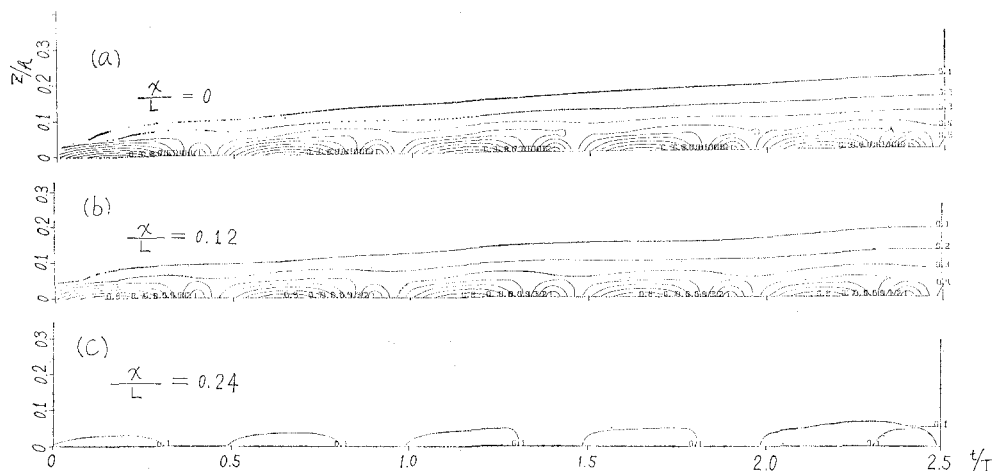
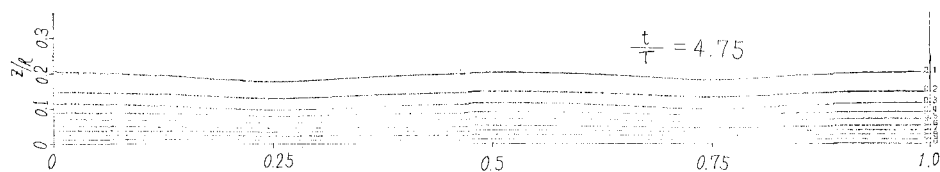
底面における境界層によって質量輸送が存在するが、その項を加えた解析結果は本報告の計算範囲では影響は明確でなかったので省略する。沈降速度 w_s は粒径によって異なるのでここでは $w_s=10, 1.0, 0.1, 0.01, 0.001$ cm/sec について検討し、沈降速度の違いによる影響を見た。

4. 計算結果

ケース II に対する計算結果を、 t を一定にした場合の $x-z$ 断面の濃度コンターを図-2~4に示す。図-2(a)~図-2(c) は、 $w_s=0.1$ cm/sec の場合に $t=4.5T, 4.75T, 5.0T$ について示す。この結果から計算は安定であることがわかる。次に、図-2(b) と 図-3 および 図-4 から、沈降速度の違いによる浮遊限界高さの違いが明らかである。

次に、 $x=0, 0.12L, 0.24L$ の場合の $t-z$ 断面の濃

図-2 ケース II の計算例 ($w_s=0.1$ cm/sec)図-3 ケース II の計算例 ($w_s=1.0$ cm/sec)

図—4 ケースⅡの計算例 ($w_s=10$ cm/sec)図—5 ケースⅡの計算例 ($w_s=0.1$ cm/sec)図—6 ケースⅠの計算例 ($w_s=1.0$ cm/sec)図—7 ケースⅢの計算例 ($w_s=1.0$ cm/sec)

度コンターを 図—5(a)～図—5(c) に示す。図—5 の沈降速度 w_s は 0.1 cm/sec で t は $0 \sim 2.5T$ までの結果である。この結果から時間的に濃度が増加する状態がよくわかる。

次に、ケースⅠに対する計算結果の一例を 図—6 に示す。この結果から拡散係数が大きい所が濃度が高くなっていることがわかる。

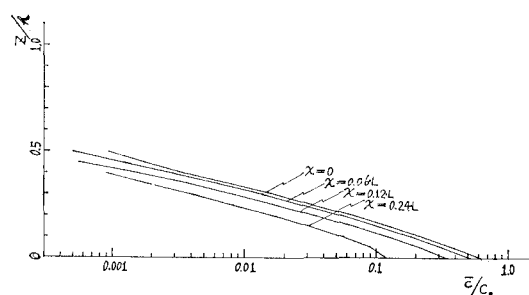
次に、一般概念とは逆の境界条件を与えたケースⅢの結果を 図—7 に示す。この結果から 図—2～図—4 は逆に濃度分布は腹で高く節で低くなることがわかる。

5. 考 察

(1) 服部の実験値との比較¹¹⁾

服部は時間平均濃度で議論しているために、筆者らの結果を $t=5.0T \sim 6.0T$ までの一周期間を平均して、

$x=0, 0.6L, 0.12L, 0.24L$ についてケースⅡの鉛直濃度分布をグラフ化したものが 図—8 である。ケースⅢはケースⅡとは異なり、 $x=0.25L$ で濃度が高く、 $x=0$ で濃度が低くなる。この結果から、服部の実験値と一致するためには、定常波では腹の部分の底面付近の濃度が

図—8 平均濃度の鉛直分布 ($w_s=1.0$ cm/sec)

高く、拡散係数が大きくなくてはならない。逆に服部が砂粒子と水粒子の運動の時間遅れを考えた理論よりも、服部の実験値は拡散係数が腹で大きく節で小さい。また底面付近の濃度は腹で大きく節で小さいとみるべきであろう。こう考えると本計算結果の境界条件は一般概念とは逆にしたケースⅢの方がよいことになる。すなわち、流速が大きいところで、拡散係数が大きいであろうという一般概念とは逆になることが考えられる。

(2) 沈降速度の影響

式(1)において拡散係数 κ_z と沈降速度 w_s の関係を考えれば、 κ_z に比べて w_s が小さくなれば沈降速度の影響は無視できるようになるはずである。そこで $x=0$ において、 $t=5.0T \sim 6.0T$ の平均濃度を w_s と $\bar{c}/c_0$ の関係でグラフ化したものが 図-9 である。図-9 から $\kappa_z|_{x=0}=10.0 \sin 2\pi t'$ の場合に $w_s \leq 0.01 \text{ cm/sec}$ では無視できる。この結果は一般の概念の $|\bar{\kappa}_z| \geq |100 w_s|$ と一致する。

(3) 底面濃度について

底面濃度については強制的にあたえた。この結果から沈降速度の影響と服部の実験値に対して考察を加えることができた。しかしながら底面近くの質量輸送の影響等について検討を加えようとしたができなかった。これは計算方法に底面近くの境界条件を決定する方法を加えていないためと考えられる。この問題については今後検討していきたい。

(4) 濃度の鉛直分布について

図-8 において底面近くが直線からずれる結果を得ている。これは底を強制的に変動するようあたえたためと

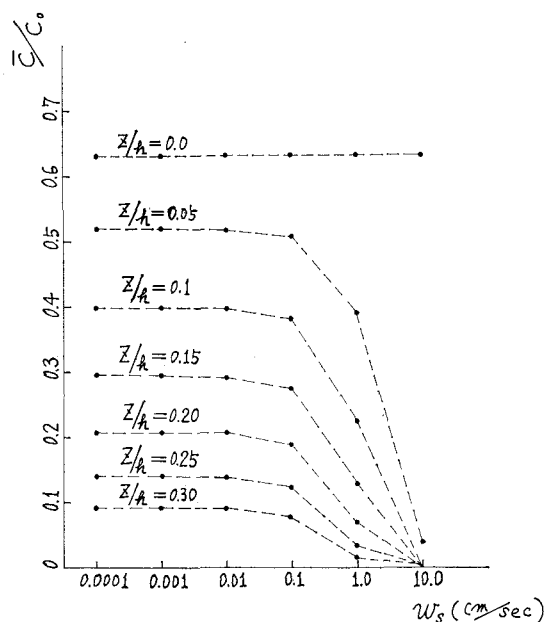


図-9 鉛直拡散にあたる沈降速度の影響
($x=0, \kappa_z=|10 \cos 2\pi x' \sin 2\pi t'|$)

考えられる。また実験値が 図-8 とは逆にくの字型に曲がる結果が示されているが、これは野田の研究でもわかるように拡散係数を z の関数としなければならない所を一定としたためと考える。

6. 結 論

(1) 非定常拡散の数値計算は、前進型と連立型を併用する方法で安定に計算できる。

(2) 式(1)において沈降速度の影響は 図-9 からこの計算条件では $w_s \leq 0.01 \text{ cm/sec}$ となる。この値は一般概念の $|\bar{\kappa}_z| \geq |100 w_s|$ となる。

(3) 服部の実験値に対して、服部は水粒子と砂粒子の運動の遅れを考えた理論解で説明しているが、底面濃度が腹で大きく節で小さく、拡散係数が腹で大きく節で小さいと考えた場合にも説明することができる。

謝 辞: 本研究を行うに当たり、東工大日野幹雄教授の御指導を賜った。また農土試白石英彦室長から、有益な助言と便宜をはかっていただいた。ここに深く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 堀川清司 (1965): 漂砂論, 水工シリーズ, 土木学会 65—14
- 堀川清司 (1970): 漂砂論, 水工シリーズ, 土木学会 70—05
- 備後灘周辺漁場開発プロジェクトチーム: 浅海域における増養殖漁場の開発に関する総合研究, 昭和47年, 昭和47年度別枠研究成果
- 農業土木試験場: 浅海域における増養殖漁場の開発に関する研究, 昭和46年度, 昭和47年度研究報告書
- 大西亮一 (1971): 浅海開発のための乱流理論による解析について—有明海の浮泥と干潟の発達—, 科学技術庁東工大留学報告書
- 大西亮一 (1972): 有明海港奥における干潟の発達—限界潮汐について—, 昭和48年度農土学会年次講演会集
- Postoma (1967): "Sediment transport and sedimentation in estuarine environment", "Estuaries" Edited by G.H. Lauff, American Association for Advancement of Science, Washington D.C. Reprinted (1968)
- 日野・大西 (1971): 浅水表面波の粗底上の乱流構造, 第18回海岸工学講演会論文集
- 大西亮一 (1973): 干潟上の波浪流—電磁流速計による測定—, 第20回海岸工学講演会論文集
- 本間・堀川・鹿島 (1964): 波による浮遊砂に関する研究, 第11回海岸工学講演会講演集
- 野田英明 (1969): 波動による乱流境界層の発達, 第16回海岸工学講演会講演集
- 野田英明 (1970): 波動境界層における質量輸送と海底の洗掘, 第17回海岸工学講演会論文集
- 服部昌太郎 (1970): 重複波による底質の浮遊濃度

分布, 第 17 回海岸工学講演会論文集

- | | |
|---|--|
| 12) 大西亮一 (1972): 浅海域における質量輸送 (I) — 乱流理論の適応方法 —, 農土試報告第 10 号 | 15) 野田英明 (1967): 波による底質の浮遊, 第14回海岸工学講演会講演集 |
| 13) 日野幹雄 (1966): 排煙濃度分布に関する数値解析 (I) — 差分近似による方法 —, 電力中央研究所技術研究所報告 No. 65058 | 16) 和田 明 (1968): 沿岸環境問題, 水工シリーズ土木学会 68—07 |
| 14) 大西亮一 (1972): 拡散方程式の解法, 農土試技報 | 17) 首藤伸夫 (1970): 湾内拡散, 水工シリーズ, 土木学会 70—30 |
-