

海岸にトラップされる波の 2, 3 の性質

浜 田 徳 一*

1. トラップされる波の性質

Luke, J.C.¹⁾(1967) の行った一次元の非粘性非回転の表面波についての変分計算を二次元の場合に拡張して計算すると、海岸の水際線で水深が 0 となるか、垂直壁で海岸線に直角方向の速度が 0 となり、また十分沖方で波の運動が消失する境界条件があれば表面波が成立できることがわかる²⁾ (これ以外の境界条件でも成立できる場合はある)。

そこで水際線で水深が 0 となる場合として、水平線と θ の勾配の一樣傾斜海岸の進行性の edge wave³⁾ をとり (図-1)、直壁海岸の場合として海岸から l の距離で水深が h_2 から $h_1(h_1 > h_2)$ に急変し、 h_2 水深域では全反射の波が、 h_1 水深域ではそれに連続する沖方に向い exponential に波高が減衰する岸に沿う進行性の長波を考える²⁾ (図-2)。

非粘性の進行波の質量輸送とエネルギーとの関係は、線形近似では Euler 型の場合、 E_p を波のポテンシャルエネルギーとして

$$M_1 = \int_{-h}^{\eta} \rho u dy = \int_0^{\eta} \rho u dy = \rho \overline{u\eta} = \frac{\rho g}{c} \overline{\eta^2} = \frac{2E_p}{c} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 $\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\rho c \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ 、と水面近傍で $p = \rho g(\eta - y)$ の関係を用いている。

また Lagrange 型の場合、 E_k を波の運動エネルギーとして、

$$M_2 = \int_{-h}^0 \rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \int u dt + \frac{\partial v}{\partial y} \int v dt + \frac{\partial w}{\partial z} \int w dt \right\} dy$$

これに非回転の条件を用い

$$\int_{-h}^0 (-) \frac{\rho}{c} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \int u dt + \frac{\partial v}{\partial t} \int v dt + \frac{\partial w}{\partial t} \int w dt \right\} dy \\ = \int_{-h}^0 \frac{\rho}{c} (\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}) dy = \frac{2E_k}{c} \quad \dots\dots\dots (2)$$

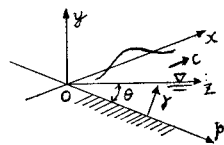


図-1

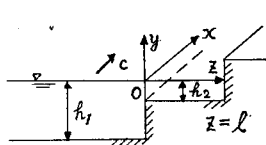


図-2

式 (1), (2) は考えている微小領域で成立するが、long-crested な Stokes 波では、微小領域で $E_p = E_k$ 、ゆえに $E = E_p + E_k = cM_1 = cM_2$ (3) がどの場所でも成立する。

いま考えている波では個々の場合で違ってくる。図-1 の基本周期の edge wave の場合

$$\eta = ae^{-kz \cos \theta} \sin(kx - \sigma t) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\varphi = -a \frac{\sigma}{k \sin \theta} e^{-kz \cos \theta} e^{ky \sin \theta} \cos(kx - \sigma t) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\sigma^2 = gk \sin \theta, \quad c = \sqrt{\frac{g}{k}} \sin \theta, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial k} = c_g = \frac{c}{2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\left. \begin{aligned} E_p &= \frac{1}{4} \rho g a^2 e^{-2kz \cos \theta} \\ E_k &= \frac{1}{4} \rho g a^2 \frac{1}{\sin^2 \theta} e^{-2kz \cos \theta} (1 - e^{-2kz \sin \theta \tan \theta}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

式 (7) を用い、 $\int_0^\infty E_p dz$ 、 $\int_0^\infty E_k dz$ を計算すると、両者は一致し、 z 方向の全領域についての積分は

$$\left. \begin{aligned} E &= E_p + E_k = cM_i \quad (i=1, 2) \\ E_p &= E_k = \frac{1}{8} \rho \frac{g}{k} a^2 \frac{1}{\cos \theta} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

kz の増加による E_p の減少、 E_k/E_p は 表-1 に示される。

表-1

kz	θ	E_p	E_k/E_p
0	3°	1	0
	10°	1	0
	30°	1	0
0.1	3°	0.819	0.200
	10°	0.821	0.202
	30°	0.841	0.224
0.2	3°	0.670	0.397
	10°	0.675	0.404
	30°	0.707	0.436
0.5	3°	0.368	1.000
	10°	0.373	0.999
	30°	0.420	1.003
2.0	3°	0.0184	3.983
	10°	0.0195	3.822
	30°	0.0313	2.739
10.0	3°	0.0000	19.466
	10°	0.0000	15.187
	30°	0.0000	3.987

図-2 の trapped wave の一種の場合

$$\left. \begin{aligned} \eta &= a_1 e^{|\beta_1|z} \cos(kx - \omega t) & h_1 \text{ 水深領域} \\ \eta &= 2a_2 \cos \beta_2(z-l) \cos(kx - \omega t) & h_2 \text{ 水深領域} \\ &\dots\dots\dots (9) \\ a_1 &= 2a_2 \cos \beta_2 l & \dots\dots\dots (10) \\ h_1 |\beta_1| &= h_2 \beta_2 \tan \beta_2 l \\ \frac{\omega^2}{gh_i} - k^2 &= \beta_i^2 \quad (i=1, 2) \text{ ただし } \beta_1^2 < 0, \beta_2^2 > 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

式(11)は特性式であり、これから求められる $c = \omega/k$ は、 $\sqrt{gh_1} > c > \sqrt{gh_2}$ である。

局所的な E_p , E_k は

$$\left. \begin{aligned} E_p &= \frac{1}{4} \rho g a_1^2 e^{2|\beta_1|z} & h_1 \text{ 水深領域} \\ &= \rho g a_2^2 \cos^2 \beta_2(z-l) & h_2 \text{ 水深領域} \\ E_k &= \frac{1}{4} \rho \frac{g^2 a_1^2}{\omega^2} h_1 e^{2|\beta_1|z} (k^2 - \beta_1^2) & h_1 \text{ 水深領域} \\ &= \rho \frac{g^2 a_2^2}{\omega^2} h_2 \{ \beta_2^2 \sin^2 \beta_2(z-l) + k^2 \cos^2 \beta_2(z-l) \} & h_2 \text{ 水深領域} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

h_1 水深領域にて

$$\int_{-\infty}^0 (E_k - E_p) dz = \frac{1}{8} \rho \frac{g^2 a_1^2}{\omega^2} \frac{h_1}{|\beta_1|} (k^2 - \beta_1^2) - \frac{1}{8} \rho g a_1^2 \frac{1}{|\beta_1|} = \frac{1}{2} \rho g a_2^2 \sin 2\beta_2 l \frac{gh_2 \beta_2}{\omega^2} \dots\dots (14)$$

h_2 水深領域にて

$$\int_0^l (E_p - E_k) dz = \rho g a_2^2 \frac{1}{\beta_2} \left\{ \frac{1}{2} \beta_2 l + \frac{1}{4} \sin 2\beta_2 l \right\} - \frac{\rho}{2} \frac{g^2 a_2^2}{\omega^2} \left\{ h_2 l (k^2 + \beta_2^2) + \frac{1}{2} \frac{h_2}{\beta_2} \sin 2\beta_2 l \right. \\ \left. \times (k^2 - \beta_2^2) \right\} = \frac{1}{2} \rho g a_2^2 \sin 2\beta_2 l \frac{gh_2 \beta_2}{\omega^2} \dots\dots (15)$$

すなわち h_1 水深領域では波の運動エネルギーがポテンシャルエネルギーよりも大きく、 h_2 水深領域ではその反対となっており、そしてその差は相等しい。したがって全領域については

$$E_p = E_k, \quad E = E_p + E_k = c M_i \quad (i=1, 2) \dots\dots (16)$$

が成立する。

Miles, J.W.⁴⁾ (1957) による、または類似の不安定機構によって風波が非粘性の条件で発達するためには(粘性を考慮しても原則的には変化はない)、局所点で線形には $E = cM$ の関係が成立する²⁾。いま考えている波は全領域についてはこの関係が成立するが、局所点では成立しない。

ゆえに現在の波については、長波は気圧変動、強風、津浪等、比較的短い波は海岸に寄せてくる高波による攪乱等の誘因を考えればよいであろう。

2. エネルギーの輸送

edge wave の線形近似としてのエネルギー輸送は局所点で

$$E_t = \int_{-h}^0 \overline{pud}y = \frac{1}{4} \rho \sqrt{\frac{g}{k} \sin \theta} \frac{ga^2}{\sin^2 \theta} e^{-2kz \cos \theta} \times (1 - e^{-2kz \sin \theta \tan \theta}) = 2c_g E_k \dots\dots\dots (17)$$

式(17)を $z=0$ から ∞ まで積分すれば

$$E_t = c_g E \dots\dots\dots (18)$$

よって全領域ではエネルギーが保存せられるとき

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (c_g E) = 0 \dots\dots\dots (19)$$

が成立する。

この場合の trapped wave は、式(17)と同じに E_t を計算すれば、水深 h_1 , h_2 の領域でのそれぞれの総量は

$$\left. \begin{aligned} (E_t)_{h_1} &= \frac{1}{4|\beta_1|} \rho g^2 \frac{a_1^2}{\omega} k h_1 \\ (E_t)_{h_2} &= \frac{2\rho g^2 a_2^2}{\beta_2 \omega} k h_2 \left(\frac{1}{4} \sin 2\beta_2 l + \frac{\beta_2 l}{2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots (20)$$

式(20)からは水深 h_1 , h_2 の両水域のそれぞれで式(18)を成立させることはできない。

次に全領域について考え、 $E_t = (E_t)_{h_1} + (E_t)_{h_2} = c_E E$ において $c_E = c_g$ を求めてみる。式(11)の特性式で簡単のため $\tan \beta_2 l$ が小さいとして、 $\tan \beta_2 l \simeq \beta_2 l$ とおき、 $d\omega/dk = c_g$ を求めると

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{k(\beta_2^2 - 2\beta_1^2)}{\omega \left(\frac{\beta_2^2}{gh_1} - \frac{2\beta_1^2}{gh_2} \right)} \dots\dots\dots (21)$$

他方 c_E は式(14), (15)の代数計算の各項と式(20)を用いて一般の場合が求められ、これに $\sin 2\beta_2 l \simeq 2\beta_2 l$, $\cos 2\beta_2 l \simeq 1$ を用いて多少の代数計算を行うと、式(21)と一致する結果を得る。これから全領域について式(18), (19)のエネルギーの関係が成立する。恐らく一般の場合にも成立すると思われる。

水底の境界層における粘性損失による波の減衰を波の進行に対して考えるとき、その境界層の厚さが十分小さく、減衰がそれほど急速でないとき、この節の結果を利用すれば、線形近似波の全領域については安定した減衰係数を求め得るわけである。

3. 粘性損失による減衰

edge wave の底の振動性境界層の粘性損失を計算する。粘性係数は一定とする。

図-1 において底の斜面に沿って x 軸に直角に p 軸をとり、考えている点でこれに垂直上向きに γ 軸をとる。

x , y , z 方向の分速度は式(5)から $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ で与えられる。任意の y 点で

$$v/w = -\tan \theta \dots\dots\dots (22)$$

p 方向の分速度は

$$(V)_p = -v \sin \theta + w \cos \theta$$

$$= \frac{a\sigma}{\sin \theta} e^{-kz \cos \theta} e^{ky \sin \theta} \cos(kx - \sigma t) \quad (23)$$

これと x 方向の速度 u とから, ある特定点の速度は大きさ一定で γ 軸のまわりを角速度 σ でまわっている。

また

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(V)_p}{\partial \gamma} &= \frac{\partial(V)_p}{\partial y} \cos \theta + \frac{\partial(V)_p}{\partial z} \sin \theta = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \gamma} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

γ 軸の方向の速度 $(V)_r$ は

$$(V)_r = v \cos \theta + w \sin \theta = 0 \dots\dots\dots (25)$$

底に沿って $y = -z \tan \theta$, これを式(23)に用い, また底に沿っての x 軸からの距離 $z' = \frac{z}{\cos \theta}$ を用いれば, 底に沿う非回転速度は

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{a\sigma}{\sin \theta} e^{-kz'} \sin(kx - \sigma t) \\ V_1 &= \frac{a\sigma}{\sin \theta} e^{-kz'} \cos(kx - \sigma t) \end{aligned} \right\} \dots\dots (26)$$

これに対応する粘性による補足速度 u_2, V_2 は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial z'^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \gamma^2} \right) \\ \frac{\partial V_2}{\partial t} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial z'^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial \gamma^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots (27)$$

ただし $V_1 + V_2 = 0, u_1 + u_2 = 0, \gamma = 0$ においてこれを解き

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= -\frac{a\sigma}{\sin \theta} e^{-kz'} e^{\alpha \gamma} \sin(kx - \sigma t - \alpha \gamma) \\ V_2 &= -\frac{a\sigma}{\sin \theta} e^{-kz'} e^{\alpha \gamma} \cos(kx - \sigma t - \alpha \gamma) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ただし $\alpha \gamma = \alpha i = -(\sigma/2\nu)^{1/2}$

単位時間の粘性損失は

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int_0^{r \rightarrow \text{great}} \mu \left\{ \left(\frac{\partial u_2}{\partial \gamma} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial \gamma} \right)^2 \right\} d\gamma$$

$$= -\mu \frac{a^2 \sigma^2}{\sin^2 \theta} \alpha \gamma e^{-2kz'}, \quad z' = \frac{z}{\cos \theta} \dots\dots\dots (29)$$

底の粘性損失は z 方向に exponential に変化する。 z' 方向につき全損失を求めると

$$\int_0^\infty \frac{\partial E}{\partial t} dz' = -\frac{\mu}{2k} \frac{a^2 \sigma^2}{\sin^2 \theta} \alpha \gamma \dots\dots\dots (30)$$

これから進行にともなう波の減衰を求めると

$$a = a_0 \exp \left(\frac{\alpha \gamma 2\nu k \cot \theta}{c} x \right) \dots\dots\dots (31)$$

この減衰係数は θ が小さいとき, 次の式(32)の第1式となる。第2式は long-crested な長波に対するものである。

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{\sqrt{2} \nu^{1/2} k^{7/4}}{g^{1/4} \theta^{5/4}} \\ & -\frac{\sqrt{2} \nu^{1/2} k^{7/4}}{4 g^{1/4} (kh)^{5/4}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

表-2 は式(32)第1式で $\theta^{5/4}$ を $\sin^{1/4} \theta \tan \theta$ とおきもどして行った数値計算の結果である ($\nu = 0.01$, C.G.S. 単位使用)。この結果は波長 63 m, $\nu = 1$ (C.G.S.) のとき, $\theta = 3^\circ, 10^\circ, 30^\circ$ に対して 1000 m の進行につき, (一) 5.672, 1.248, 0.2927 を示して, 急傾斜海岸における比較的短波長の edge wave の存在の可能性を示唆する。

また z 方向に local な点で仮想的な a の減衰を求めることができるが, この減衰係数が式(31)に数値的に近くなるのは $\theta = 3^\circ, 10^\circ, 30^\circ$ のいずれに対しても $kz = 0.5$ の付近である。したがってより高い近似の粘性解では $kz \div 0.5$ の沖方から岸方に向ってのエネルギーとモーメントの輸送が必要であらう。

図-2 の trapped wave についても, 同様の粘性損失

表-2 減 衰 係 数 (単位: C.G.S.)

θ	k	1 ($L = 6.28$ cm)	0.1 (62.8 cm)	0.01 (628 cm)	0.001 (6280 cm)	0.0001 (62800 cm)
3°	(-)	1.008	0.179×10^{-1}	0.318×10^{-3}	0.567×10^{-5}	0.100×10^{-6}
10°	(-)	0.222	0.394×10^{-2}	0.702×10^{-4}	0.125×10^{-5}	
30°	(-)	0.520×10^{-1}	0.925×10^{-3}	0.164×10^{-4}	0.292×10^{-6}	

表-3 減 衰 係 数 (単位: C.G.S.)

l	100			100			100		
k	0.02142			0.009171			0.002814		
L	293			685			2232		
h_2	2	5	10	2	5	10	2	5	10
h_1	3.114	7.787	15.574	6.229	15.574	31.148	31.148	77.87	155.74
c	$0.8846 \sqrt{gh_1}$			$0.8380 \sqrt{gh_1}$			$0.9352 \sqrt{gh_1}$		
減衰係数	0.374×10^{-3}	0.119×10^{-3}	0.500×10^{-4}	0.182×10^{-3}	0.581×10^{-4}	0.244×10^{-4}	0.181×10^{-4}	0.578×10^{-5}	0.243×10^{-5}

を求め、式(31)と同形に表現できる。長波として側壁による損失を無視した場合の数値計算の結果を表-3に示す($\nu=0.01$, C.G.S. 単位使用)。類似の水深波長に対してこの場合の減衰係数は edge wave の場合よりも大分小さい。

附: 今回取扱った波の名称は正確な区別が与えられているかどうか不明のため、便宜上用ている。

参 考 文 献

- 1) Luke, J.C.: A variational principle for a fluid with

a free surface, Journal of Fluid Mech., Vol. 27, (1967).

- 2) 浜田徳一: 水面波の2, 3の性質について, 港湾技術研究所報告, 第10巻第2号 (1971)
- 3) Lamb, H.: Hydrodynamics, Cambridge Univ. Press. (1932).
- 4) Miles, J.W.: On the generation of surface waves by shear flows, Journal of Fluid Mech., Vol. 3, (1957).