

非線型長波の変形

——水路幅、水深の変化する場合——

首 藤 伸 夫*

1. はじめに

長波の浅水変形を非線型効果まで入れて解くこととする。

非線型効果のない場合には、有名なグリーン¹⁾の式があり、波高 H は水深 d の $1/4$ 乗に逆比例し水路幅 b の $1/2$ 乗に逆比例して変化することがわかっている²⁾。また同じ問題を、水深が直線的に変化するとして解けば、波高変化はハンケル関数であたえられる³⁾。これとグリーン¹⁾の式との差は、水深がごく浅い所をのぞいては、実際上問題とならない³⁾。

波高の有限性を入れると浅水理論をうる。一様傾斜斜面上に周期波が存在する場合、波形はハンケル関数で表わされ、波高は微小振幅長波と同じように変化をするが、波形は前傾化する⁴⁾。岸⁵⁾は、浅水理論の結果として、波形のいかに関りなく、波高変化を与える式を導びいている。波高水深比が小さければ、岸の結果はグリーン¹⁾の式と一致する。

波頂曲率の効果まで入れると、水平床上での非線型長波として、孤立波やクノイド波があたえられる。Ippen-Kulin⁶⁾は、孤立波をつかい、全エネルギーが浅水前後で等しいとして $H \propto d^{-1}$ を、単位時間あたりのエネルギー輸送量が等しいとして $H \propto d^{-4/3}$ をえている。ただし、この後者の計算を行うにあたり、長波の場合エネルギー伝達速度が波速に等しいことを用いているが、孤立波に対して、このような取扱いができるかは疑問である。岩垣・酒井⁷⁾は、ハイパボリック波を使い、単位時間あたりのエネルギー輸送量が等しいとして、波高変化を与える複雑な式を与えているが、孤立波とした極限では $H \propto d^{-1}$ となっている。佐伯ら⁸⁾は、孤立波を使って、 $H \propto b^{-2/3} d^{-4/3} (1 + H/d)^{-1/3}$ をえている。

波高の有限性、波頂曲率の効果、水深変化の効果を同時に含んでいる基本式が角谷⁹⁾によって与えられている。水深変化の項の効果が他項に比べて小さいとすると、孤立波的な波に対して、Johnson¹⁰⁾や、著者¹¹⁾は $H \propto d^{-1}$ 、Leibovich-Randall¹²⁾は、 $H \propto d^{-1/3}$ をえている。Leibovich らの計算には誤りがあるようである。また、Grimshaw¹³⁾は別個の取扱いかから、波高の小さな孤立波に対しては、 $H \propto d^{-1}$ をえている。

周期的な非線型長波の浅水法則は、孤立波のものと異なる可能性がある。また、水深だけでなく、水路幅の変化する効果もふくめた法則が、実際の適用にあたっては必要である。この論文では、まず角谷の式を水路幅変化の項を含むように一般化する。ついで、基本波形は常に保持され、ソリトンの分裂のようなことは生じないものとする。また、底面および側面での摩擦は無視できるものと仮定する。

2. 基本方程式

流体は非粘性、非圧縮とする。水路中心線方向に沿う水平軸を x' 軸、これと直交する水平軸を y' 軸とする。 z' 軸は鉛直上向きを正とする。

水底は x' 軸方向のみに傾斜しており、 $z' = h'(x')$ であたえられる。側壁は鉛直壁であって、その位置は $y' = \pm b'(x')$ である。静水面は $z' = h_0$ にあり、水深 d' は $h_0 - h'(x')$ で与えられる。

水平方向の特性長 λ 、水深 h_0 、波高に関連する量 a を使って、

$$\left. \begin{aligned} x' &= \lambda x, \quad y' = \lambda y, \quad z' = h_0 z, \quad u' = \frac{a}{h_0} \sqrt{gh_0} u, \\ v' &= \frac{a}{h_0} \sqrt{gh_0} v, \quad w' = \frac{a}{\lambda} \sqrt{gh_0} w, \quad \eta' = a\eta, \\ h' &= h_0 h, \quad t' = \frac{\lambda}{\sqrt{gh_0}} t, \quad b' = \lambda b, \\ p' &= \rho g h_0 - \rho g z' + \rho g a p \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

のように、無次元変数 $x, y, \dots$ を導入する。このうち圧力に関しては、第一近似が静水圧分布となることを用いている。

波高水深比 $\varepsilon = a/h_0$ 、水深波長比 $\delta = h_0/\lambda$ を使用するとき、無次元化された方程式群は次の通りとなる。

$$\text{連続の式} \quad u_x + v_y + w_z = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{運動の式} \quad u_t + \varepsilon[uu_x + vv_y + ww_z] = -p_x \quad \dots\dots (3)$$

$$v_t + \varepsilon[uv_x + vv_y + ww_z] = -p_y \quad \dots\dots (4)$$

$$\begin{aligned} \delta^2[w_t + \varepsilon\{uw_x + vw_y + ww_z\}] \\ = -p_z \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{波形連続の条件} \quad \eta_t + \varepsilon[u\eta_x + v\eta_y] &= w, \\ z &= 1 + \varepsilon\eta \quad \text{で} \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{表面圧力条件} \quad 1 - z + \varepsilon p &= 0, \\ z &= 1 + \varepsilon\eta \quad \text{で} \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

* 正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科

水底での条件 $uh_x = w, z = h$ で。……(8)

側壁での条件 $ub_x = \pm v, y = \pm b$ で。……(9)

ここで、水深によってきまる長波の波速で移動する座標系を導入する。この座標系からみると、現象はほぼ定常に近くみえる。水深変化の影響などで波形は変化するが、これはかなりゆるやかに生ずる。この変化量は、移動座標系の原点が今どこにあるかということで計量される。波形などの変化量は小さいから、かなり長い x を経過したのちにはじめて目につくようになる。これを見つめるには x に小さな値をかけて水平長さを縮めてやれば判りやすい。そこで、

$$X = \alpha \varepsilon x \quad \dots\dots\dots (10)$$

という新座標を導入する。ここで、縮尺は波高水深比 ε を基準にとって測り、 $\alpha \varepsilon$ とした。

移動座標の方は

$$\xi = \int \frac{dx}{V_0} - t, \text{ ただし } V_0 = \sqrt{1-h} = \sqrt{d} \quad (11)$$

となる。

水深や水路幅もゆるやかに変化する。水深は $\sigma \varepsilon x$ として縮めた長さで測り、水路幅は $\gamma \varepsilon x$ とした長さで測ると、 ξ 軸で測った諸量と同程度になるに違いない。これはまた、水深を $\sigma X/\alpha$ 、水路幅を $\gamma X/\alpha$ で測ることと同意義である。

以上を考えに入れて式群を書き改めると、

$$\alpha \varepsilon u_X + \frac{1}{V_0} u_\xi + v_\eta + w_z = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$-u_\xi + \varepsilon \left[u \left\{ \alpha \varepsilon u_X + \frac{1}{V_0} u_\xi \right\} + v u_\eta + w u_z \right] + \alpha \varepsilon p_X + \frac{1}{V_0} p_\xi = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$-v_\xi + \varepsilon \left[u \left\{ \alpha \varepsilon v_X + \frac{1}{V_0} v_\xi \right\} + v v_\eta + w v_z \right] + p_\eta = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\delta^2 \left[-w_\xi + \varepsilon \left\{ u \left(\alpha \varepsilon w_X + \frac{1}{V_0} w_\xi \right) + v w_\eta + w w_z \right\} \right] + p_z = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$-\eta_\xi + \varepsilon \left[u \left(\alpha \varepsilon \eta_X + \frac{1}{V_0} \eta_\xi \right) + v \eta_\eta \right] = w, \quad z = 1 + \varepsilon \eta \text{ で。} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$1 - z + \varepsilon p = 0, \quad z = 1 + \varepsilon \eta \text{ で。} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\sigma \varepsilon u h' = w, \quad z = h(x) \text{ で。} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\gamma \varepsilon u b' = \pm v, \quad y = \pm b(x) \text{ で。} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで、 h' は $\sigma \varepsilon x$ に関する微分、 b' は $\gamma \varepsilon x$ に関する微分である。

$\delta^2 = \kappa \varepsilon$ とかけるものとする。 κ^{-1} はアーセル数である。変数 u などが

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad \dots\dots\dots (20)$$

と展開できるとし、また表面での条件を静水面 $z=1$ での条件に書きあらためる。

一次近似に対して次の式がえられる。

$$\frac{1}{V_0} u_{0\xi} + v_{0\eta} + w_{0z} = 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$-u_{0\xi} + \frac{1}{V_0} p_{0\xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$-v_{0\xi} + p_{0\eta} = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$p_{0z} = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$w_0 = -\gamma_{0\xi}, \quad z = 1 \text{ で。} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$p_0 = \gamma_0, \quad z = 1 \text{ で。} \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$w_0 = 0, \quad z = h \text{ で。} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$v_0 = 0, \quad y = \pm b \text{ で。} \quad \dots\dots\dots (28)$$

これを満たす解は、

$$u_0 = \frac{1}{V_0} \gamma_0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = \frac{1}{V_0^3} (h - z) \gamma_{0\xi}, \quad p_0 = \gamma_0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

である。 γ_0 は (x, y, t) の関数である。また、 u_0, v_0, p_0 は、波運動にともなって生じているものとする。

第二近似に対しては

$$\frac{1}{V_0} u_{1\xi} + v_{1\eta} + w_{1z} = -\alpha u_{0X} \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$-u_{1\xi} + \frac{1}{V_0} p_{1\xi} = -\frac{1}{V_0} u_0 u_{0\xi} - v_0 u_{0\eta} - w_0 u_{0z} - \alpha p_{0X} \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$-v_{1\xi} + p_{1\eta} = -\frac{1}{V_0} u_0 v_{0\xi} - v_0 v_{0\eta} - w_0 v_{0z} \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$p_{1z} = \kappa w_{0\xi} \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$w_1 + \gamma_{1\xi} = \frac{1}{V_0} u_0 \gamma_{0\xi} + v_0 \gamma_{0\eta} - \gamma_0 w_{0z}, \quad z = 1 \text{ で。} \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$p_1 = \gamma_1 - \gamma_0 p_{0z}, \quad z = 1 \text{ で。} \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$w_1 = \sigma u_0 h', \quad z = h \text{ で。} \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$v_1 = \pm \gamma u_0 b', \quad y = \pm b \text{ で。} \quad \dots\dots\dots (37)$$

が基本式群である。ここで式(36)、(37)の'は、それぞれ $\sigma X/\alpha$ 、 $\gamma X/\alpha$ に関する微分を示す。

η は y とは無関係とする。波は水路中心線に沿って進み、進行方向と直交する方向には、水深も波面の高さも、それぞれ一様となっている。

y および z 方向に、それぞれの境界条件をみたすように積分したのち、 η_0 に対する微分方程式として

$$\alpha \gamma_{0X} + \frac{3}{2} d^{-3/2} \gamma_0 \gamma_{0\xi} + \frac{\kappa}{6} d^{1/2} \gamma_{0\xi\xi\xi} + \frac{\sigma}{4} \frac{d'}{d} \gamma_0 + \frac{\gamma}{2} \frac{b'}{b} \gamma_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (38)$$

または次元をもつ形で、'を省略して、

$$\gamma_{0X} + \frac{3}{2} g^{-1/2} d^{-3/2} \gamma_0 \gamma_{0\xi} + \frac{1}{6} g^{-3/2} d^{1/2} \gamma_{0\xi\xi\xi} + \frac{1}{4} \frac{d_X}{d} \gamma_0 + \frac{1}{2} \frac{b_X}{b} \gamma_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (39)$$

が与えられる。最後の項が水路幅変化の効果を示し、これがなければ角谷の式となる。

3. グリーンの式

(1) 線型長波

式 (38) で, α, γ, σ のオーダーが 1 よりも大きければ,

$$\eta_{0X} + \frac{b'}{2b}\eta_0 + \frac{d'}{4d}\eta_0 = 0 \quad (40)$$

が成立し, これは

$$\ln(\eta_0 b^{1/2} d^{1/4}) = \text{const}, \quad \text{つまり } \eta_0 b^{1/2} d^{1/4} = \text{const}. \quad (41)$$

というグリーンの式をあたえる。

(2) 浅水理論

α, γ, σ のオーダーが 1 で, κ はこれより小さいとすると,

$$\eta_{0X} + \frac{3}{2}d^{-3/2}\eta_0\gamma_0\epsilon + \frac{1}{2}\frac{b'}{b}\eta_0 + \frac{d'}{4d}\eta_0 = 0 \quad (42)$$

となる。新変数

$$Y = \eta_0 b^{1/2} d^{1/4}, \quad s = \frac{3}{2} \int d^{-7/4} b^{-1/2} dX \quad (43)$$

を使って書き改めると,

$$Y_s + Y Y_\xi = 0 \quad (44)$$

となる。この解は良く知られており¹⁴⁾,

$$x = x_1, \quad d = d_1, \quad b = b_1 \quad \text{で} \quad \eta_0 = f(t) \quad (45)$$

という境界条件をみたす解は,

$$\eta_0 = \frac{b_1^{1/2} d_1^{1/4}}{b^{1/2} d^{1/4}} f \left(t + \frac{3}{2} \eta_0 b^{1/2} d^{1/4} \int_{x_1}^x d^{-7/4} b^{-1/2} dx - \int_{x_1}^x \frac{dx}{\sqrt{d}} \right) \quad (46)$$

で与えられる。波高はグリーンの式にしたがって変化し, 波形が前傾化する。

4. クノイド波の浅水変形

式 (38) を, 表現を簡略化するために X の関数である $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を使って,

$$\eta_{0X} + \alpha_1 \eta_0 \gamma_0 \epsilon + \alpha_2 \eta_0 \epsilon \epsilon \epsilon + \alpha_3 \eta_0 = 0 \quad (47)$$

と書く。

式 (38) で, α, κ は 1 のオーダーであり, σ, γ は 1 より小さいが ϵ より大きな量であるとする。このように地形変化の影響が無視された時の周期解はクノイド波で,

$$\eta_{00} = H \text{cn}^2 \beta + \delta \quad (48)$$

である。ここで,

$$\left. \begin{aligned} \beta &= A[\xi - BX], \\ \delta &= -\frac{H}{k^2} \left[\frac{E}{K} - k'^2 \right] \\ A &= \sqrt{\frac{H}{12} \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{3}{4} \frac{gH}{d^2}} \frac{1}{k} \\ B &= \frac{1}{3} \frac{2k^2 - 1}{k^2} \alpha_1 H + \alpha_1 \delta \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

で, H は波高, β は位相, δ は波の谷の高さ, K, E は

ヤコビの第一種および第二種の完全楕円積分, k, k' はその母数および補母数である。

もし, 地形変化が全く影響しなければ, 波高 H , 定数 A, B , および δ は, それぞれ一定の値となる。また, 母数 k は,

$$k^2 K^2(k) = \frac{3}{16} \frac{gHT^2}{d^2} \quad (50)$$

から決められる。ここで, T は周期, g は重力の加速度である。したがって, 母数 k は, gHT^2/d^2 と定義されるアーセル数の関数となっている。

次に, σ と γ が同程度とすると, η_0 を

$$\eta_0 = \eta_{00} + \sigma \eta_{01} \quad (51)$$

として式 (47) に代入し, η_{01} をきめるための式を求め¹¹⁾。このとき, $H, \alpha_1, \alpha_2, A, B$ などの X に関する変化率 $H_X, \dots$ なども σ のオーダーであるとする。と, η_{01} に対して,

$$\left. \frac{\partial \eta_{01}}{\partial X} \right|_{\beta=\text{const.}} + L[\eta_{01}] = M[\eta_{00}] \quad (52)$$

という形の式が成立する。ここで,

$$\begin{aligned} L[\eta_{01}] &= -AB\eta_{01\beta} + \alpha_1 A(\eta_{00}\eta_{01})_\beta + \alpha_2 A^3\eta_{01\beta\beta\beta}, \\ M[\eta_{00}] &= -\alpha_3(H \text{cn}^2 \beta + \delta) + AHX \frac{d\beta}{dX} \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\text{cn}^2 \beta + \frac{\delta}{H} \right) - H \frac{\beta}{A} \frac{dA}{dX} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\text{cn}^2 \beta + \frac{\delta}{H} \right) \\ &\quad - \frac{dH}{dX} \text{cn}^2 \beta - \frac{d\delta}{dX} \quad (53) \end{aligned}$$

である。 η_{01} は η_{00} より大きくなってはならない。 η_{01} が X に関する永年項をもたないための必要条件は

$$\int_{-K}^K \eta_{01} L^*[v] d\beta = \int_{-K}^K v L[\eta_{01}] d\beta \quad (54)$$

で与えられる L の共役演算子 L^* を考え, $L^*[v] = 0$ をみたす解 v を使って,

$$\int_{-K}^K v M[\eta_{00}] d\beta = 0 \quad (55)$$

とできることである。このような解は $v = \text{cn}^2 \beta + \delta/H$ であることがわかるから, 式 (53), (55) を使って,

$$\begin{aligned} \frac{H_X}{H} + \frac{dX}{d} + \frac{2}{3} \frac{b_X}{b} + \frac{2}{3} \frac{k_X}{k} + \frac{2}{3} \frac{\delta}{H} \frac{I_2}{I_1} \\ \times \left[\frac{H_X}{H} + \frac{5}{2} \frac{d_X}{d} + \frac{b_X}{b} + 2 \frac{k_X}{k} \right] = 0 \quad (56) \end{aligned}$$

ならば良い。ここで,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-K}^K \text{cn}^4 \beta \cdot d\beta = \frac{2K}{3k^2} \left[(2-3k^2)k'^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(2k^2-1)\frac{E}{K} \right], \\ I_2 &= \int_{-K}^K \text{cn}^2 \beta \cdot d\beta = \frac{2K}{k^2} \left[\frac{E}{K} - k'^2 \right] \end{aligned}$$

である。

式 (56) の種分は簡単にはできない。その理由は, かつこの前にある係数が定数でなく, k (あるいはアーセル

数, といってもよい) の関数だからである。

(1) アーセル数の大きい時

大きなアーセル数に対しては, $k \div 1$ としてよく, また E, K などに対する近似式を用いると,

$$f_1 = \frac{2}{3} \frac{\delta}{H} \frac{I_2}{I_1} = -\frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{gHT^2}{d^2} \right)^{-1/2} \dots\dots\dots (57)$$

とできる。

$$U = \left(\frac{gHT^2}{d^2} \right)^{1/2}$$

とおくと式(56)は,

$$\frac{3}{2} \frac{H_X}{H} + \frac{2}{3} \frac{b_X}{b} - \frac{U_X}{U} - \frac{4}{\sqrt{3}} U^{-1} \times \left[\frac{9}{4} \frac{H_X}{H} - \frac{5}{2} \frac{U_X}{U} + \frac{b_X}{b} \right] = 0 \dots\dots\dots (58)$$

となり, 容易に積分できて,

$$Hb^{4/9} U^{-10/9} [U - 2\sqrt{3}]^{4/9} = \text{const.}$$

または,

$$Hbd^{5/2} \left[\sqrt{\frac{gHT^2}{d^2}} - 2\sqrt{3} \right] = \text{const.} \dots\dots\dots (59)$$

となる。

孤立波の場合, 波長が非常に長くなってかつこの中の $2\sqrt{3}$ が省略できるので,

$$Hdb^{2/3} = \text{const.} \dots\dots\dots (60)$$

となる。水路幅の影響については佐伯らと同じ結果⁸⁾, 水深に関しては著者の前の結果¹¹⁾と一致している。

(2) その他のアーセル数の場合

このとき, k も f_1 も簡単な解析関数で表わせない。 k, f_1 をアーセル数の関数として表現すると, 図-1 のようになる。近似的な関係を求めるため, アーセル数によっていくつかの区間に分け, 各区間では $-f_1$ は一定値, $k^2 \propto (gHT^2/d^2)^n$ として, f_1 および n を図-1 をもとにして決定し, 各区間ごとの平均的な変形法則を求めた結果が表-1である。

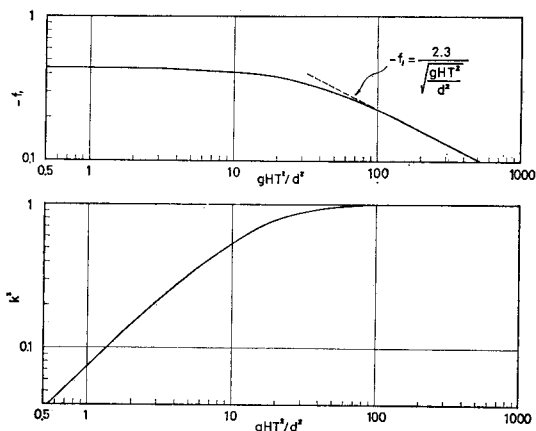


図-1 アーセル数の関数として表示した k^2 および f_1

表-1 クノイド波の浅水変形法則

gHT^2/d^2	n	$-f_1$	浅水変形法則
2 以下	1.0	0.44	$Hd^{1/4} b^{1/2} = \text{const.}$
2 ~ 6	0.865	0.43	$Hd^{1/6} b^{1/2} = \text{const.}$
6 ~ 15	0.667	0.42~0.40	$Hd^{1/7} b^{1/2} = \text{const.}$
15 ~ 25	0.384	0.40~0.37	$Hd^{1/8} b^{1/2} = \text{const.}$
25 ~ 30	0.384	0.37~0.35	$Hd^{1/5.3} b^{1/2} = \text{const.}$
30 ~ 40	0.204	0.32	$Hd^{2/7} b^{1/2} = \text{const.}$
40 ~ 65	0.107	0.32~0.27	$Hd^{1/3} b^{1/2} = \text{const.}$
65 ~ 100	0.0308	0.27~0.23	$Hd^{1/2} b^{1/1.8} = \text{const.}$
100 以上			$Hd^{5/2} b [\sqrt{gHT^2/d^2} - 2\sqrt{3}] = \text{const.}$

(3) クノイド波の浅水変形

以上の結果をとりまとめて, b = 一定の場合に対し, $gHT^2/d^2 = 100$ の所の波高 H_{100} を基準としてした曲線が図-2 である。点線は式(59)の結果を小さなアーセル数の所まで延長したものである。もし, $gHT^2/d^2 = 50$ の所まで延長したとすると, 表-1 を使って計算したものと, 0.7% の誤差しか生じない。しかし, 50以下では, 図からもわかる通り, 急速に誤差が大きくなる。なお 50 以上に対しては, 横座標 H/H_{100} を $Hb^{4/9}/(Hb^{4/9})_{100}$ で置換えれば, b を含んだ関係とすることができる。

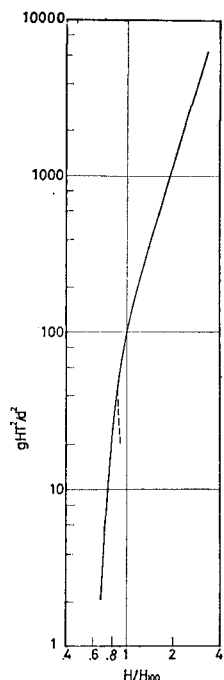


図-2 クノイド波の浅水変形

5. 実験結果との比較

理論と実験の比較を行うにあたり, 今回は水路幅変化の影響のふくまれていない実験値のみを取りあげた。その理由は, 佐伯ら⁸⁾によって行われているもの以外には, 水路幅変化の含まれている実験値がなく, 著者も実験を追加する余裕がなかったからである。

(1) 孤立波

式(38)を解いて, κ, σ の相対的な重さを考えに入れて, $H \propto d^{-1/4}$, または $H \propto d^{-1}$ をえている。 κ^{-1} はアーセル数で波頂曲率の重要性を示す量, σ は斜面勾配の影響を示す量であった。上で用いているアーセル数は孤立波に対しては無限大となってしまうが, 実際の波形での波頂曲率は有限な値である。波形が $H \text{sech}^2 \beta$ であるとき, アーセル数の代りに実際の波頂曲率と関係のある無次元数として, H/d をとっても良いであろう。

斜面勾配と H/d を使って, $-1/4$ 乗則, -1 乗則

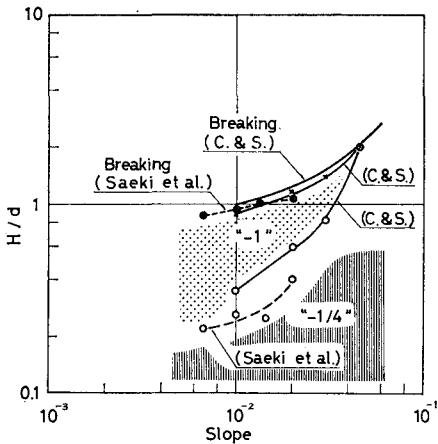


図-3 孤立波の浅水変形の領域

表-2 各法則の境界 (Camfield-Street)

斜面勾配	-1乗則と-1/4乗則 の境界 (H/d)	-1乗則の適用限界 (H/d)
10^{-2}	0.35	0.9
2×10^{-2}	0.60	1.15
3×10^{-2}	0.83	1.40
4.5×10^{-2}	2.00	2.00

表-3 各法則の境界 (佐伯ら)

斜面勾配	-1乗則と-1/4乗則 の境界 (H/d)	碎波条件 (H/d)
0.667×10^{-2}	0.22	0.885
1×10^{-2}	0.26	0.94
1.33×10^{-2}	0.25	1.02
2×10^{-2}	0.4	1.07

の成立する範囲を示したのが、図-3である。ここで、Camfield-Street (表-2)、および佐伯ら (表-3) の実験結果から決定した値をもちいている。

Camfield-Street の結果を使うと、碎波する直前に -1 乗則と異なった法則の成立する領域が、ごく狭いけれども存在する。佐伯らの実験結果では、これが顕著ではない。

また、-1 乗則と -1/4 乗則との境界は、両者必ずしも一致しない。

(2) 周期的な波

使用した実験値は 1/20 勾配の斜面上での岩垣・酒井のもの¹⁵⁾、Le Méhauté の 1/107 勾配上のもの¹⁶⁾、および著者が 1/70 勾配をもちいて行ったものである。

図-4, 5 は、岩垣・酒井の実験値と、この論文での結果 (表-1)、および微小振幅表面波理論によるものとを比較したものである。岩垣・酒井の実験は周期 1.0, 1.2, 1.5, 2.0 秒に対して行われているが、それから 2 例のみを示しておいた。

図-6 は、Le Méhauté の実験曲線を、文献 16) から

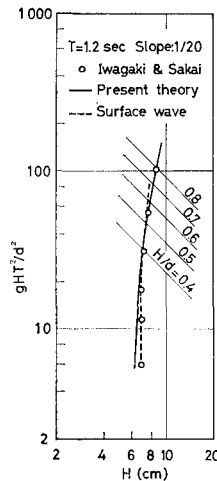


図-4 斜面勾配 1/20, 周期 1.2 秒

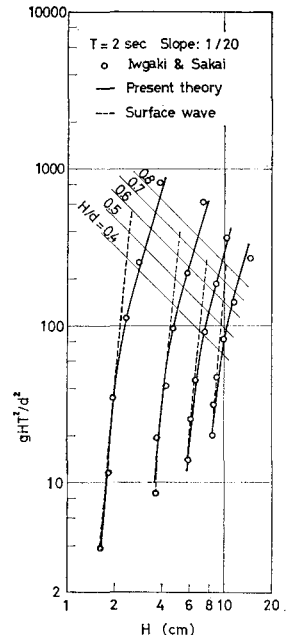


図-5 斜面勾配 1/20, 周期 2.0 秒

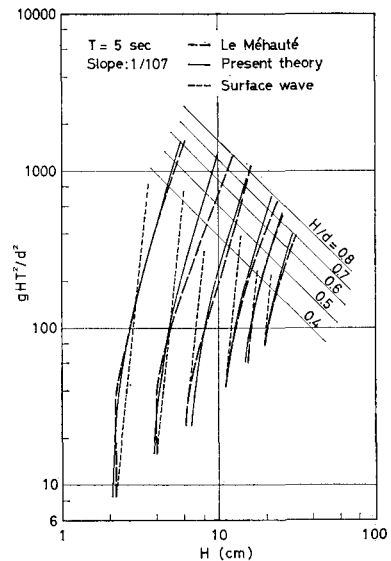


図-6 斜面勾配 1/107, 周期 5 秒

写真にとって引伸して読取ったものとの比較である。こうした処置にとまらぬ誤差が当然含まれている。なお、実験波の周期は 5 秒のみである。

図-7, 8 は、著者の行った実験結果である。実験は建設省土木研究所の、長さ 61m, 幅 0.6m, 高さ 1.375m の水路で行われた。波形は容量形波高計およびサーボ型波高計でとっている。周期は、1.5, 2.1, 4, 5, 6, 7 秒であったが、ここにはそのうちの 2 例のみを示す。

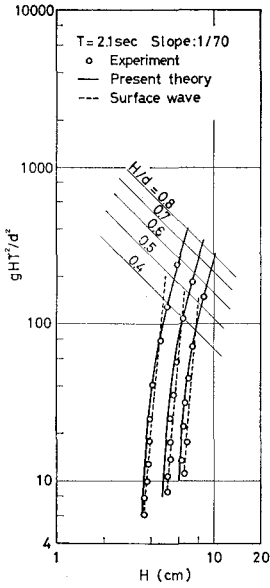


図-7 斜面勾配 1/70, 周期 2.1 秒

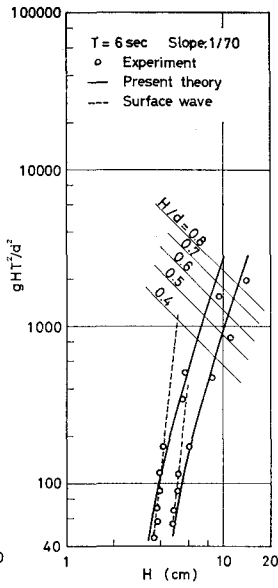


図-8 斜面勾配 1/70, 周期 6 秒

以上の各図で、微小振幅表面波理論は、最も水深の深い場所での波高を基準として適用してある。クノイド波理論は、ある程度水深が浅く、波高が大きくなければ適用できない。しかし、孤立波に対する図-3 からもうかがわれるとおり、 H/d があまり大きくなりすぎると、ここで展開した理論が不適当となる可能性もあるので、とりあえず $gHT^2/d^2 = 100$ の所の波高を基準として曲線を描くこととした。

gHT^2/d^2 の値が大きくなると、クノイド波理論の曲線が実験値を良く説明している。少なくとも、 $H/d = 0.8$ 近辺までは使用して良い。

微小振幅表面波理論との境界は、通観して、 $gHT^2/d^2 = 30$ 付近であった。この境界値は、孤立波の場合から推察すると、斜面勾配や波形勾配の関数として決定されるべきものかも知れない。しかし、上の三つの実験例から判断する限り、上記の値で実用上差支えない。

この値を用いると、両理論の境界となる水深波長比は、沖波波形勾配によって、

$$\left(\frac{d}{L_0}\right)^2 = \frac{2\pi}{30} \frac{H_0}{L_0} \left(\frac{H}{H_0}\right) \dots\dots\dots (61)$$

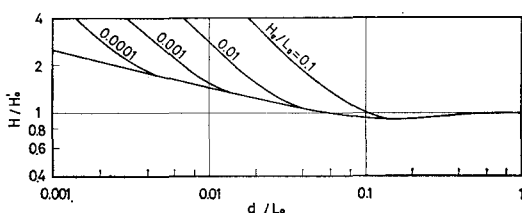


図-9 表面波からクノイド波への移行

として決められる。ここで、 H/H_0 は、微小振幅表面波理論によるもので、 d/L_0 の関数である。

この値に到達したのち、 $gHT^2/d^2 = 30 \sim 50$ に対しては、 $Hd^{2/3} = \text{const.}$ でよく、50 以上に対しては式 (59) を用いてよい。 $H_0/L_0 = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ に対して、両理論の接合状態を示したものが、図-9 である。

6. 結 論

角谷の式を水路幅、水深共変化する場合に拡張して、 KdV 方程式に匹敵する基本方程式 (38) を与えた。

これをもととして、線型長波に対してはグリーンの式そのものを、波高有限性の効果のある場合には波高はグリーンの式に従い、波形は前傾化することをえた。

さらに、波頂曲率の影響までふくめて、基本波形をクノイド波とする場合について解き、表-1 のごとく浅水変形法則をえた。

勾配 1/20, 1/70, 1/107 の斜面上での実験値と比較して、水路幅が変化しない場合には、

$$\frac{gHT^2}{d^2} \leq 30 \text{ で微小振幅表面波理論,}$$

$$30 \leq \frac{gHT^2}{d^2} \leq 50 \text{ で } Hd^{2/3} = \text{const.}$$

$$50 \leq \frac{gHT^2}{d^2} \text{ で } Hd^{5/2} \left[\sqrt{\frac{gHT^2}{d^2}} - 2\sqrt{3} \right] = \text{const.}$$

を用いれば実用上十分であることを示した。

孤立波が基本波形のとき、グリーンの式と -1 乗則との境界は、斜面勾配と H/d の組合せで定まることが図-3 のごとく明らかとなったので、クノイド波と表面波との境界も、今後の実験値の集積をまって、多少変更する必要があるかも知れない。

水路幅変化の影響は、今回は実験値と比較するにはいたらなかった。

謝 辞

実験にあたり、建設省土木研究所海岸研究室 橋本宏室長に多大のご助力をいただいた。北海道大学 佐伯浩助教授からは貴重な実験資料をいただいた。また、当時中央大学学生であった、安藤 誠、奥田忠司、特に藤崎 準一の諸君に、実験および資料解析に協力していただいた。ここに記して謝意を表する。

なお、本研究の一部は、松永記念科学振興財団の研究助成金で行われたことを付記する。

参 考 文 献

- 1) たとえば、Lamb, H.: Hydrodynamics, 6th ed., p. 273~275, Dover.
- 2) 本間 仁: 長波の変形に就て, 土木学会誌第 19 巻第 9 号, pp. 741~763, 1933.
- 3) 堀川清司・西村仁嗣: 港湾の屈曲および断面変化

- に伴う長波の変形, 第20回海岸工学講演会講演論文集, pp. 173~177, 1973.
- 4) 首藤伸夫・松村圭二: 長波について——様斜面上へのうちあげ高について——第12回海岸工学講演会講演集, pp. 176~179, 1965.
 - 5) Kishi, T.: Transformation, breaking and run-up of a long wave of finite height, Proc. 8th Conf. on Coastal Engg., pp. 60~76, 1963.
 - 6) Ippen, A. and Kulin, G.: The shoaling and breaking of the solitary wave, Proc. 5th Conf. on Coastal Engg., pp. 27~49, 1954.
 - 7) 岩垣雄一・酒井哲郎: クノイド波に関する研究(第5報)——hyperbolic wave について(2)——, 京大防災研究所年報, 第11号B, pp. 463~475, 昭43.
 - 8) 佐伯 浩・高木和博・尾崎 晃: 孤立波の変形に関する研究(2), 第18回海岸工学講演会講演論文集, pp. 49~53, 1971.
 - 9) Kakutani, T.: Effect of an uneven bottom on gravity waves, J. Phy. Soc. Japan, Vol. 30, No. 1, pp. 272~276, 1971.
 - 10) Johnson, R.S.: On the development of a solitary wave moving over an uneven bottom, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 73, pp. 183~203, 1973.
 - 11) Shuto, N.: Shoaling and deformation of non-linear long waves, Coastal Engg. in Japan, Vol. 16, pp. 1~12, 1973.
 - 12) Leibovich, S. and Randall, J.D.: Amplification and decay of long non-linear waves, J. Fluid Mech., Vol. 53, pp. 481~493, 1973.
 - 13) Grimshaw, R.: The solitary wave in water of variable depth, J. Fluid Mech., Vol. 42, pp. 639~656, 1970.
 - 14) Ames, W.F.: Non-linear Partial Differential Equations in Engineering, Academic Press, 1965.
 - 15) 岩垣雄一・酒井哲郎: クノイド波に関する研究(第7報), 京大防災研究所年報第12号B, pp. 569~583, 昭44.
 - 16) Le Méhauté, B.: Theory of explosion-generated water waves, Advances in Hydroscience, Vol. 7, pp. 1~79, Academic Press, 1971.
-