

新しいクノイド波理論の試み

土 屋 義 人*・安 田 孝 志**

1. 緒 言

従来、有限振幅波理論はいわゆる速度ポテンシャルで表示した楕円型の偏微分方程式に基づくか、あるいはいわゆる浅水波理論として展開されてきており、いずれも波動に対する条件を水面変動のみならず波動の場の内部まで拘束させて、それらのせつ動解を求めてきている。そのために、これらの方法では、波の位相速度を数学的には決定できないので、物理的付加条件として波速の定義を導入している。この点に関しては、すでに Stokes¹⁾ 以来指摘されておりながら、現在なおその根本的な解決がなされず、ただ1つの有効な方向を Keulegan-Patterson²⁾ らによって解説されている Boussinesq の取扱いにみることができるだけである。しかしながら、海岸における波浪の変形を取扱う場合には、有限振幅波の特性を正しく知ることが不可欠であり、特に沿岸流の発生に寄与している質量輸送の現象は、有限振幅波理論の高次解の検証としても重要である。著者ら³⁾ は、すでに有限振幅波理論における波速の定義が波の質量輸送速度の決定に根本的な影響を及ぼすことを指摘して若干の追計算を行い、その問題点の究明に努めてきた。前述したように、従来の有限振幅波理論のほとんどが、水面の変動とその内部の流体運動のいずれに対しても、波動運動を規定する条件たとえば周期運動であることなどを付加して数学的な解の展開を行ってきたわけであるが、その理論から非周期的な質量輸送の現象が計算されることになって、波動理論の不統一な側面に大きな疑問を抱いてきた。この点を根本的に解決するための1つの試みとして、流体内部にはなんらの拘束を及ぼさない条件で、水面の変動に対してのみ波動運動を仮定することにした理論を展開したので、その概要を述べる。すなわち、本論文では、Gardner-Morikawa 変換⁴⁾ を速度ポテンシャルが存在する場での流体運動の基礎方程式に適用することによって、水面変動のみの波動方程式に変換されることを示し、その基礎方程式のせつ動解を求めて、新しい1つのクノイド波理論を提案するものである。その結果、波速は必然的に特性曲線によって定義され、従来の Stokes による波速の物理的定義は不要となり、また Bernoulli 定数

をせつ動するという問題も起こらず、従来の有限振幅波理論における欠陥を十分克服できることを示す。さらに、この理論の第2次近似における波動方程式をいわゆる WKB 法によって解くことにより、波の峯付近に高周波成分の波が発生する可能性のあることも明らかにするつもりである。

2. 波動方程式の誘導

(1) 基礎方程式

速度ポテンシャル ϕ の存在する波動運動を考え、かつ座標と記号を図-1に示すようにとることにすれば、その基礎方程式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 \\ \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + g(z-h)|_{z=\eta} &= 0 \\ \eta_t + \eta_x \phi_x - \phi_z|_{z=\eta} &= 0 \\ \phi_z|_{z=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 g は重力の加速度である。任意の外乱によって生ずる波動運動に対して独立な量は、水深 h であるから、これを基準長として次の無次元量を定義する。

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \phi/h \sqrt{gh}, \quad x^* = x/h, \quad z^* = z/h, \quad t^* = t \sqrt{g/h}, \\ \eta^* &= \eta/h, \quad P^* = p/\rho gh \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

式(2)を用いて式(1)を書き換えると、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= 0 \\ \Phi_{t^*} + \frac{1}{2}(\Phi_{x^*}^2 + \Phi_{z^*}^2) + \eta^* - 1|_{z^*=\eta^*} &= 0 \\ \eta_{t^*}^* + \eta_{x^*}^* \Phi_{x^*} - \Phi_{z^*}|_{z^*=\eta^*} &= 0 \\ \Phi_{z^*}|_{z^*=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

(2) 基礎式の誘導

式(1)または式(3)に基づいて、速度ポテンシャル ϕ または Φ に対して波動の周期性を仮定して解を求める

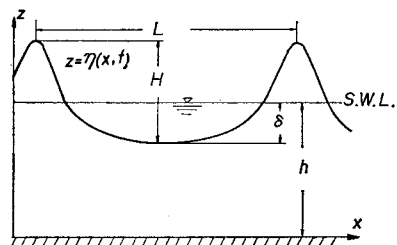


図-1 座標系および記号の説明

* 正 会 員 工 博 京都大学教授 防災研究所

** 学生会員 工 修 京都大学大学院工学研究科博士課程

と、たとえば Stokes 波理論やあるいはまたクノイド波理論のように、それは波動の場の内部に対しても拘束し、波速に対する物理的な定義を付加しなければ解が確定しないことになる。すなわち、Le Méhauté⁵⁾ や土屋³⁾ がすでに指摘しているように、このような波速の定義によって解が異なり、それは波速、水粒子速度をはじめ 2 次の量である質量輸送などに対してはきわめて大きな影響を及ぼす。したがって、ここでは式 (3) に基づいて、波動の場の内部を拘束しないことを前提として、水面の変動にのみ波の周期性を仮定した場合の permanent type の波動論を展開することを試みる。そのために、速度ポテンシャル Φ で表わされた基礎方程式を水面変動のみの微分方程式に変換することを考える。すなわち、式 (3) に対して、次に示す Gardner-Morikawa 変換、

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x^* - t^*), \quad \tau = \varepsilon^{3/2}t^*, \quad z = z^* \dots \dots \dots (4)$$

を行い、また次式で表わされるせつ動解が可能であると仮定する。ここに、 $\varepsilon = (h/L)^2$ であり、 h は平均水深および L は波長である。

$$\left. \begin{aligned} \eta^*(x^*, t^*) &= 1 + \varepsilon h_1(\xi, \tau) + \varepsilon^2 h_2(\xi, \tau) + \dots \\ \Phi(x^*, z^*, t^*) &= \varepsilon^{1/2} \phi_1(\xi, \tau, z) + \varepsilon^{3/2} \phi_2(\xi, \tau, z) + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

一方、 $z^* = \eta^*$ における $\Phi(x^*, \eta^*, t^*)$ を $z^* = 1$ の周りに Boussinesq にならって、次のように Taylor 展開する。

$$\begin{aligned} \Phi(x^*, \eta^*, t^*) &= \Phi(x^*, 1, t^*) + \eta^* \Phi_{z^*}(x^*, 1, t^*) \\ &+ \frac{1}{2} (\eta^*)^2 \Phi_{z^* z^*}(x^*, 1, t^*) + \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

かようにすれば、式 (3) はそれぞれ式 (7), (8), (9) および (10) のように展開される。

$$\varepsilon^{1/2} \phi_{1zz} + \varepsilon^{3/2} (\phi_{2zz} + \phi_{1\xi\xi}) + \varepsilon^{5/2} (\phi_{3zz} + \phi_{2\xi\xi}) + \varepsilon^{7/2} (\phi_{4zz} + \phi_{3\xi\xi}) + \varepsilon^{9/2} (\phi_{5zz} + \phi_{4\xi\xi}) + \dots = 0 \dots \dots \dots (7)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon (h_1 - \phi_{1\xi}) + \varepsilon^2 \left(-\phi_{2\xi} + \phi_{1\tau} + \frac{1}{2} \phi_{1\xi}^2 + h_2 \right) + \varepsilon^3 \left(-h_1 \phi_{2\xi z} - h_2 \phi_{1\xi z} - \frac{1}{2} h_1^2 \phi_{1\xi z z} - \phi_{3\xi} + \phi_{2\tau} + h_1 \phi_{1\tau z} \right. \\ \left. + \phi_{1\xi} \phi_{2\xi} + h_1 \phi_{1\xi} \phi_{1\xi z} + \frac{1}{2} \phi_{2z}^2 + h_1 \phi_{2z} \phi_{1zz} + \frac{1}{2} h_1^2 \phi_{1zz}^2 + h_3 \right) + \varepsilon^4 \left(-\phi_{4\xi} - h_1 \phi_{3\xi z} - h_2 \phi_{2\xi z} - \frac{1}{2} h_1^2 \phi_{2\xi z z} \right. \\ \left. - h_3 \phi_{1\xi z} - h_1 h_2 \phi_{1\xi z z} - \frac{1}{6} h_1^3 \phi_{1\xi z z z} + \phi_{3\tau} + h_1 \phi_{2\tau z} + h_2 \phi_{1\tau z} + \frac{1}{2} h_1^2 \phi_{1\tau z z} + \phi_{2z} \phi_{3z} + h_1 \phi_{2z} \phi_{2zz} \right. \\ \left. + h_2 \phi_{2z} \phi_{1zz} + h_1 \phi_{1zz} \phi_{3z} + h_1^2 \phi_{1zz} \phi_{2zz} + h_1 h_2 \phi_{1zz} \phi_{1zz} + \frac{1}{2} h_1^3 \phi_{1zz} \phi_{1zz z} + \phi_{1\xi} \phi_{3\xi} + h_1 \phi_{1\xi} \phi_{2\xi z} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \phi_{2\xi}^2 + h_2 \phi_{1\xi} \phi_{1\xi z} + \frac{1}{2} h_1^2 \phi_{1\xi z}^2 + \frac{1}{2} h_1^2 \phi_{1\xi} \phi_{1\xi z z} + h_4 \right) + O(\varepsilon^5) |_{z=1} = 0 \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{1/2} \phi_{1z} + \varepsilon^{3/2} \left(-h_{1\xi} - \phi_{2z} - h_1 \phi_{1zz} \right) + \varepsilon^{5/2} \left(-h_{2\xi} + h_{1\tau} + h_{1\xi} \phi_{1\xi} - \phi_{3z} - h_1 \phi_{2zz} - h_2 \phi_{1zz} - \frac{1}{2} h_1^2 \phi_{1zz z} \right) \\ + \varepsilon^{7/2} \left(-h_{3\xi} + h_{2\tau} + h_{2\xi} \phi_{1\xi} + h_{1\xi} \phi_{2\xi} + h_1 h_{1\xi} \phi_{1\xi z} - \frac{1}{2} h_1^2 \phi_{2zz z} - h_2 \phi_{2zz} - \frac{1}{6} h_1^3 \phi_{1zz z z} - h_3 \phi_{1zz} \right. \\ \left. - h_1 h_2 \phi_{1zz z} - h_1 \phi_{3zz} - \phi_{4z} \right) + \varepsilon^{9/2} \left(-h_{4\xi} + h_{3\tau} + h_{3\xi} \phi_{1\xi} + h_1 h_{2\xi} \phi_{1\xi z} + h_{2\xi} \phi_{2\xi} + h_{1\xi} \phi_{3\xi} + h_1 h_{1\xi} \phi_{2\xi z} \right. \\ \left. + h_2 h_{1\xi} \phi_{1\xi z} + \frac{1}{2} h_1^2 h_{1\xi} \phi_{1\xi z z} - \phi_{5z} - h_1 \phi_{4zz} - h_2 \phi_{3zz} - \frac{1}{2} h_1^2 \phi_{3zz z} - h_3 \phi_{2zz} - h_1 h_2 \phi_{2zz z} - \frac{1}{6} h_1^3 \phi_{2zz z z} \right. \\ \left. - h_4 \phi_{1zz} - h_1 h_3 \phi_{1zz z} - \frac{1}{2} h_1^2 \phi_{1zz z z} - \frac{1}{24} h_1^4 \phi_{1zz z z z} \right) + O(\varepsilon^{11/2}) |_{z=1} = 0 \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

$$\varepsilon^{1/2} \phi_{1z} + \varepsilon^{3/2} \phi_{2z} + \varepsilon^{5/2} \phi_{3z} + \varepsilon^{7/2} \phi_{4z} + \dots |_{z=0} = 0 \dots \dots \dots (10)$$

ここに、 $O(\varepsilon^n)$ は ε^n と同じオーダーを示す。以上の諸式より、次式が誘導される。

$$\begin{aligned} \left\{ h_{1\tau} + \frac{3}{2} h_1 h_{1\xi} + \frac{1}{6} h_{1\xi\xi\xi} \right\} + \varepsilon \left\{ h_{2\tau} + \frac{3}{2} (h_1 h_{2\xi}) + \frac{1}{6} h_{2\xi\xi\xi} \right\} + \varepsilon^2 \left\{ h_{3\tau} + \frac{3}{2} (h_1 h_{3\xi}) + \frac{3}{2} h_2 h_{2\xi} + \frac{1}{6} h_{3\xi\xi\xi} \right\} \\ + \dots = \varepsilon F_0 + \varepsilon^2 F_1 + \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= -\frac{3}{2} h_{1\xi} h_{1\xi\xi} - \frac{2}{3} h_1 h_{1\xi\xi\xi} - \frac{1}{6} h_{1\xi\xi\xi\xi} - \frac{3}{2} h_1^2 h_{1\xi} - \frac{3}{2} h_1 h_{1\tau} - h_{1\xi} \phi_{0\tau} - \frac{1}{2} \phi_{0\tau\tau} - \frac{1}{15} h_{1\xi}^5 \\ F_1 &= -\frac{17}{630} h_{1\xi}^7 - 2 h_{1\xi\xi} h_{1\xi\xi\xi} - \frac{4}{3} h_1 h_{1\xi}^4 - \frac{2}{5} h_1 h_{1\xi}^5 - \frac{15}{12} h_1 h_{1\xi} h_{1\xi\xi} - \frac{1}{15} h_{1\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{15} h_{2\xi}^5 \\ &\quad - \frac{1}{6} h_{2\xi\xi\xi} - \frac{5}{3} h_{1\xi\xi} h_{1\tau} - \frac{4}{3} h_{1\xi} h_{1\xi\tau} - \frac{5}{6} h_1 h_{1\xi\xi\tau} - \frac{3}{2} h_{1\xi} h_{2\xi\xi} - \frac{2}{3} h_1 h_{2\xi\xi\xi} - \frac{3}{2} h_{1\xi\xi} h_{2\xi} \\ &\quad - \frac{2}{3} h_{1\xi\xi\xi} h_2 - \frac{5}{2} (h_{1\xi})^3 - \frac{5}{4} h_1^3 h_{1\xi\xi\xi} - \frac{1}{6} h_{1\xi\xi\xi} \phi_{0\tau} + \frac{1}{12} h_{1\xi\xi\tau} - 3 h_1 h_2 h_{1\xi} - \frac{5}{2} h_1 h_{1\xi} \phi_{0\tau} - \frac{9}{4} h_1^3 h_{1\xi} \\ &\quad - h_{1\xi} \phi_{\tau\tau} - \frac{3}{2} h_1^2 h_{2\xi} - 3 h_1^2 h_{1\tau} - \frac{3}{2} h_1 h_{2\tau} - \frac{3}{2} h_1 \phi_{0\tau} - \frac{3}{2} h_2 h_{1\tau} - h_{2\xi} \phi_{0\tau} - h_{1\tau} \phi_{0\tau} - \frac{1}{2} \phi_{\tau\tau} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \phi_0(\xi, \tau), \quad \phi_2 = -\frac{1}{2} z^2 \phi_{0\xi\xi} + \varphi(\xi, \tau), \quad \phi_3 = \frac{1}{24} z^4 \phi_{0\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{2} z^2 \varphi_{\xi\xi} + \psi(\xi, \tau) \\ \phi_4 &= -\frac{1}{720} z^6 \phi_{0\xi^6} + \frac{1}{24} z^4 \varphi_{\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{2} z^2 \psi_{\xi\xi} + \Lambda(\xi, \tau) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{0\xi} &= h_1, \quad \varphi_\xi = h_2 + \phi_{0\tau} + \frac{1}{2} h_1^2 + \frac{1}{2} h_{1\xi\xi}, \quad \psi_\xi = h_1 h_{1\xi\xi} - \frac{1}{24} h_{1\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{2} h_{1\xi\tau} - \frac{1}{2} h_1 h_{1\xi\xi} \\ &+ \frac{1}{2} h_{1\xi}^2 + h_3 + \frac{1}{2} \varphi_{\xi\xi\xi} + \varphi_\tau + h_1 \varphi_\xi, \quad \Lambda_\xi = \frac{1}{720} h_1 \xi^6 - \frac{1}{24} \varphi_{\xi^5} + \frac{1}{2} \psi_{\xi\xi\xi} - \frac{1}{6} h_1 h_{1\xi\xi\xi\xi} \\ &+ h_1 \varphi_{\xi\xi\xi} + h_2 h_{1\xi\xi} + \frac{1}{2} h_1^2 h_{1\xi\xi} + \frac{1}{24} h_{1\xi\xi\xi\tau} - \frac{1}{2} \varphi_{\xi\xi\tau} + \phi_\tau - h_1 h_{1\xi\tau} - \frac{1}{6} h_{1\xi} h_{1\xi\xi\xi} + h_{1\xi} \varphi_\xi \\ &+ h_1 h_1 h_{1\xi\xi} + h_4 + \frac{1}{24} h_1 h_{1\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{2} h_1 \varphi_{\xi\xi\xi} - h_1^2 h_{1\xi\xi} - \frac{1}{8} h_{1\xi\xi}^2 + \frac{1}{2} \varphi_\xi^2 - \frac{1}{4} h_{1\xi\xi} \varphi_\xi + h_1 \varphi_\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

式(11)をさらに変形すれば、次の双曲型偏微分方程式が誘導され、これが式(3)を水面変動のみで表わした浅海での波動方程式である。

$$\begin{aligned} \zeta_\tau + \frac{3}{2} \zeta \zeta_\xi + \frac{1}{6} \zeta_{\xi\xi\xi} &= -\varepsilon \left\{ \frac{1}{15} \zeta_{\xi\xi\xi\xi\xi} + \frac{1}{6} \zeta_{\xi\xi\tau} \right. \\ &+ \frac{3}{2} \zeta_{\xi\xi} \zeta_\xi + \frac{2}{3} \zeta_{\xi\xi\xi} + \frac{3}{2} \zeta^2 \zeta_\xi + \frac{3}{2} \zeta \zeta_\tau + \zeta_\xi \Omega_\tau \\ &\left. + \frac{1}{2} \Omega_{\tau\tau} \right\} + \varepsilon^2 F^*(\zeta) \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$\Omega_\xi - \zeta = \varepsilon \left\{ \Omega_\tau + \zeta \Omega_\xi + \frac{1}{2} \zeta_{\xi\xi} - \frac{1}{2} \zeta^2 \right\} + \varepsilon^2 G(\zeta) \quad (16)$$

ここに、

$$\zeta = h_1 + \varepsilon h_2 + \varepsilon^2 h_3 + \dots \dots\dots (17)$$

式(15)において $\varepsilon=0$ とすれば、いわゆる Korteweg de Vries 方程式に一致する。式(15)の右辺を $\varepsilon F(\zeta)$ と表わせば、その特性曲線として次式が得られる。

$$d\xi/d\tau = \frac{3}{2} \zeta + \zeta_{\xi\xi\xi}/6 \zeta_\xi - \varepsilon F(\zeta)/\zeta_\xi \dots\dots\dots (18)$$

式(18)の右辺第3項はいわゆる Korteweg de Vries 方程式の高次修正として現われるものであって、分散性および非線型性の増大とともにこれらの寄与が増大するものと考えられる。すなわち、第1項および第2項がそれぞれいわゆる steepening deviation および smoothing deviation を表わすのに加えて、第3項による変形が生じることになる。式(17)において $d\xi/d\tau = \text{const.}$ となるような波が、いわゆる permanent type wave に相当するので、以下その場合の基礎式の変形を行う。いま、式(18)で表わされる波速が次式のように展開できると仮定する。

$$d\xi/d\tau = c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \dots = c^* (= \text{const.}) \quad (19)$$

そして、 $\tau = \xi - c^* \tau$ で表わされる変換を行えば、式(15)は次のような常微分方程式に書き換えられる。

$$\begin{aligned} -c^* \zeta_\tau + \frac{3}{2} \zeta \zeta_\tau + \frac{1}{6} \zeta_{\tau\tau\tau} &= -\varepsilon \left\{ \frac{1}{15} \zeta_{\tau\tau\tau\tau\tau} \right. \\ &- \frac{1}{6} c^* \zeta_{\tau\tau\tau} + \frac{3}{2} \zeta_\tau \zeta_{\tau\tau} + \frac{2}{3} \zeta \zeta_{\tau\tau\tau} + \frac{3}{2} \zeta^2 \zeta_\tau \\ &\left. - \frac{5}{2} c^* \zeta \zeta_\tau + \frac{1}{2} c^{*2} \zeta_\tau \right\} + \varepsilon^2 F^{**}(\zeta) \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

これが、前述した permanent type の波の代表的なものとして従来考えられてきたクノイド波および孤立波に対するせつ動解の基礎方程式である。ところで、式(20)は最高階の微係数 $\zeta_{\tau\tau\tau\tau\tau}$ に微小パラメータ ε がかかっているため、その解を左辺の厳密解の周りに ε で級数展開する通常のせつ動法が適用できるためには、 $\zeta_{\tau\tau\tau} \sim 2/5 \zeta_{\tau\tau\tau\tau\tau}$ となるような比較的平滑な波であることが必要条件になると思われる。このことは、Laitone⁶⁾ のクノイド波理論でも、すでに高次微係数が現われていることから、全く同様な条件が必要になるものと考えられる。したがって、ここでは、式(20)に対して式(17)で示すようなせつ動解が可能であると仮定して理論を展開することにする。

3. クノイド波および孤立波に対するせつ動解

(1) 第1次近似解

第1次近似解に対しては、式(20)から次式が得られる。

$$-c_0 h_{1\tau} + \frac{3}{2} h_1 h_{1\tau} + \frac{1}{6} h_{1\tau\tau\tau} = 0 \dots\dots\dots (21)$$

上式の解は、周知のように Korteweg de Vries によって与えられた次式で表わされる。

$$h_1 = \zeta_2 + (\zeta_3 - \zeta_2) \text{cn}^2(\eta/\beta) \dots\dots\dots (22)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \beta^2 &= 4/3(\zeta_3 - \zeta_1), \quad k^2 = (\zeta_3 - \zeta_2)/(\zeta_3 - \zeta_1) \\ c_0 &= \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

であり、また ζ_1, ζ_2 および ζ_3 はいずれも積分定数で、 $\zeta_3 > \zeta_2 > \zeta_1$ である。そして、これらは後述する J_1 を用いて次の条件によって決定される。

$$\left. \begin{aligned} H/h &= \varepsilon(\zeta_{\max} - \zeta_{\min}) = \varepsilon(\zeta_3 - \zeta_2) \\ \int_0^{2F} \zeta d(\eta/\beta) &= \zeta_2 + (\zeta_3 - \zeta_2) J_1 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

その結果、これらの3つの積分定数および式(21)中の c_0 は、次式によって表わされる。

$$\begin{aligned} \varepsilon \zeta_1 &= -\frac{1}{k^2} (H/h)(E/F), \quad \varepsilon \zeta_2 = \frac{1}{k^2} (H/h) \\ &\times (1 - E/F - k^2), \quad \varepsilon \zeta_3 = \frac{1}{k^2} (H/h)(1 - E/F) \\ c_0 &= (1/2k^2)(H/h)\{2 - 3(E/F) - k^2\} \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

ここに、 k は楕円積分の母数であり、 F および E はそれぞれ第1および第2種完全楕円積分である。したがって、第1次近似解での波形は、

$$\begin{aligned} \zeta/h &= (H/h) \operatorname{cn}^2(\gamma/\beta) - (H/h)(E/F - 1 + k^2)/k^2 \\ \gamma/\beta &= (3(H/h)/4k^2)^{1/2}(x - ct)/h \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

で表わされ、また 図-1 に示す波の谷から平均水面までの高さ δ は、

$$\delta/h = (H/h)(E/F - 1 + k^2)/k^2 \dots\dots\dots (27)$$

となり、波速は次式となる。

$$c/\sqrt{gh} = 1 + (H/h)(1/2k^2)\{2 - 3(E/F) - k^2\} \dots\dots\dots (28)$$

さらに、水平および鉛直方向の水粒子速度をそれぞれ u および w とすれば、それらは次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u/\sqrt{gh} &= (H/h) \operatorname{cn}^2(\gamma/\beta) - (H/h) \\ &\quad \times (E/F - 1 + k^2)/k^2 \\ w/\sqrt{gh} &= [3(H/h)^3/k^2]^{1/2} \\ &\quad \times z \operatorname{cn}(\gamma/\beta) \operatorname{sn}(\gamma/\beta) \operatorname{dn}(\gamma/\beta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

また、波動に伴う圧力は、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} p/\rho gh &= 1 - z + (H/h) \operatorname{cn}^2(\gamma/\beta) \\ &\quad - (H/h)(E/F - 1 + k^2)/k^2 \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

なお、孤立波の場合には、 $k=1$ および $E/F=0$ となるので、周知の第1次近似解が得られることになる。

(2) 第2次近似解

第2次近似解に対する基礎方程式は、式(20)から次式で与えられる。

$$\begin{aligned} -c_0 h_{2rr} + \frac{3}{2}(h_1 h_2)_r + \frac{1}{6} h_{2rrr} &= \frac{3}{20}(h_{1r}^2)_r - \frac{3}{10}(h_{1r}^3)_r \\ &+ \frac{21}{10} c_0 (h_1^2)_r - \frac{19}{10} c_0^2 h_1 r + c_1 h_{1r} \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

これは h_2 に関する3階の非同次線型常微分方程式であるが、 γ で1回積分すると、次の2階の常微分方程式となる。

$$\begin{aligned} -c_0 h_2 + \frac{3}{2} h_1 h_2 + \frac{1}{6} h_{2rr} &= \frac{3}{20}(h_{1r})^2 - \frac{3}{10} h_1^3 \\ &+ \frac{21}{10} c_0 h_1^2 - \frac{19}{10} c_0^2 h_1 + c_1 h_1 + \text{const.} \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

式(31)の一般解はそれが線形方程式であるために、その斉次方程式

$$h_{2rr} + (9h_1 - 6c_0)h_2 = 0 \dots\dots\dots (33)$$

の一般解 $(h_2)_h$ と式(32)の特解 $(h_2)_p$ とを重ね合わせた解によって与えられる。まず、特解について考えることにすれば、水面変動が周期的であるためには、式(32)の積分定数 $\text{const.}=0$ とすべきであるから、次式が得られる。

$$(h_2)_p = A_1 \operatorname{cn}^4(\gamma/\beta) + A_2 \operatorname{cn}^2(\gamma/\beta) + A_3 \dots\dots\dots (34)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{3}{4}(\zeta_3 - \zeta_2)^2, \quad A_2 = \frac{1}{2}(\zeta_3 - \zeta_2)(\zeta_1 + 4\zeta_2 + \zeta_3) \\ A_3 &= -\frac{9}{20}(\zeta_3 - \zeta_2)(\zeta_2 - \zeta_1) - \frac{19}{60}(\zeta_3 + \zeta_1)^2 \\ &\quad + \frac{1}{60}\zeta_2(29\zeta_2 + 46\zeta_1 + 29\zeta_3) + \frac{2}{3}c_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

一方、一般解 $(h_2)_h$ に対しては、式(33)を式(21)を用いて変形すると、次の Sturm-Liouville 型微分方程式となり、その解を求めることになる。

$$h_{2rr} + \sigma^2 P(\gamma)h_2 = 0 \dots\dots\dots (36)$$

ここに、

$$P(\gamma) = 3 \operatorname{cn}^2(\gamma/\beta) + 1/k^2 - 2, \quad \sigma^2 = 3(HL^2/h^3) \dots\dots\dots (37)$$

一般に $\sigma \gg 1$ であることから、WKB 法が適用できる。すなわち、式(37)において $P(\gamma)$ は転位点をもつので、 $P(\gamma)$ の各領域で求めた解を解析的に接続させて、式(36)の一般解を求めることができる。ここでは、その1例として $h/H=6$ および $T\sqrt{g/h}=30$ の場合の波について計算した結果を図-2に示す。この場合、主波に対してこの一般解で表わされる波はその位相のみを一致させ、振幅に関しては便宜的に主波と同じスケールで与えているが、これから第2次近似解において主波に重じゅうされる高周波成分波の発生の可能性を示すものと考えられる。このことからこの解は浅海における波の分裂に大きく関係するものと思われるが、なお数学的な追求が必要であることはいうまでもなく、さらに詳細な検討を行う予定である。したがって、クノイド波の第2次近似解としては前述した特解のみを考えることにする。すなわち、水面変動を次式で表わす。

$$\zeta = h_1 + \varepsilon(h_2)_p \dots\dots\dots (38)$$

さて、 ζ に関する次の水面形の条件から、3つの積分定数 ζ_1, ζ_2 および ζ_3 が決定される。

$$\left. \begin{aligned} H/h &= \varepsilon(\zeta_{\max} - \zeta_{\min}) = \varepsilon(\zeta_3 - \zeta_2) + \varepsilon^2(A_1 + A_2) \\ \int_0^{2F} \zeta d(\gamma/\beta) &= 0, \quad \gamma/\beta = \left[\frac{3}{4}(\zeta_3 - \zeta_1) \right]^{1/2} (\xi - c^* \tau) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

すなわち、積分定数 ζ_1, ζ_2 および ζ_3 は、次式で求められる。

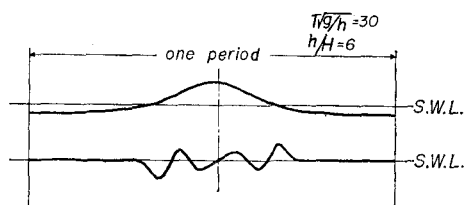


図-2 第2次近似解による高周期波の発生

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \zeta_2 &= \{2k^2 J_1 / [10 - 5k^2 - 12(E/F)]\} \{1 - [1 \\ &\quad + (1/k^2)(H/h)(10 - 5k^2 - 12(E/F))]^{1/2}\} \\ \zeta_3 &= \{(J_1 - 1)/J_1\} \zeta_2 \\ \zeta_1 &= (1/k^2) \zeta_2 - (1/k^2)(1 - k^2) \zeta_3 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

ここに、 $J_1 = (E/F - 1 + k^2)/k^2$ であり、また式(39)中の γ/β の表示に基づいて母数 k は次式から決定される。

$$2F(k) - \left[\frac{3}{4} \varepsilon (\zeta_3 - \zeta_1) \right]^{1/2} c^* T \sqrt{g/h} = 0 \quad \dots (41)$$

ところが、 ζ_2 を有理式の形で表示するために、その右辺第2項を $(1/k^2)(H/h) \ll 1$ と仮定して展開すれば、次式のようになる。

$$\begin{aligned} [1 + (1/k^2)(H/h)(10 - 5k^2 - 12)(E/F)]^{1/2} &\sim 1 \\ + \frac{1}{2k^2} (H/h)s - (1/8k^4)(H/h)s^2 & \\ + (1/16k^6)(H/h)s^3 \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (42)$$

ここに、 $s = 10 - 5k^2 - 12(E/F)$ であり、たとえば $k=1$ とすれば、 $s=5$ となり、したがって $(1/k^2)(H/h) \ll 1$ でない限り、式(41)の収束性は必ずしもよくないが、実用上ここでは $(1/k^4)(H/h)^2$ のオーダーまでで第2次近似解を表わせば、次式のようになる。ただし、 $(1/k^2)(H/h) \ll 1$ が満たされない場合、特に $T\sqrt{g/h}$ の値が小さくなると、式(41)による近似は十分でなくなるので、式(40)をそのまま用いて計算しなければならない。まず、前述した3つの積分定数は $(1/k^2)(H/h) \ll 1$ の範囲に対して、近似的に次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \zeta_1 &= -(1/k^2)(E/F)(H/h) \{1 + (1/4k^2) \\ &\quad \times [12(E/F) + 5k^2 - 10](H/h)\} \\ \varepsilon \zeta_2 &= -(1/k^2)(E/F - 1 + k^2)(H/h) \{1 + (1/4k^2) \\ &\quad \times [12(E/F) + 5k^2 - 10](H/h)\} \\ \varepsilon \zeta_3 &= (1/k^2)(1 - E/F)(H/h) \{1 + (1/4k^2) \\ &\quad \times [12(E/F) + 5k^2 - 10](H/h)\} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

したがって、式(34)の係数は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^2 A_1 &= \frac{3}{4} (H/h)^2 \\ \varepsilon^2 A_2 &= (1/2k^2)(H/h)^2 \{5 - 4k^2 - 6(E/F)\} \\ \varepsilon^2 A_3 &= (1/4k^4)(H/h)^2 \{5k^4 - 13k^2 + 8\} \\ &\quad + (1/k^4)(E/F)(H/h)^2 \{4k^2 - 5 + 3(E/F)\} \\ \varepsilon^2 c_1 &= (1/40k^4)(H/h)^2 \{75k^4 - 176k^2 + 120\} \\ &\quad + (1/40k^4)(E/F)(H/h)^2 \{153(E/F) \\ &\quad - 292 + 202k^2\} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

以上、このクノイド波理論の $(1/k^2)(H/h) \ll 1$ に対する第2次近似解によれば、その波形は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \zeta/h &= (H/h) \{ \text{cn}^2(\gamma/\beta) - (1/k^2)(E/F - 1 + k^2) \} \\ &\quad + \frac{3}{4} (H/h)^2 \{ \text{cn}^4(\gamma/\beta) - \text{cn}^2(\gamma/\beta) \} \end{aligned}$$

$$+ (1/4k^4)(H/h)^2 \{ 2k^2 - 2 + (2 - k^2)(E/F) \} \dots\dots\dots (45)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \gamma/\beta &= [3(H/h)4k^2]^{1/2} \{ 1 + (1/8k^2)[12(E/F) \\ &\quad + 5k^2 - 10](H/h) - (1/128k^4) \\ &\quad \times [12(E/F) + 5k^2 - 10](H/h)^2 \} (x - ct)/h \quad (46) \end{aligned}$$

この場合、波の谷から静水面までを δ とすれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \delta/h &= (H/h)(E/F - 1 + k^2)/k^2 - (1/4k^4)(H/h)^2 \\ &\quad \times \{ 2k^2 - 2 + (2 - k^2)(E/F) \} \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

この波の波速は、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} c/\sqrt{gh} &= 1 + (1/2k^2)(H/h) \{ 2 - 3(E/F) - k^2 \} \\ &\quad + (3/20k^4)(H/h)^2 \{ 6k^2 - 6 - k^4 \} \\ &\quad + (1/40k^4)(H/h)^2 (E/F) \{ 97(E/F) - 45k^2 - 83 \} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (48)$$

また、水平および鉛直水粒子速度は、それぞれ次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u/\sqrt{gh} &= (H/h) \{ \text{cn}^2(\gamma/\beta) - (E/F - 1 + k^2)/k^2 \} \\ &\quad + (9z^2/4 - 1)(H/h)^2 \text{cn}^4(\gamma/\beta) + (1/4k^2)(H/h)^2 \\ &\quad \times \{ 7k^2 - 6 + 2(E/F) - 6(2k^2 - 1)z^2 \} \\ &\quad \times \text{cn}^2(\gamma/\beta) + (1/4k^4)(H/h)^2 \{ 7k^2 - 3k^4 - 4 \} \\ &\quad + (1/4k^4)(H/h)^2 \{ (8 - 5k^2 - 4(E/F))(E/F) \\ &\quad - 3k^2(1 - k^2)z^2 \} \\ v/\sqrt{gh} &= z \{ 3(H/h)^2/k^2 \}^{1/2} \{ 1 + (1/8k^2)(H/h) \\ &\quad \times [16(E/F) + 19k^2 - 22 + 4z^2(1 - 2k^2) + 4k^2 \\ &\quad \times (3z^2 - 4) \text{cn}^2(\gamma/\beta)] \} \text{cn}(\gamma/\beta) \text{sn}(\gamma/\beta) \text{dn}(\gamma/\beta) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

さらに、この第2次近似解による質量輸送速度は、通常の方法によって計算すれば、

$$\begin{aligned} u_m/\sqrt{gh} &= (1/6k^4)(H/h)^2 \{ -2k^2(E/F) + 4(E/F) \\ &\quad - 3(E/F)^2 + k^2 - 1 \} - (1/6k^4)(H/h)^2 (\sqrt{gh}/c) \\ &\quad \times \{ 2k^2(E/F) - 4(E/F) + 3(E/F)^2 + 1 - k^2 \} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (50)$$

となり、また圧力は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} p/\rho gh &= 1 - z + (H/h) \{ \text{cn}^2 - (E/F - 1 + k^2)/k^2 \} \\ &\quad + (H/h)^2 \left\{ \frac{3}{4} \text{cn}^4(\gamma/\beta) - \frac{3}{4} \text{cn}^2(\gamma/\beta) + (1/4k^4) \right. \\ &\quad \times \{ 2k^2 - 2 + (E/F)(2 - k^2) \} + (1 - z^2) \\ &\quad \times \left[-\frac{9}{4} \text{cn}^4(\gamma/\beta) + (3/2k^2)(2k^2 - 1) \text{cn}^2(\gamma/\beta) \right. \\ &\quad \left. \left. + (3/4k^2)(1 - k^2) \right] \right\} \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (51)$$

4. 新しいクノイド波理論に対する考察

前述したクノイド波理論から得られる波の特性を検討するために、ここではさしあたり、Laitone^{7),8)} のクノイド波理論と比較して、若干の考察をすれば、次のようである。

まず、前述したように、第1次近似解は Laitone の求めた解と全く一致しており、またこの場合には波速は一義的に決定されるので、いわゆる波速の物理的な定義はいずれも不要となっている。しかし、第2次近似解では Laitone によるものが波速の物理的な定義を必要とするのに対して、著者らの理論では水位変動の位相速度として数学的に決定されていることから、波形および波長の表示を除いてそのほかすべて若干異なっている。これはまた波速に対する第1定義および第2定義のどちらを Laitone の理論に用いても相違する。ここでは、その相違が直接現われる波速に対して、まず比較する。すなわち、Laitone のクノイド波理論による波速は、波速の第1定義を適用した場合、

$$\begin{aligned} c/\sqrt{gh} = & 1 + (1/2k^2)(H/h)\{2 - 3(E/F) - k^2\} \\ & + (1/k^4)(H/h)^2 \left\{ \frac{1}{8}(E/F) \left[-5(E/F) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{5}(23k^2 - 40) \right] + (1/120)[113k^2 - 98 - 33k^4] \right\} \end{aligned} \quad (52)$$

で与えられ、また第2定義の場合には次式で表わされる。

$$\begin{aligned} c/\sqrt{gh} = & 1 + (1/2k^2)(H/h)\{2 - 3(E/F) - k^2\} \\ & + (1/k^4)(H/h)^2 \left\{ \frac{1}{8}(E/F)[3(E/F) + k^2 - 2] \right. \\ & \left. + \frac{1}{20}(8k^2 - 8 - 3k^4) \right\} \end{aligned} \quad (53)$$

いま、両者の比較の1例として、 $T\sqrt{g/h} = 30$ および 10 の場合に対して、式 (52) および (53) と式 (48) との計算結果を比較すれば、図-3 および 4 のようになる。図中 C-A-2 は $(1/k^2)(H/h) \ll 1$ の仮定のもとに近似した式 (48)、C-A-E は式 (40) を近似しないで計算した著者らの理論値を示し、また C-2-1 は波速の第1定義を用いた Laitone の第2次近似解、C-2-2 は第2定義による第2次近似解および

C-1 は第1次近似解を表わす。これからわかるように Laitone の理論に比べて著者らの理論による波速は若干大きい値を与えるが、前述した式 (40) の近似の誤差が実用上かなり大きく、特に、 $T\sqrt{g/h}$ の値が小さくなるとこの傾向が著しいことがわかる。このことからすれば、式 (40) をあえて近似し

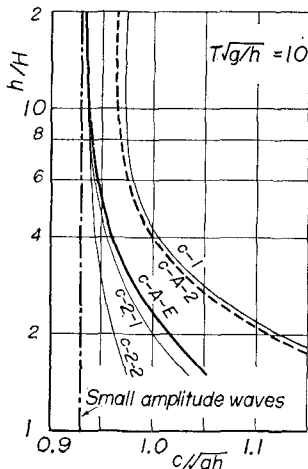


図-3 波速に関する Laitone の理論との比較 (1)

ない方がよいように思われるが、さらに実験結果との比較で検討すべきことはいうまでもない。

次に、質量輸送について比較すれば、次のとおりである。Laitone の理論では、波速に関して第2定義を用いているので、全質量輸送速度は存在しないことになる。したがって、ここでは第1定義によるクノイド波理論

を用い、Le Méhauté によって求められた質量輸送速度と著者らの理論による質量輸送速度とを比較する。まず、Le Méhauté によって誘導された質量輸送速度は、

$$\begin{aligned} u_m/\sqrt{gh} = & \left\{ \begin{aligned} & c/24k^4(H/h)^2\{E/F\}(2-k^2) \\ & + 13k^2 - 10 \} \\ & h/h_t = 1 + (H/h)(h/h_t)(E/F - 1 + k^2)/k^2 \\ & + (1/4k^4)(H/h)(h/h_t)^2[2(1-k^2) \\ & - (2-k^2)(E/F)] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (54)$$

で与えられる。これに対して著者らの表式は式 (50) であ

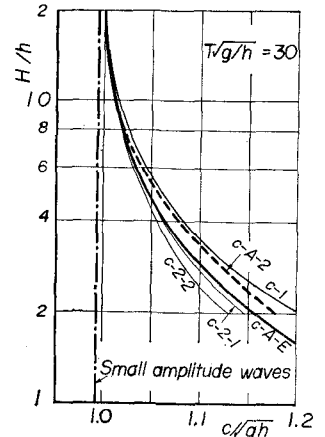


図-4 波速に関する Laitone の理論との比較 (2)

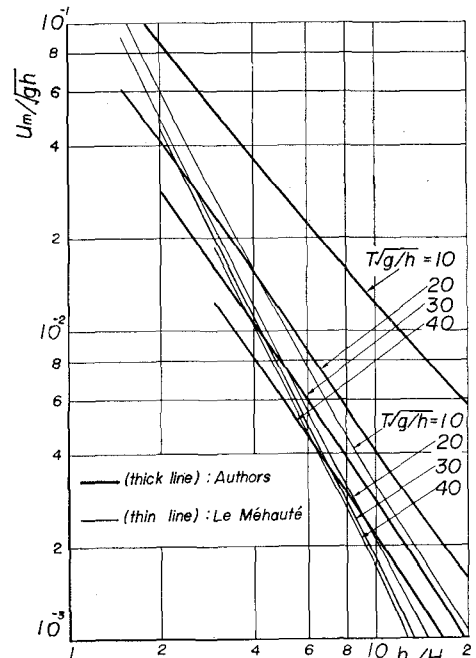


図-5 質量輸送に関する Le Méhauté の理論式との比較

るが、この場合母数 k は式 (40) および (41) に基づいて計算することにした。図-5 はこれら両者を比較したものである。これらの結果から、 $T \rightarrow \infty$ の極限では、式 (54) による質量輸送速度は有限値をとるが、一方著者らの理論では、 $u_m \rightarrow 0$ となる。このことは、前者では孤立波によって輸送される水量は無限大となって大きな疑問を残すが、後者では有限であることを示している。また、著者らによる質量輸送速度は Le Méhauté のものとなき相違し、この傾向は $T\sqrt{g/h}$ の値が小さくなると著しいことがわかる。

5. 結 語

以上、クノイド波理論に対して新しい1つの試みを提案したが、これは従来の理論に比べて波速に対する物理的な定義が不要であるという大きな利点をもっている反面、実用的な近似式の誘導や実験結果との比較などお残された問題が少なくないといわねばならない。今後、さらに数学的な検討とともに、詳細な実験結果との比較を行って、この理論の適用性を調べていきたいと考えている。

最後に、本研究の遂行にあたり、熱心にご助力いただいた山口正隆助教授に謝意を表明する。

参 考 文 献

- 1) Stokes, G.G.: On the Theory of Oscillatory Waves, Trans. Camb. Phil. Soc. 8, 1847, pp. 441~455.
- 2) Keulegan, G.H. and G.W. Patterson: Mathematical Theory of Irrotational Translation Waves, National Bureau of Standards, Research Paper, Vol. 24, 1940, pp. 48~67.
- 3) Tsuchiya, Y. and M. Yamaguchi: Some Considerations on Water Particle Velocities of Finite Amplitude Wave Theories, Coastal Engg. in Japan, Vol. 15, 1972, pp. 43~57.
- 4) Taniuti, T. and C.C. Wei: Reductive Perturbation Method in Nonlinear Wave Propagation. I, Jour. Phys. Soc. in Japan, Vol. 24, No. 4, 1968, pp. 941~946.
- 5) Le Méhauté, B.: Mass Transport in Cnoidal Waves, Jour. Geophys. Res., Vol. 73, No. 18, 1968, pp. 5973~5979.
- 6) Laitone, E.V.: The Second Approximation to Cnoidal and Solitary Waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 9, 1960, pp. 430~444.
- 7) Laitone, E.V.: Limiting Conditions for Cnoidal and Stokes Waves, Jour. Geophys. Res., Vol. 67, No. 4, 1962, pp. 1555~1564.
- 8) Laitone, E.V.: Series Solutions for Shallow Water Waves, Jour. Geophys. Res., Vol. 70, No. 4, 1965, pp. 995~998.