

スペクトル推定における二、三の問題

浜 中 建 一 郎*

1. 緒 言

スペクトル推定方法は、相関法と FFT 法とに大別される。さらに、前者には相関関数の推定式の違いにより三種ほど考えられ、後者にも主に周波数軸上で平均化する方法と、時間軸上で平均化する方法などが考えられており、それら各種の方法の間の関係は必ずしも明確ではない。そこでこの報告では、ペリオドグラム（一次スペクトル）を基準にして、おのおの方法の間の関係を明確にすることを行った。さらに、ペリオドグラムの性質を調べる中で、一次スペクトルと short-time spectrum の違いを述べ、非定常現象のスペクトル解析への糸口を示した。

2. 相 関 法

相関関数の推定式は、赤池¹⁾によるもの、Blackman-Tukey²⁾によるもの、力石³⁾によるものがあるが、おのおのを R_1 , R_2 , R_3 として検討する。全データ長を T とし、

(1) 赤池の場合

$$R_1(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \quad \dots\dots\dots (1)$$

最大ラグ $\tau_m = T$ のとき、スペクトル $S(f)$ は

$$S_1(f) = \int_{-T}^T R_1(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau \quad \dots\dots\dots (2)$$

式(1)を式(2)に代入し、 $x(t)$; $0 \leq t \leq T$ のフーリエ変換を $X(f)$ とすると、簡単な変形から

$$S_1(f) = |X(f)|^2/T \equiv P_T(f) \quad \dots\dots\dots (3)$$

これは明らかにペリオドグラムを表わしている。

次に $\tau_m < T$ のとき、ラグウィンドウを $D_r(\tau)$ とし

$$\begin{aligned} S_1(f) &= \int_{-T}^T D_r(\tau)R_1(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P_T(f_0)Q_r(f_0-f)df_0 \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ただし $D_r(\tau) = 0 \quad \tau > \tau_m$

$Q_r(f)$ は、 $D_r(\tau)$ のフーリエ変換

(2) Blackman-Tukey の場合

$$R_2(\tau) = \frac{1}{T-|\tau|} \int_0^{T-|\tau|} x(t)x(t+\tau)dt \quad \dots\dots\dots (5)$$

$\tau = T$ のとき $1/(T-|\tau|)$ は発散するので、

$\tau_m < T$ のときだけ

$$R_2(\tau) = \frac{T}{T-|\tau|} R_1(\tau) = D_2(\tau)R_1(\tau) \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\begin{aligned} S_2(f) &= \int_{-T}^T D_r(\tau)R_2(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau \\ &= \int_{-T}^T D_r(\tau)D_2(\tau)R_1(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P_T(f_0)Q_{r2}(f_0-f)df_0 \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$\text{ただし } Q_{r2}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} Q_r(f_0) \cdot Q_2(f_0-f)df_0$$

(3) 力石の場合

有限なデータをサイクリックに用いて

$$R_3(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x_d(t)x_d(t+\tau)dt \quad \dots\dots\dots (8)$$

$R_3(\tau) = R_1(\tau) + R_1(T-|\tau|)$ であるから、

$\tau_m = T/2$ のとき

$$S_3(f) = \int_{-T/2}^{T/2} R_3(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau = P_T(f) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$\tau_m < T/2$ のとき

$$\begin{aligned} S_3(f) &= \int_{-T/2}^{T/2} D_r(\tau)R_3(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P_T(f_0)Q_r(f_0-f)df_0 \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

式(3), (4), (7), (9), (10) から明らかなようにすべて $P_T(f)$ を基準にして、その方法と、用いたラグウィンドウによって決まるスペクトルウィンドウで平滑化していることがわかる。次に同様なことをデジタル形の計算の場合を示す。

(4)

$$\begin{aligned} R_1(m) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n+m) \\ m &= -M, \dots, 0, \dots, M-1 \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1(k) &= S_1\left(\frac{k}{2M'\Delta t'}\right) = \Delta t \sum_{m=-M}^{M-1} R_1(m)e^{-i2\pi km/2M} \\ k &= -M, \dots, 0, \dots, M-1 \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

* 正会員 工修 北海道大学助手 工学部土木工学科

$M=N$ のとき

$$S_1(k) = \Delta t \sum_{m=-N}^{N-1} R_1(m) e^{-i2\pi km/2M}$$

式 (11) を代入して,

$$S_1(k) = \frac{\Delta t}{N} |X(k)|^2 \equiv P_N(k) \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\text{ただし, } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i2\pi nk/2N}$$

$M < N$ のとき

$$\begin{aligned} S_1(k) &= \Delta t \sum_{m=-M}^{M-1} D_r(m) R_1(m) e^{-i2\pi km/2M} \\ &= \sum_{m=-M}^{M-1} \sum_{k'=-N}^{N-1} D_r(m) P_N(k') e^{i2\pi k'm/2N} \\ &\quad \times e^{-i2\pi km/2M} \\ &= \sum_{k'=-N}^{N-1} P_N(k') Q_r(k, k') \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$\text{ただし, } Q_r(k, k') = \sum_{m=-M}^{M-1} \times D_r(m) e^{-i2\pi m(k/2M - k'/2N)}$$

(5)

$$R_2(m) = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-m} x(n) x(n+m) \quad \dots\dots\dots (15)$$

$M < N$ で

$$\begin{aligned} R_2(m) &= \frac{N}{N-|m|} R_1(m) = D_2(m) R_1(m) \text{であるから,} \\ S_2(k) &= S_2\left(\frac{k}{2M\Delta t}\right) = \Delta t \sum_{m=-M}^{M-1} \\ &\quad \times D_r(m) R_2(m) e^{-i2\pi mk/2M} \\ &= \Delta t \sum_{m=-M}^{M-1} D_r(m) D_2(m) R_1(m) e^{-i2\pi mk/2M} \\ &= \sum_{k'=-N}^{N-1} P_N(k') Q_{r2}(k, k') \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

$$\text{ただし, } Q_{r2}(k, k') = \sum_{m=-M}^{M-1} \times D_r(m) D_2(m) e^{-i2\pi m(k/2M - k'/2N)}$$

(6)

$$R_3(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_0(n) x_0(n+m) \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$R_3(m) = R_1(m) + R_1(N-|m|) \quad \dots\dots\dots (18)$$

$M=N/2$ のとき

$$S_3(k) = S_3\left(\frac{k}{N\Delta t}\right) = \Delta t \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} R_3(m) e^{-i2\pi mk/N}$$

式 (18) を代入し変形すると,

$$\begin{aligned} S_3(k) &= \Delta t \sum_{m=-N}^{N-1} R_1(m) e^{-i2\pi mk/N} \\ &= P_N(2k) \quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

$M < N/2$ のとき,

$$S_3(k) = \Delta t \sum_{m=-M}^{M-1} D_r(m) R_3(m) e^{-i2\pi mk/2M}$$

$$= \sum_{k'=-N/2}^{N/2-1} P_N(2k') Q_r(k, 2k') \quad \dots\dots\dots (20)$$

このように, デジタル形の計算式をみると, S_1 , S_2 , S_3 の違いはさらに明瞭になる。すなわち, S_1 は, 全データから求められるペリオドグラムを, 用いたラグウィンドウに対応するスペクトルウィンドウで平滑化したものと全く同じであるのに対し, S_2 の場合は, ウィンドウに $N/(N-|m|)$ が積の形で入っており, その形から推定できるようにウィンドウの周波数特性を悪くするであろう。また, 式 (19), (20) から明らかなように, S_3 は S_1 に比し, 周波数軸上での分解間隔が 2 倍になっている。このことは, FFT 法についてもいえることであるが, 次のような考えに基づくものと思われる。 S_1 のグループの場合は, N 個の情報から求まるスペクトルは N 個であると考えのに対し, S_3 のグループでは, N 個の情報から求まる周波数領域での N 個の情報のうち, 半数を占める位相に関する情報は用いずに, 振幅に関する情報だけを用いているのだから, スペクトルは $N/2$ 個しか求まらなと考える。フーリエ変換という演算を中心に考えるなら, 後者のほうが妥当と思われるが, 厳密な意味での検討は別の機会に譲りたい。

3. FFT 法

FFT を用いたスペクトル推定法は大別して 2 つの方法がある。今かりにおのおのを, 周波数平均法, 時間平均法とよぶことにする。

(1) 周波数平均法^{3), 4)}

この方法は, 全データからのペリオドグラム (一次スペクトル)³⁾を, 任意のスペクトルウィンドウで平滑化するものである。ここでは, 前節でも述べたように, フーリエ変換の性算から, デジタル計算では, 式 (19) の $P_N(2k)$ を平滑化することになり, 1. (6) の方法とはウィンドウの違いだけとなる。詳しくは参考文献^{3), 4)}を参照されたい。

(2) 時間平均法

この方法は, 観測された全データに比し, 任意の小さな区間に再分割し, おのおのの区間にデータウィンドウをかけたもののペリオドグラム (short-time-spectrum⁵⁾) を求め, 各周波数成分ごとに平均するものである。前節と同様に, 全データからのペリオドグラムとの関係調べてみる。

全データ長を T , 切りとり長さ (分割区間長) を T_0 とすると,

$$\begin{aligned} x_{T_0}(t, t_0) &= x_T(t+t_0) \cdot p_{T_0}(t); \\ p_{T_0}(t) &= 0, \quad |t| > \frac{T_0}{2}; \text{ データウィンドウ} \\ &\dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-i2\pi f t} dt \\ = A_T(f) e^{i\phi(f)} \dots\dots\dots (22) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_T(t+t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} X_T(f) e^{i2\pi f(t+t_0)} df \dots\dots\dots (23) \end{cases}$$

$$X_{T_0}(f, t_0) = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t, t_0) e^{-i2\pi f t} dt$$

式 (21), (23) を代入し, $p_{T_0}(f)$ のフーリエ変換を $P_{T_0}(f)$ とすると

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X_T(f') e^{i2\pi f' t_0} P_{T_0}(f-f') df'$$

式 (22) を代入すると

$$= \int_{-\infty}^{\infty} A_T(f') e^{i(2\pi f' t_0 + \phi_T(f'))} P_{T_0}(f-f') df' \dots\dots\dots (24)$$

この short-time-spectrum は,

$$\begin{aligned} S_{T_0}(f, t_0) &= \frac{|X_{T_0}(f)|^2}{T_0} = \frac{X_{T_0}(f) X_{T_0}^*(f)}{T_0} \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} A_T(f_1) P_T(f-f_1) \\ &\quad \times e^{i(2\pi f_1 t_0 + \phi_T(f_1))} df_1 \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} A_T(f_2) P_T(f-f_2) \\ &\quad \times e^{-i(2\pi f_2 t_0 + \phi_T(f_2))} df_2 \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

ここで, $S_{T_0}(f, t_0)$ の時間平均をとると

$$S_{T_0}(f) = \frac{1}{T-T_0} \int_{-(T-T_0)/2}^{(T-T_0)/2} S_{T_0}(f, t_0) dt_0$$

簡単のため, $p_{T_0}(t)$ を偶関数に選ぶと, $P_{T_0}(f)$ は実関数となり, $S_{T_0}(f, t_0)$ が実関数であることを考えると,

$$\begin{aligned} S_{T_0}(f) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_T(f_1) A_T(f_2) P_{T_0}(f-f_1) \\ &\quad \times P_{T_0}(f-f_2) \cos(\phi_{T_0}(f_1) - \phi_{T_0}(f_2)) \\ &\quad \times \frac{\sin \pi(f_1-f_2)(T-T_0)}{\pi(f_1-f_2)(T-T_0)} df_1 df_2 \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

となる。すなわち, $S_{T_0}(f)$ は f を中心とした 2 次元のウィンドウで $A_T(f)$ を平滑化したものであることがわかる。次にデジタル計算の場合を示すと, 全データ数 N , 切りとりデータ数 M として

$$x_M(m, n_0) = x_N(m+n_0) p_M(m) \dots\dots\dots (27)$$

$$\begin{cases} X_N(k) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x_N(n) e^{-i2\pi n k/N} \\ = A_N(k) e^{i\phi_N(k)} \dots\dots\dots (28) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_N(m+n_0) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X_N(k) e^{i2\pi(m+n_0)k/N} \end{cases} \quad (29)$$

$$X_M(k, n_0) = \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} x_M(m, n_0) e^{-i2\pi m k/M}$$

式 (27), (29) を代入して, 変形すると

$$\begin{aligned} &= \sum_{k'=-N/2}^{N/2-1} X_N(k') e^{i2\pi k' n_0/N} \\ &\quad \times \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} p_M(m) e^{-i2\pi m(k/M-k'/N)} \end{aligned}$$

$p_M(m)$ は偶関数であるから上式中, 第 2 の $\sum$ は近似的に実関数とみてよいだろう。それを $P_M\left(\frac{k}{M} - \frac{k'}{N}\right)$ とすると

$$\begin{aligned} &= \sum_{k'=-N/2}^{N/2-1} X_N(k') e^{i2\pi k' n_0/N} P_M\left(\frac{k}{M} - \frac{k'}{N}\right) \\ &= \sum_{k'=-N/2}^{N/2-1} A_N(k') e^{i\phi_N(k')} e^{i2\pi k' n_0/N} \\ &\quad \times P_M\left(\frac{k}{M} - \frac{k'}{N}\right) \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

これから, n_0 で short-time spectrum は

$$\begin{aligned} S_M(k, n_0) &= \frac{\Delta t |X_M(k, n_0)|^2}{M} \\ &= \sum_{k_1=-N/2}^{N/2-1} \sum_{k_2=-N/2}^{N/2-1} A_N(k_1) A_N(k_2) \\ &\quad \times P_M\left(\frac{k}{M} - \frac{k_1}{N}\right) P_M\left(\frac{k}{M} - \frac{k_2}{N}\right) \\ &\quad \times e^{i(\phi_N(k_1) - \phi_N(k_2))} e^{i2\pi(k_1-k_2)n_0/N} \\ &\quad \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

n_0 について $-(N-M)/2 \sim (N-M)/2$ で平均すると,

$$\begin{aligned} S_M(k) &= \sum_{k_1=-N/2}^{N/2-1} \sum_{k_2=-N/2}^{N/2-1} A_N(k_1) A_N(k_2) \\ &\quad \times P_M\left(\frac{k}{M} - \frac{k_1}{N}\right) P_M\left(\frac{k}{M} - \frac{k_2}{N}\right) \\ &\quad \times \frac{\cos\{\phi_N(k_1) - \phi_N(k_2)\}}{N-M+1} \\ &\quad \times \left\{1 + 2 \cos \frac{\pi(k_1-k_2)}{N} \left(\frac{N-M}{2} + 1\right)\right. \\ &\quad \times \sin \frac{\pi(k_1-k_2)}{N} \\ &\quad \times \left.\left(\frac{N-M}{2} - \frac{1}{2}\right) \left/\sin \frac{\pi(k_1-k_2)}{N}\right\} \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

となり, やはり k を中心とした 2 次元のウィンドウで $A_N(k)$ を平滑化していることがわかる。

4. 一次スペクトル

これまで, 一次スペクトルを基準にして種々の方法について調べてきたが, 特に最後の 3. (2) の方法では一次スペクトルの周波数成分の積の項が含まれている。ここでさらに, 一次スペクトルそのものを調べてみる。

今, 変動を

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cos(2\pi f_n t + \phi_n) \dots\dots\dots (33)$$

として与えると, そのフーリエ変換は

$$\begin{aligned} F_T(f) &= \int_{-T}^T x(t) e^{-i2\pi f t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\phi_n} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\sin 2\pi(f-f_n)T}{2\pi(f-f_n)} + \frac{\sin 2\pi(f+f_n)T}{2\pi(f+f_n)} \right\} \\ &\quad \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

したがって、一次スペクトルは

$$\begin{aligned} \frac{|F_T(f)|^2}{T} &= \frac{1}{T} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} A_{n_1} A_{n_2} e^{i(\phi_{n_1} - \phi_{n_2})} \\ &\times \left\{ \frac{\sin 2\pi(f-f_{n_1})T}{2\pi(f-f_{n_1})} + \frac{\sin 2\pi(f+f_{n_1})T}{2\pi(f+f_{n_1})} \right\} \\ &\times \left\{ \frac{\sin 2\pi(f-f_{n_2})T}{2\pi(f-f_{n_2})} + \frac{\sin 2\pi(f+f_{n_2})T}{2\pi(f+f_{n_2})} \right\} \\ &\dots\dots\dots(35) \end{aligned}$$

となり、結局一次スペクトル自体にも他の周波数成分との積の項が含まれていることがわかる。すなわち、スペクトル密度とは、その周波数成分の近傍を2次元ウィンドウにより平滑化したものと考えてほうがより一般的であろう。また、式(35)ではいわゆるノウウィンドウのため、他の周波数成分からのリーケージは大きく、データウィンドウの必要性を感じさせる。そうすると結局、

一次スペクトル(修正ペリオドグラム)は、より長いデータの short-time spectrum にすぎないし、反対に short-time spectrum は、その切りとり区間での一次スペクトルにすぎないことになる。しかし、前回の報告にも述べたように、一次スペクトルが、定常現象のスペクトルを求めようとするのに対し、short-time spectrum は running-spectrum として非定常現象のスペクトルをも表わし得るという二面性を持つ。自然現象は一般的には非定常現象と考えるほうが妥当と思われるので、次に非定常現象のスペクトルについて、簡単な考察を試みる。

5. 非定常現象のスペクトル

非定常な変動をどのように表わすか、適当な表現方法はわからないが、今かりに、ある周波数成分の振幅が時間的に変化するとして、次のように表わすとする。

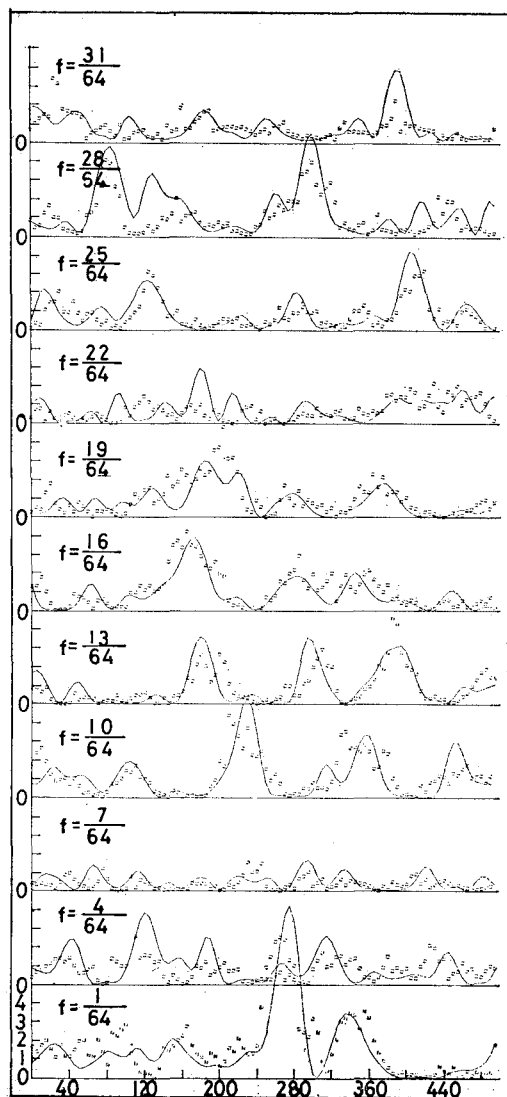


図-1 周波数成分の時間的変動

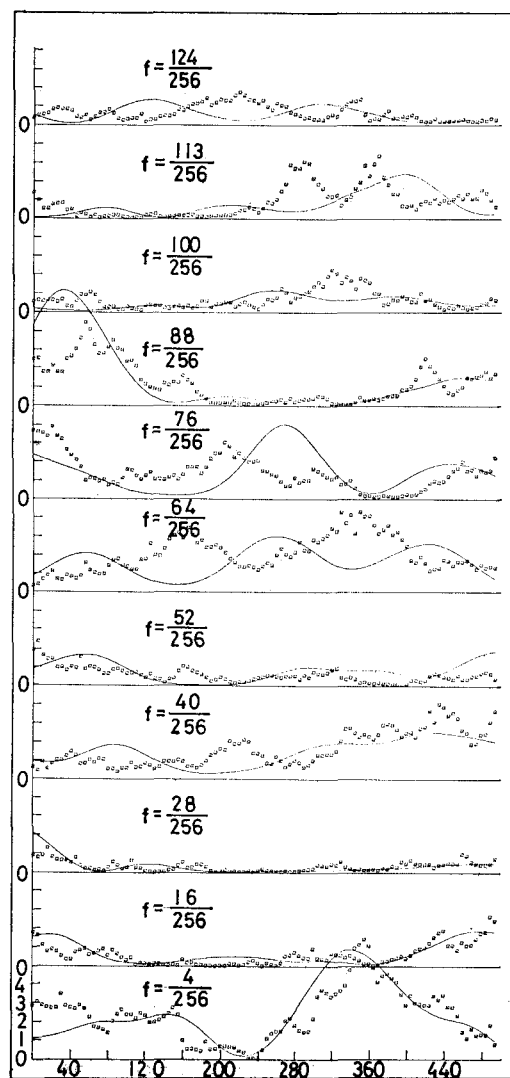


図-2 周波数成分の時間的変動

$$x_{f_1}(t) = A(f_1, t) \cos(2\pi f_1 t + \phi_{f_1}) \dots \dots \dots (36)$$

さらに、 $A(f_1, t)$ の時間的変動のある周波数成分が f_2 とすると、

$$x_{f_1, f_2}(t) = A(f_1, f_2) \cos(2\pi f_2 t + \phi_{f_2}) \\ \times \cos(2\pi f_1 t + \phi_{f_1}) \dots \dots \dots (37)$$

これは、二つの成分の和に分解できて

$$= \frac{A(f_1, f_2)}{2} \cos \{2\pi (f_1 + f_2) + (\phi_{f_1} + \phi_{f_2})\} \\ + \frac{A(f_1, f_2)}{2} \cos \{2\pi (f_1 - f_2) \\ + (\phi_{f_1} - \phi_{f_2})\} \dots \dots \dots (38)$$

結局、非定常解析とは、式 (36) の $A(f_1, t)$ や、式 (37) の $A(f_1, f_2)$ に関する量を求めることであり、定常解析とは、式 (38) の $A(f_1, f_2)/2$ に関する量を、 $(f_1 + f_2)$ と $(f_1 - f_2)$ と別々の周波数成分として別個に求める

ことと考えることができると思われる。そのどちらの立場をとるかということは、観測者がその現象をどう理解しようとしているかによって決めるべきであり、たとえば、その現象の発生段階におけるメカニズムが解明されるに従って、自ずと決定されるであろう。また、short-time spectrum の時間的変化を見ることにより非定常解析が行われ、時間的に平均すると、定常解析になるという二面性が short-time spectrum をとりあげた大きな理由の一つである。

次に、式 (37) と (38) との関係を、short-time spectrum のデータウィンドウで説明を加える。今、データウィンドウを $p_T(t)$ とすると、そのフーリエ変換を $P_T(f)$ とし、 $P_T(f)$ のメインロブの幅を f_w とする。 $p_T(t)$ は個々の short-time spectrum に対しては重み関数として作用し、周波数成分の時間変動に対しては convolution の作用をしている。このことから逆に、 $P_T(f)$ は、式 (37)、(38) の $A(f_1, f_2)$ に対しては、 f_1 に関しては convolution の作用をし、 f_2 に関しては重み関数の作用をしている。したがって、 f_1 に関しての分解能を上げると f_2 に関して捕え得る周波数帯は狭くなる。具体的にいうと、式 (38) のように、 $(f_1 + f_2)$ と $(f_1 - f_2)$ とを識別す

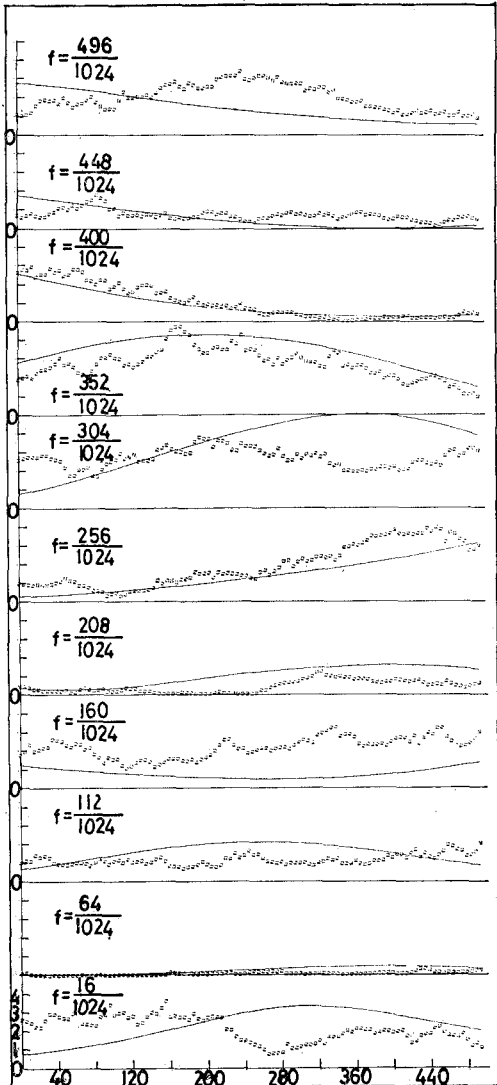


図-3 周波数成分の時間的変動

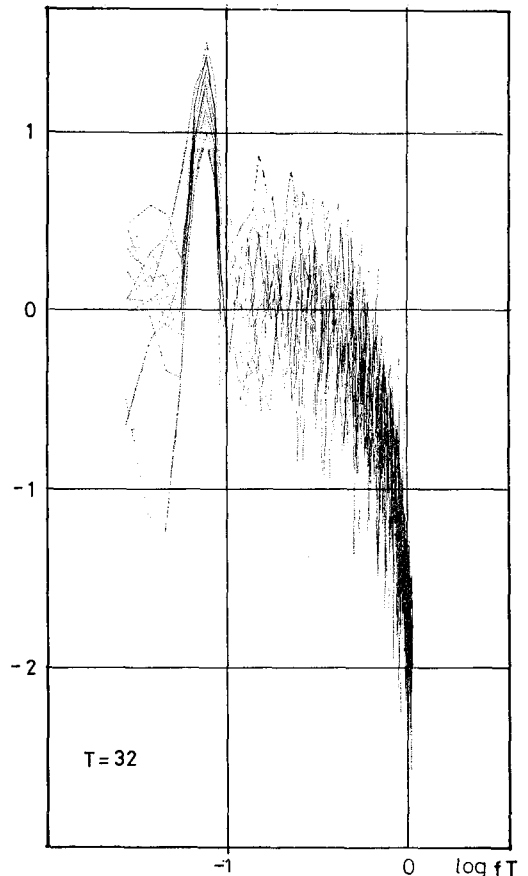


図-4

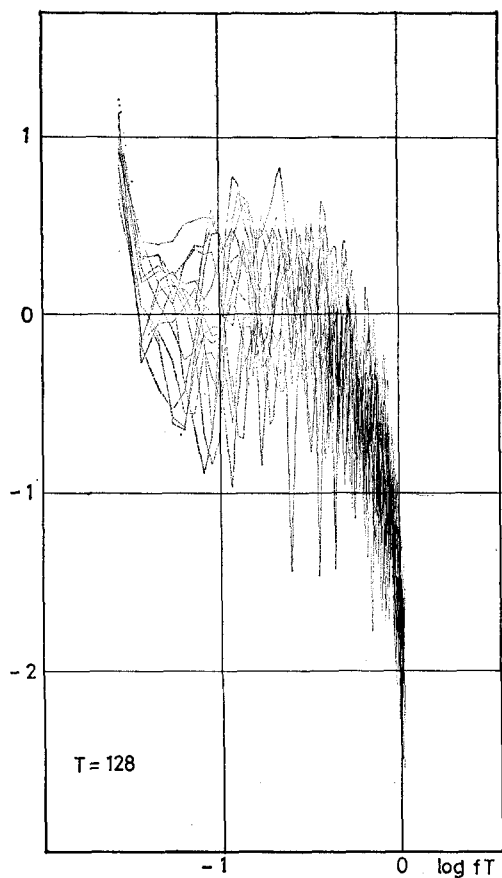


図-5

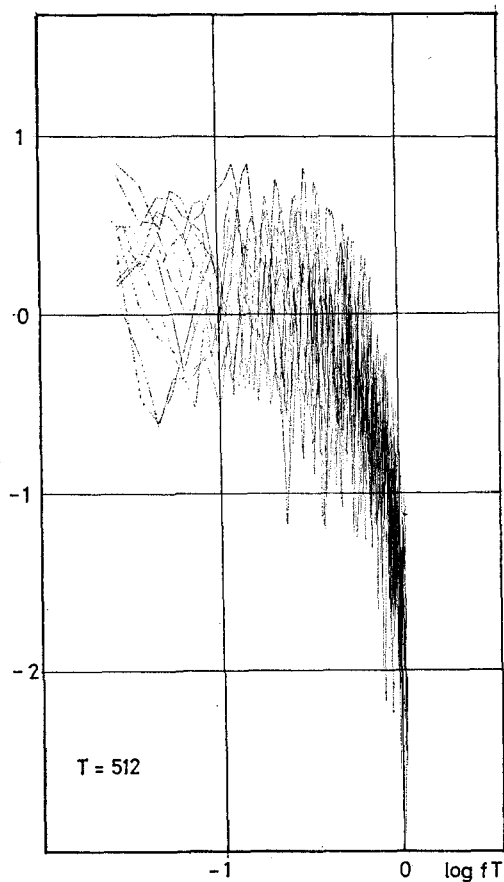


図-6

るためにはその差 f_2 より f_w は小さくしなければならず(データウィンドウは長くなる), そうすると, f_2 に関する重み関数としての働きから, f_2 上では, f_w の外に出してしまうので捕えられなくなる。

このような関係を示す例として, 若干の計算例を示す。データとして, 白色ノイズのかわりに計算機で発生させた正規乱数を用いた。図-1~3 は, いろいろな周波数成分の時間的変動の様子を, 三種の切りとり幅について示した。図中実線はデータウィンドウを用いたもの, □印はノウウィンドウのものである。データウィンドウを用いることにより, 周波数成分の時間的変動は滑らかになり, ある時間での値が近傍の時間での代表とみなし得ることがわかる。さらに, 切りとり幅を長くすることにより, 周波数成分の時間的変動の高周波成分が除かれている様子がわかる。また, 図-4~6 は, おおのの切りとり幅の場合の各周波数成分の時間変動のスペクトルを, 重ねて画いたもので, 非定常性の捕捉し得る度合を表わしている。ここで用いたデータウィンドウは hanning の形を用いたので, そのメインロブの幅を, かりに今, 最初に 0 になる点すなわち $fT=1$ の点とすると, どの切りとり幅の場合もよく一致している。

6. 結 論

以上, 種々のスペクトル推定法を比較, 検討を行ったが, 定常現象, 非定常現象の関係, さらに非定常現象のスペクトル解析への糸口はつかめたと思う。今後さらに明確化させるとともに, 現実の波浪現象に関して適用して行きたいと考える。

最後に, 計算および作図にあたり協力いただいた北海道大学工学部 小野・黒木両氏に謝意を表するとともに, 計算は北海道大学大型計算機センター FACOM-230-60 によることを付記する。

参 考 文 献

- 1) 赤池弘次: スペクトル推定の統計理論
- 2) Blackman, R.B. & Tukey, J.W.: The Measurement of Power Spectra, Dover.
- 3) 力石国男・光易 恒: スペクトル計算法と有限フーリエ級数; 九大応力研究所報, No. 39.
- 4) 桑島 進・永井康平: 港湾技研資料, No. 155, 1973.
- 5) 浜中健一郎・沢橋 剛: 第20回海岸工学講演会論文集, 1973.