

KdV Soliton とその応用

長 島 秀 樹*

1. ま え が き

浅海の非線形な重力波で、非線形性と分散性のバランスする領域での unidirectional な波を記述する方程式として、いわゆる KdV eq. が、19世紀の後半 Korteweg de Vries¹⁾ らによって見出されたことは周知のとおりである。その後この方程式は、長い間海岸工学にたずさわる少数の人々以外には注目されることがなかったが、この十年、この方程式をはじめ、一般の分散性媒質中を伝わる非線形波を支配する方程式の定常解である孤立波が、非線形相互作用にもかかわらず、非常に安定で、衝突などに際してもその個性を失うことなく、あたかも粒子のようにふるまうことが見出されて以来、この方程式は、soliton と名づけられた孤立波とともに、にわかに脚光をあびてきている。Zabusky & Kruskal²⁾ は、初期波形の Soliton への分裂、再帰現象、などを解析的理論と数値実験の併用 (synergesis) によって示し、Gardner et. al.³⁾ や Lax⁴⁾ は、Soliton への分裂に対する固有値問題としての数学的裏付けを、また Miura et. al.⁵⁾ は、KdV eq. に存在する保存量についての研究を行っている。

ここでは、 $\text{sech}^2 x$ 型の初期波形の変形に対し、保存則、固有値問題の双方の立場から取扱い、Soliton への分裂に対する考察を行い、水槽実験の結果についても若干述べる。また、この種の取扱いの応用として、KdV eq. の仮定のもとで、Undular Bore の問題を検討し、初期波形が一連の波列に分裂していく際、初期の比波高、前面勾配などとは無関係に、最高波高は初期波高の2倍程度であることを示す。最後に KdV eq. の数値計算を行って、上記の結果に矛盾のないことを示す。

2. 保 存 則

浅海の波を記述する K-dV 方程式は

$$\eta_t + \sqrt{gh} \eta_x + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \eta \eta_x + \frac{1}{6} \sqrt{gh} h^3 \eta_{xxx} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

と書き表わせる。ここに η は平均水面からの変位、 h は水深、 g は重力加速度である。

今、水平方向の特性長 l 、波高に関連する量 a_0 、水深 h を使って、

$$\eta = a_0 \eta', \quad t = \frac{l}{\sqrt{gh}} t', \quad x = lx' \quad \dots\dots\dots (2)$$

のように無次元変数 η' , t' , x' を導入し、さらに新しい変数

$$x^* = x' - t', \quad t^* = \frac{3}{2} \frac{a_0}{h} t', \quad \eta^* = \eta' \quad \dots\dots\dots (3)$$

を用いると、式 (1) は、

$$\eta_t + \eta \eta_x + \beta \eta_{xxx} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。ここに、 $\beta = 1/9 U_r$ であり、 U_r はアーセル数 ($= a_0 l^3 / h^3$) である。なお、* は簡単のため省略してある。

Miura らは、式 (4) の型の方程式が、無限個の保存量を持つことを導いているが、それは次のような理由による。今、 T , X を η および η の高次の導関数のみの汎関数とし、

$$T_t + X_x = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

が成立つ場合を考える。現象が局所的に存在しているとし、 η , η_x , $\eta_t \dots$ などは $x \rightarrow \pm\infty$ で 0 になるとすれば、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} T dx = -[X]_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

となり、 $\int_{-\infty}^{\infty} T dx$ は、時間変化に対して保存量となる。

ところで、式 (4) より

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + \left[\frac{1}{2} \eta^2 + \beta \eta_{xx} \right]_x &= 0 \\ \left[\frac{1}{2} \eta^2 \right]_t + \left[\frac{1}{3} \eta^3 + \beta \left(\eta \eta_{xx} - \frac{\eta_x^2}{2} \right) \right]_x &= 0 \\ \left[\frac{1}{3} \eta^3 - \beta \eta_{xx}^2 \right]_t \\ + \left[\frac{1}{4} \eta^4 + \beta (\eta^2 \eta_{xx} + 2 \eta \eta_x \eta_{xx}) + \beta^2 \eta_{xx}^2 \right]_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

などが導かれるので、式 (6) より、

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \eta dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \eta^2 dx, \\ I_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \eta^3 - \beta \eta_{xx}^2 \right) dx \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

などの保存量が得られる。なお、この一般形は、

* 正会員 理修 理化学研究所 海洋物理

$$I_m = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\eta^m}{m} - \beta \frac{(m-1)(m-2)}{2} \eta^{\frac{m-3}{2}} \right. \\ \left. + O(\beta^2) \right\} dx \quad \dots\dots\dots (9)$$

で表わされる。

さて、Zabusky⁶⁾ は、 $\text{sech}^2 x$ 型の初期波形を与えて、数値計算を行い、何個かの soliton と、それ以外のさざ波の部分に分裂していくことを示しているが、ここでも、 $\eta(x, 0) = \text{sech}^2 x$ を仮定すると、初期波形の持つ保存量は、式(9)より $O(\beta^2)$ 以下を省略して

$$I_1^{(I)} = 2 \\ I_m^{(I)} = \frac{(2m-2)(2m-4)\dots 2}{(2m-1)(2m-3)\dots 3} \\ \times 2 \left[\frac{1}{m} - \beta(m-2) \right], \quad (m \geq 2) \quad \dots\dots\dots (10)$$

となる。ただし、肩つき添字 (I) は、初期波形の持つ保存量の意味である。一方、soliton 波高を a とすると、soliton 解は $\eta = a \text{sech}^2 \sqrt{\frac{a}{12\beta}}(x - c_0 t)$ のように表わされるので、式(10)と同様に、

$$I_1^{(S)} = 2\sqrt{12\beta} a^{1/2} \\ I_m^{(S)} = \sqrt{12\beta} \frac{(2m-2)(2m-4)\dots 2}{(2m-1)(2m-3)\dots 3} \\ \times \left[\frac{2}{m} - \frac{m-2}{6} \right] a^{\frac{2m-1}{2}}, \quad m \geq 2 \quad \dots\dots\dots (11)$$

が得られる。ここに (S) は soliton の持つ保存量を表わす。さて、今与えられた初期波形が n 個の soliton とさざ波に分裂していくとすれば、さざ波の部分の持つ保存量を ε として、

$$I_n^{(I)} = \sum_{i=1}^n I_{m_i}^{(S)} + \varepsilon_m \quad \dots\dots\dots (12)$$

が成立しなければならない。しかし、 ε については知識を持合わせていないので、soliton のみで保存則が満足されると仮定して、それに適する soliton 波高を求める。まず、1 個の soliton を仮定すると、

$$I_1^{(I)} = I_1^{(S)}, \quad I_2^{(I)} = I_2^{(S)} \quad \dots\dots\dots (13)$$

より、 $a=1$ 、 $\beta=1/12$ が求まる。これは初期波形が、soliton 解である場合に対応し、当然のことながら、 $I_3 \sim I_m \dots$ の保存則を満足する。次に n 個の soliton によって保存則が満足される場合を考えると、式(10)、(11)、(12)より、

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_i + \dots + x_n &= C_1 \\ x_1^3 + x_1^3 + \dots + x_i^3 + \dots + x_n^3 &= C_2 \\ x_1^{2m-1} + x_2^{2m-1} + \dots + x_i^{2m-1} + \dots + x_n^{2m-1} &= C_m \\ &\dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

が得られる。

ここに、 $x_i = a_i^{1/2}$ で、 i は i 番目の soliton を意味し、式(12)の ε の項は省略してある。

また、

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{12\beta}}, \quad C_m = 2 \left[\frac{1}{m} \times \beta(m-2) \right] / \\ \sqrt{12\beta} \left[\frac{2}{m} - \frac{m-2}{6} \right], \quad m \geq 2 \quad \dots\dots\dots (15)$$

である。式(14)が成立するためには、必要条件として $C_m > 0$ が要求されるが、 C_4 と C_5 によって β の限界が定まり、

$$\frac{1}{8} > \beta > \frac{1}{15} \quad \dots\dots\dots (16)$$

が得られる。保存則が soliton のみで満足され得る β の範囲は、すでに狭く限定されていることがわかる。さて、式(14)において、低次の保存則を優先し、与えられた β に対して、1 個の soliton の場合は I_1 で、2 個のときは I_1 と I_2 で、3 個のときは I_1, I_2, I_3 で定めるとし、それぞれの場合につき soliton 波高を求めた結果を図-1 に示す。2 個の soliton を仮定した場合は

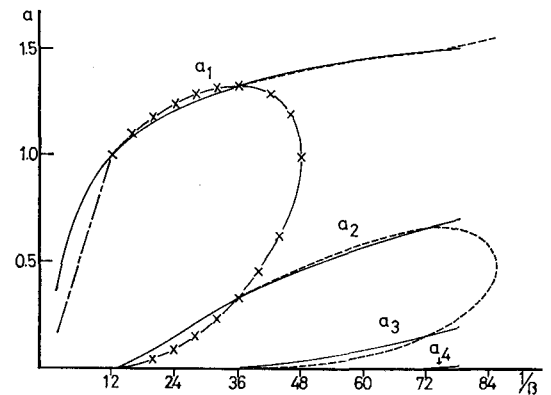


図-1 1 個の soliton (— — — —), 2 個の soliton (— × — × —) 3 個の soliton (·····) を仮定して保存則より得られた soliton 波高。実線は固有値法による解。

$12 < \frac{1}{\beta} \leq 48$ で、3 個の soliton の場合は $36 < 1/\beta \leq 86$ の範囲でのみ、正の実根が存在する。 $1/\beta > 48$ では 3 個以上の、 $1/\beta > 86$ では 4 個以上の soliton を仮定しないと、 $I_1 \sim I_3$ の保存則は満足されないことがわかる。 $36 \leq 1/\beta < 48$ では、2 個の場合と 3 個の場合と、どちらが現実的なかわからない。そこで、soliton への分裂を固有値問題として取扱ひ、両者の比較を行う。

3. 保存則と固有値による方法の比較

前述のように、K-dV 方程式に支配される初期波形の変形は、固有値問題として解釈できることが、Gardner, Miura, Lax らによって研究されている。Lax⁴⁾ は、

表—1 KdV 方程式と soliton 解, operator, 固有値と波高の関係 (c_0 は波速を表わす)

	K-dV eq.	Soliton	operator	Wave height & eigen value
Gardner et al.	$\eta_t - 6\eta\eta_x + \eta_{xxx} = 0$	$\eta = -a \operatorname{sech}^2[Y]$ $Y = \sqrt{\frac{a}{2}}(x - 2at)$	$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \eta$	$a = -2\lambda$
Lax	$\eta_t + \eta\eta_x + \eta_{xxx} = 0$	$\eta = 3c_0 \operatorname{sech}^2[Y]$ $Y = \frac{\sqrt{c_0}}{2}(x - c_0 t)$	$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{6}\eta$	$a = 12\lambda = 3c_0$
Present study (Lax's Method)	$\eta_t + k_1\eta_x + k_2\eta\eta_x$ $+ k_3\eta_{xxx} = 0$	$\eta = -\frac{3(k_1 - c_0)}{k_2} \operatorname{sech}^2[Y]$ $Y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_0 - k_1}{k_3}}(x - c_0 t)$	$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ $+ \frac{1}{6}\frac{k_2}{k_3}\eta$	$a = \frac{12k_3}{k_2}\lambda = \frac{3(c_0 - k_1)}{k_2}$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (17)$$

の方程式を用い, 固有値を引出す operator, 固有値と, soliton 波高との関係などを導き出している。ここでは一般的に,

$$\eta_t + k_1\eta_x + k_2\eta\eta_x + k_3\eta_{xxx} = 0 \quad (18)$$

の方程式を用いて, Lax の方法に従い, 上記の関係を求めた。実際の問題に適用する際, 水平方向のスケールなどにあいまいな点が残るので, 次元のある形で使用できるようにした訳である。表—1 にその計算結果と, 他のものとの比較を示す。式 (4) を用いた場合, 式 (18) において, $k_1=0$, $k_2=1$, $k_3=\beta$ となるので, operator, 固有値 λ と波高 a との関係は, それぞれ,

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{6\beta}\eta, \quad a = 12\beta\lambda \quad (19)$$

となる。

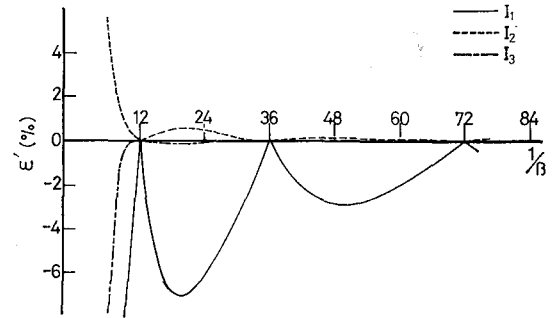
これらの関係を用い, $\operatorname{sech}^2 x$ 型の初期波の変形を固有値問題として解くと, 分裂していく soliton の個数, 波高が β に依存して得られる。電子計算機を用いて数値的に求めた固有値の近似解から得られる soliton 波高を図—1 に示す。これによると, $1/\beta \leq 12$ では 1 個, $12 < 1/\beta \leq 36$ では 2 個, $36 < 1/\beta \leq 72$ では 3 個, $72 < 1/\beta$ では 4 個の soliton への分裂が見られる。 β の意味から考えると, 初期波形の水平スケール, 波高が soliton 解のそれらに比べて大きいほど, 多数の soliton に分裂していくことがわかる。

固有値による方法と, 保存則による方法とを比較すると, 波高について, $12 \leq 1/\beta \leq 36$ では, 2 個の soliton, $36 < 1/\beta \leq 72$ では 3 個の soliton を用いて保存則から得たものとかかなりよく一致している。次に固有値法による解が, 保存則をどの程度満たすかを調べるために,

$$\varepsilon'_m = \frac{\varepsilon_m}{I_m^{(I)}} = \frac{I_m^{(I)} - \sum I_{m,i}^{(S)}}{I_m^{(I)}} \quad (20)$$

を I_1, I_2, I_3 の保存量につき計算し, 図—2 に示す。 $1/\beta = 12, 36, 72$ では $\varepsilon' \approx 0$ であり, $1/\beta < 12$ では ε' は

大きく, soliton 以外のさざ波の部分に与えられる保存量が無視できないが, $1/\beta$ が十分大きければ, $I_1 \sim I_3$ の保



図—2 soliton 以外の部分の保存量

存量は, soliton のみで満足される傾向にある。Zabusky⁶⁾ は,

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (21)$$

の型の方程式を用い, 初期波形として,

$$u(x, 0) = -p(p+1) \operatorname{sech}^2 x \quad (22)$$

を与え, p が正の整数のとき, 式 (22) の初期波形は soliton のみに分裂することを示しているが, これは, われわれの場合

$$1/\beta = 6p(p+1) \quad (p \text{ は正の整数}) \quad (23)$$

のときに相当し, 上記の結果と一致する。しかし, 高次の保存量を考えたとき, 式 (16) からみると, 保存則は, soliton のみでは満たされない。これは, β^2 以後の高次の項を省略したからであろうか。 I_4 以後の保存則については Miura らが求めているが, ここでは Zabusky⁷⁾ により,

$$I_4 = \int \left\{ \frac{\eta^4}{4} - 3\beta\eta\eta_x^2 + \frac{9}{5}\beta^2\eta_{xx}^2 \right\} dx \quad (24)$$

を取扱う。式 (9) から, 式 (10), (11) を求めたのと同様の手続きにより,

$$I_4^{(I)} = \frac{16}{35} \left[\frac{1}{2} - 4\beta + 12\beta^2 \right],$$

$$I_4^{(s)} = \frac{4}{35} \sqrt{12\beta} a^{7/2} \dots\dots\dots (25)$$

が得られる。式 (20), (25) から ϵ_4 を $1/\beta=12, 36, 72$ の場合につきそれぞれ求めると 0.03%, 0.05%, 0.05% となり, $O(\beta^2)$ の項を省略した場合が 0.03%, 32%, 33% であるのに比べ, 非常に小さくなっている。このことから, I_4 以後の保存量は, β について高次の項まで含めて, 満足されるようである。Berzin & Karpman¹³⁾ は, $\eta(x, 0) = \eta_0 \exp(-x^2/l^2)$ のような初期波形の分裂を, 保存則を用いて検討し, 数値計算結果と比較し, 保存則から得られる soliton 波高の中で任意の 2 つの波高がほぼ等しくなるような β の所では, 現象の性質が不連続的に変化することを示している。しかし, われわれの結果からみると, たとえば $1/\beta=48$ のところで 2 個の soliton から 3 個の soliton への分裂というように不連続的に現象が変わり, 波高も大きく変化するのはなしに, すでに $1/\beta>36$ で 3 つ目の soliton が表われ, おおのの soliton 波高は, $1/\beta$ の増加に対し単調に増加していくように思われる。

4. 実験とその結果

初期波の変形を実験的に調べ, soliton への分裂現象を観察したが, ここではごく一部分の紹介にとどめる。測定に用いた水路は, 東京大学地震研究所のもので, 長さ, 10 m, 幅 40 cm, 深さ 40 cm のものである。平板の移動によるピストン型の波起こし装置を用いたが, 理想的な孤立波をも起こし得るために, Boussinesq の孤立波理論に基づいた特殊なカムを作成した (French⁸⁾)。このカムを用いると, 造波板の変位 X_p は,

$$X_p = \frac{D}{2} \tanh \Omega(t+t_0) \dots\dots\dots (26)$$

で与えられる。ただし, Ω, D は, それぞれカムの回転角速度, 造波板の最大移動距離であり, 水深を h , 波高

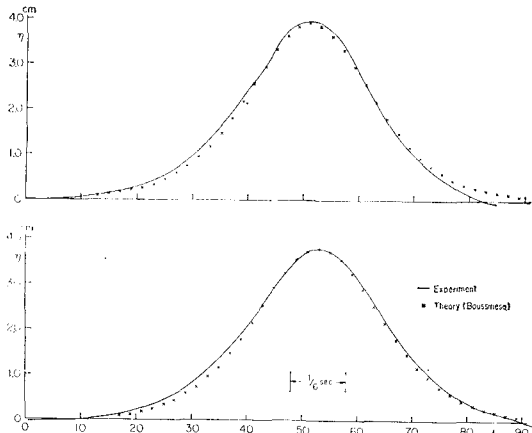


図-3 水深 15 cm, $S=11$ cm (上), $S=199.5$ cm (下) での波形

を a_0 として,

$$D = 4\sqrt{\frac{a_0 h}{3} \left(1 + \frac{a_0}{h}\right)}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{3a_0 g}{4h^2} \left(1 + \frac{a_0}{h}\right)} \dots\dots\dots (27)$$

の関係にあるとき, 理想的な孤立波を起こし得る。われわれの場合, $D=22.9$ cm と固定してあるので, 水深を与えると上記の条件にあう Ω は定まってくる。変形の試験ではこの条件からかけ離れた Ω の値を用いることに

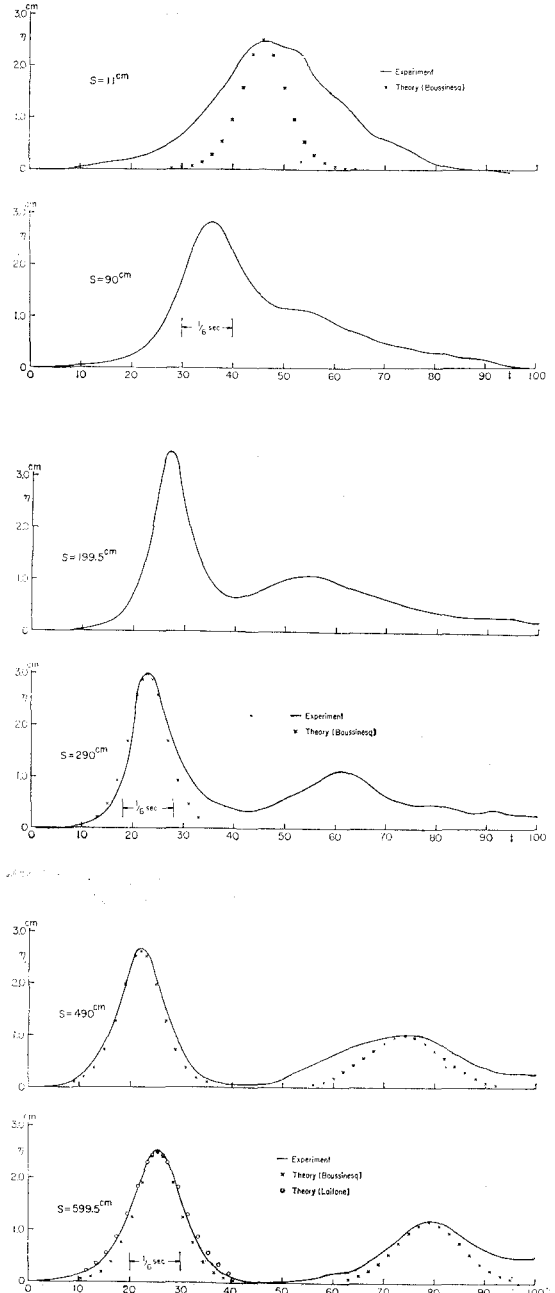


図-4 水深 5 cm, $\Omega=\pi/1.2$ rad/sec での波形, soliton への分裂がみられる

より初期波形を与えた。なお、カムは、リミットスイッチと電磁クラッチブレーキを用いて、ほぼ一回転で停止できるようにしてある。波高計は、抵抗線型を用い、数箇所を設置した。図-3 は水深 15 cm の場合、式 (27) の関係を満足するような Ω を用いて起こした波の波形である。造波板の終点からの距離を S で示す。双方とも理論波形とよく一致している。図-4 は水深 5 cm の場合、 $\Omega = \pi/1.2$ rad/sec の場合の実験結果である。 $S = 11$ cm のところの波形は保存されず、水路を進むにつれていくつかの孤立的波に分裂していく様子がみられ、これらはいずれも孤立波の理論波形に近い。次に図-4 の $S = 11$ cm での波形を長波の波速を用いて空間波形にやきなおしたものを初期波形とし、式 (1) を適用し、表-1 の operator を用いて、次元のある形のままで固有値を求め、分裂していく soliton 波高を求めたところ、3 個の soliton が得られ、それぞれの波高は、3.55 cm, 1.33 cm, 0.08 cm となった。しかし、 $S = 599.5$ cm のところで測定された波高は、第一番目が、2.54 cm, 第 2 番目は 1.21 cm となっており、3 番目は測定されていない。3 番目の波高は小さく、さざ波部分との区別もつきにくいので何ともいえないが、一番目のものは、測定されたものが予測されるものより小さい。ただ、図-4 の $S = 199.5$ cm のところでの波形をみると、3.50 cm の波高を持っており、その後の波高の減衰が何によっておこるのか定かでない。いずれにしろ、実験結果に対する固有値問題としての解釈は、そのやり方にもまだ不十分なところがあり、後日検討することにする。

5. Undular Bore への応用

浅海を進む長波は、しばしば前面にとがりを見せ、ボアを形成する。しかし水深に比して初期の波高があまり大きくないとき、波は break せず一連の波列ができる。この際できた波の高さがどの程度であり、また何によって決まるかという問題は、実験的にも理論的にもかなり数多く研究されてきている。しかし、非定常な問題としての理論的取扱いは少ない。ここでは、流体の運動が K-dV eq. に従うと仮定し、初期波形から分裂していく孤立波の最高波高を求めることでこの問題を解くことにする。

方程式は式 (1) を、長さのスケールは水深 h 、時間の

スケールは $\sqrt{\frac{h}{g}}$ で無次元化した

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\eta\eta_x + \frac{1}{6}\eta_{xxx} = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

を用い、初期波形として

$$\eta(x, 0) = \frac{1}{2}\eta_0 \left(1 - \tanh\left(\frac{x}{A} + 2.5\right)\right) \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$\eta = \frac{1}{2}\eta_0(1 - \tanh(\frac{x}{A} + 2.5))$$

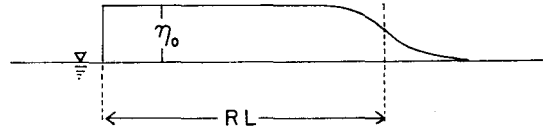


図-5 Bore のモデル波形

のようなモデル波形を考える。図-5 に示したように、 RL は変曲点より後の部分の長さとする。式 (28) に用いる operator、固有値と波高の関係は表-1 より、

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{3}{2}\eta, \quad a = \frac{4}{3}\lambda \quad \dots\dots\dots (30)$$

で与えられるので、これらを用い η_0 , A , RL をいろいろ変えて、分裂していく soliton 波高を求めた。図-6 は $\eta_0 = 0.2$ の場合につき $A = 2.0, 8.0$ で、それぞれ RL を変化させたときの分裂 soliton の最高波高(これは第一波のものである)に対応する固有値を示す。 RL が大きくなると、 λ は A の値に無関係にほぼ 0.3 の値を示す。これは波高が 0.4、すなわち η_0 の 2 倍であることを意味する。 η_0 の値を 0.1 から 0.5 まで 5 つの場合に

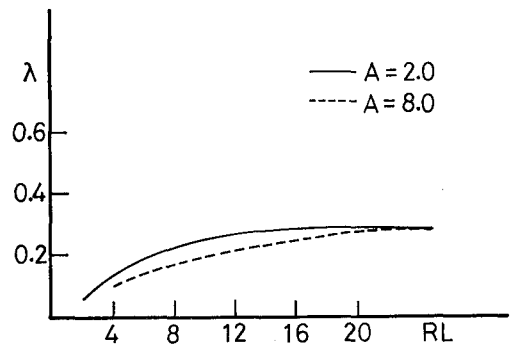


図-6 前面勾配に関する A 量をパラメータとした、水平スケール RL に対する固有値

つき計算したが、いずれも η_0 の値にはよらないことがわかった。その結果を図-7 に○印で示す。ただしこの図中で η_0 , h , $\eta_{\max}$ は、いずれも次元のある量であることを付記しておく。●印で、Keulegan & Patterson⁹⁾, Peregrine¹⁰⁾ の論文から, Bazin, Sandover & Taylor, Favre らの実験結果をまとめて示した。 $\eta_0/h < 0.4$ の範囲では、ここに述べた方法による結果は実験値の上限として採用できるようであるが、非線形性の強い所では不十分である。Murota¹¹⁾, 室田・岩田¹²⁾は、同様の実験を綿密に行って、詳細な検討を加えているが、それによると非線形性の弱い所でも $\eta_{\max}/\eta_0$ が 2 を越えることがある。ただ、この種類の実験は η_0 の決定に難しいところがあり、結果にも微妙にきいてくるようである。しか

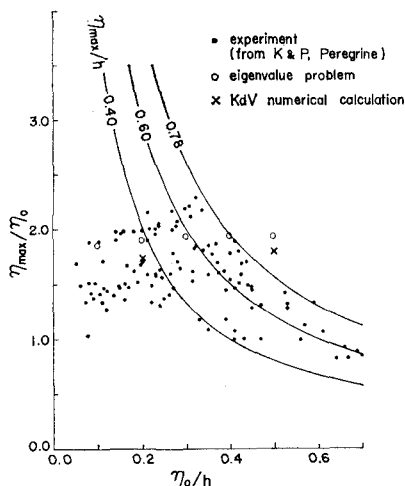


図-7 初期波の変形後の波高
×印は $T=47.96$ の計算値

し、この辺を考慮して整理しなおしてみても、やはり実験値の上限は、 $\eta_{\max}/\eta_0=2.7$ 程度である。K-dV eq. という近似は、定量的にみて十分でないのかもしれない。

6. 数値計算

式(29)の初期波形に対し、K-dV eq. の数値計算を行った。用いた計算スキームは、Zabusky⁶⁾による Four point, left sweeping, two-time-level scheme である。これは、4つの格子点 ($i-1, i, i+1, i+2$) と2つの時間レベル ($j, j+1$) を用いるもので、

$$\Delta t = \frac{3}{2}(\Delta x)^3 \quad \dots\dots\dots (31)$$

の条件のもとで、式(28)を

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \frac{1}{(\Delta x)^3} [\eta(i+2, j+1) - 3\eta(i+1, j) + 3\eta(i, j+1) \\ & - \eta(i-1, j)] + \frac{1}{4\Delta x} [\eta(i+2, j+1) - \eta(i, j+1) \\ & + \eta(i+1, j) - \eta(i-1, j)] \\ & \times \left[1 + \frac{3}{4} (\eta(i+2, j+1) + \eta(i-1, j)) \right] = 0 \quad (32) \end{aligned}$$

のように差分化し、relaxationの方法で解くものである。

図-8は、 $\eta_0=0.2$ の場合の数値計算結果を示す。初期波形から分裂していく soliton が見える。第一波の波高の時間変化を図-9の中の×印で表わす。計算値は、もっと密にあるが、見やすくするために省略した。実線は、この計算値の波高変化によく合うような曲線であり、最小自乗法的に求めた。この曲線と計算値とは差の二乗の総和が 1.4×10^{-6} であり、波高変化は非常によく、この曲線で近似される。 $T \rightarrow \infty$ では $\eta_{\max}=0.384$ となるので、 $\eta_{\max}/\eta_0=1.92$ となる。 $\eta_0=0.5$ の場合も同様な計算を行うと $\eta_{\max}/\eta_0=1.97$ となり、 η_0 の値にはほとんど無関係に $\eta_{\max}/\eta_0$ はほぼ2になることがわかった。

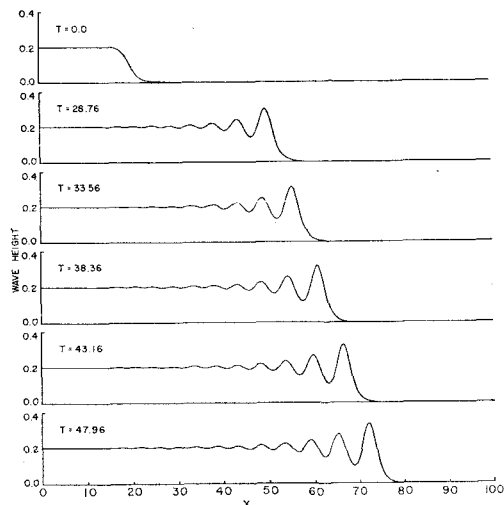


図-8 $\eta_0=0.2$ のときの数値計算結果

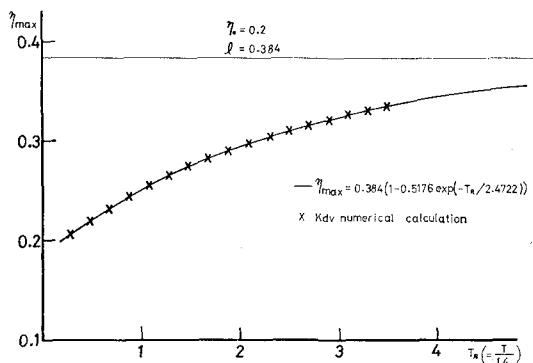


図-9 数値計算による第一波の波高の時間変化
 $\eta_0=0.2$ の場合

6. あとがき

sech²x 型の初期波の変形を KdV 方程式に基づき、保存則と固有値問題の双方の立場から取扱った。複数個の soliton に分裂する範囲では、二つの方法による結果はかなりよい一致をみた。分裂に対する初期波形のアーセル数の役割が明確になった。高次の保存量には β の高次の項が無視できないことがわかった。undular bore の最高波高は、KdV 方程式に基づくかぎり、初期波高の2倍程度であることがわかった。水槽実験の結果も初期波の soliton への分裂を示しているが、固有値問題としての解釈はまだまだ不十分である。

最後に、ここで述べてきた分裂 soliton の波高は、全て $t \rightarrow \infty$ での情報を与えるものであり、変形の過程についてはなんら言及できない。実際の問題に適用する際、変形の時間スケールが問題となろうが、たとえば、分裂 soliton の第1波、第2波の水平スケール、波速をそれぞれ無次元の形で l_1, l_2, c_1, c_2 として、 $l^* = (l_1 + l_2)/(c_1 - c_2)$ を定義すると、これは、それぞれの振幅 a_1, a_2 を用い

て, $t^* = 6\sqrt{3}\beta/(a_1 - a_2) \times (1/\sqrt{a_1} + 1/\sqrt{a_2})$ と表わせる。
この t^* は、図—1 より β に依存して値が定まり、初期波の分裂の時間スケールを与えるものとして意味があらう。

謝 辞: 本研究にあたり、終始ご指導を賜った東京大学地震研究所 梶浦教授をはじめとする津波高潮研究室の方々に深く感謝の意を表します。また、快く貴重な実験資料を貸して下さった、大阪大学工学部 室田教授、岩田講師に深く感謝いたします。

なお、本研究において、東京大学大型計算センターの HITAC 8800/8700, 東大地震研究所の IBM 360/40, 理化学研究所の FACOM 230/75 を使用したことを付記する。

参 考 文 献

- 1) Korteweg, D. J. and De Vries, G.: On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Phil. Mag.* S. 5, Vol. 39. No. 240, May, 1895.
- 2) Zabusky, N. J. and M. D. Kruskal: Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *physical review letters* Vol. 15, No. 6, pp. 240~243, 1965.
- 3) Gardner, C. S., J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura: Method for solving the Korteweg-deVries equation, *physical review letters*, Vol. 19, pp. 1095~1097, 1967.
- 4) Lax, P. D.: Integrals of nonlinear equation of evolution and solitary waves, *Communications on pure and applied mathematics*, Vol. 21, pp. 467~490, 1968.
- 5) Miura, R. M., C. S. Gardner and M. D. Kruskal: Korteweg de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion, *J. Math. Phys.*, Vol. 9, No. 8, pp. 1204~1209, 1968.
- 6) Zabusky, N. J.: Solitons and bound states of the time-independent Schrödinger equation, *Physical review*, Vol. 168, No. 1, pp. 124~128, 1968.
- 7) Zabusky, N. J.: A synergetic approach to problems of nonlinear dispersive wave propagation and interaction, *Nonlinear Partial Differential Equations* (ed. W. Ames). New York, Academic Press, 1967.
- 8) French, J. A.: Wave uplift pressures on horizontal platforms, W. M. Keck laboratory of hydraulics and water resources, Division of engineering and science, Cal. Tech., KH-R-19, July, 1969.
- 9) Keulegan, G. H. and G. W. Patterson: Mathematical theory of irrotational transition waves, *J. of Research of the National Bureau of Standard*, Vol. 124, 1940.
- 10) Peregrine, D. H.: Calculations of the development of an undular bore, *J. of Fluid Mech.*, Vol. 25, Part 2, 1966.
- 11) Murota, A.: Transformation of surges, *Proc. 10th Conf. on Coastal Eng.*, 1966.
- 12) 室田 明・岩田好一朗: 段波の変形に関する研究, *土木学会論文集*第 160 号, pp. 49~58, 1968.
- 13) Berzin Yu. A. and V. I. Karpman: Nonlinear evolution of disturbances in plasmas and other dispersive media, *Soviet Physics JETP*, Vol. 24, No. 5, pp. 1049~1056, 1967.