

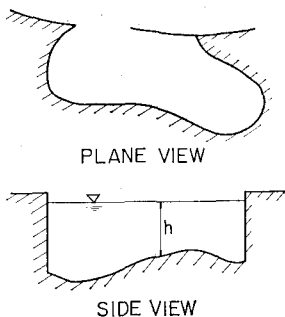
波動解析への有限要素法の適用 (第2報)

—— 湾水振動の解析 ——

坂 井 藤 一*・月 岡 康 一**

1. ま え が き

湾水振動の解析については、古くから多くの研究がなされている。当初は閉じた領域としてのセイシュ解析であったが、湾水振動では外海との関連が重要となり Miles and Munk をはじめとする有意義な研究結果が報告されている。ここで問題になるのは、湾口で生ずるかく乱波の表現方法である。Miles and Munk¹⁾ はこれを Hankel 関数で表示しているのに対し、Ippen and Goda²⁾ はフーリエ変換によってこれを表示する方法をとった。また、Le Méhauté³⁾ や 梶浦⁴⁾ は 1 次元解析ではあるが、防波堤の効果などの非線形性を考慮し得る理論解析法を提案した。一方、最近では任意形状の湾を実状に近い形で解析するため、Hwang⁵⁾ や Lee⁶⁾ により積分方程式を利用した解析方法が提案されているが、水深変化は考慮できない。以上の解析方法は、定常波動問題として Helmholtz 方程式を基とするものであるが、他に波動方程式そのものから差分法によって数値解を求める方法もある⁷⁾。ここでは、有限要素法 (FEM) により定常波動問題として湾水振動を解析することを試みた。この場合には、かく乱波を特殊関数で表現する必要はなく、港湾形状が任意の場合にも容易に解が得られ、水深変化も任意に与えられる (図-1)。さらに旧来の差分法に比して、境界条件の導入が便利で汎用プログラムの作成が容易である。



Harbor of Arbitrary Shape and Depth

図-1

この論文は、以上のような FEM によって簡単なモデルを用いて行った数値実験について述べたものである。筆者⁸⁾らは、前報において非定常波動伝播解析への FEM の適用を行ったが、本報はその一連の研究として FEM のこの種問題への適用性を実証することが目的である。

2. 基礎理論

ここでは、非圧縮性完全流体で渦なしの微小振幅重力波を取扱う。水面変動を η で表わすと、次の波動方程式が成り立つ。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \eta = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 c は波速で角波数 k および水深 h と次の関係がある。

$$c^2 = (g/k) \tanh(kh) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 c 、 k は角振動数 σ と次の関係がある。

$$k = \sigma/c \quad \dots\dots\dots (3)$$

式 (1) において η が時間に関して調和であるとし、また進行波を表現するため次のように複素数表示する。

$$\eta = (\bar{\eta}^0 + i \cdot \bar{\eta}^s) \cdot e^{-i\sigma t} \quad \dots\dots\dots (4)$$

これを式 (1) に代入し、式 (3) を用いると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\eta}_{xx}^0 + \bar{\eta}_{yy}^0 + k^2 \cdot \bar{\eta}^0 &= 0 \\ \bar{\eta}_{xx}^s + \bar{\eta}_{yy}^s + k^2 \cdot \bar{\eta}^s &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

このようにして、波動方程式 (1) を解く問題は式 (5) で与えられる Helmholtz 方程式を解く問題となる。

さて、この式 (5) に対して次のようなエネルギー型汎関数を考える。

$$I = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ (\bar{\eta}_x^2 + \bar{\eta}_y^2 - k^2 \bar{\eta}^2) - (\bar{\eta}_x^s + \bar{\eta}_y^s - k^2 \bar{\eta}^s) \} d\Omega \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで記号は図-2 に示すように、 Ω は対象領域、 S はその周辺境界、 s は境界に沿う座標、 n は境界に対する外向き法線方向座標を示す。式 (6) の変分をとると、

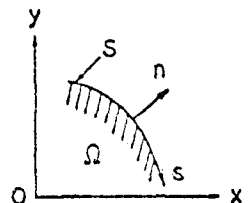


図-2

* 正会員 川崎重工業 (株) 鉄構設計室

** 正会員 川崎重工業 (株) 鉄構設計室

$$\begin{aligned} \delta I = & - \int_{\Omega} \{ (\bar{\eta}_{xx}^e + \bar{\eta}_{yy}^e + k^2 \bar{\eta}^e) \cdot \delta \bar{\eta}^e \\ & - (\bar{\eta}_{xx}^s + \bar{\eta}_{yy}^s + k^2 \bar{\eta}^s) \cdot \delta \bar{\eta}^s \} d\Omega \\ & + \oint_S (\bar{\eta}_n \cdot \delta \bar{\eta}^e - \bar{\eta}_n^s \cdot \delta \bar{\eta}^s) ds \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

となる。 $\delta I=0$ なる条件より、式 (5) と境界条件

$$\left. \begin{aligned} \bar{\eta}_n^e &= 0, & \bar{\eta}_n^s &= 0 \\ \bar{\eta}^e &= C_1, & \bar{\eta}^s &= C_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

が導かれる。すなわち、式 (6) は自由境界および固定境界に囲まれた領域の波動 $\bar{\eta}$ に対応する汎関数であることがわかる。

さて、Bai⁹⁾ は、上に述べた境界とは別の仮想境界の概念を導入した。これは一様な正または負の進行波のみ存在する点に設け得る境界であり、Bai はここに Somerfeld の放射条件を適用することにより次のような仮想境界条件を導いている。

$$\bar{\eta}_n \pm k \bar{\eta}^s = 0, \quad \bar{\eta}_n^s \pm k \bar{\eta}^e = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

透過波のような進行波が存在し、湾水振動現象が部分重複波となるような場合には、このような考慮が必要となり、汎関数も式 (6) とは若干異なるものとなるが、ここではこれ以上述べないことにする。

また、汎関数の導入に際し最小二乗変分原理を利用してもここで述べた汎関数と同じ型のものが得られるが、これについては文献¹⁰⁾に譲ることにする。

それでは再び式 (6) の汎関数にもどろう。これをもとに FEM のマトリックス法を展開する。図-3 のような三角形要素に領域 Ω を分割し、面積座標 $L_k(k=i, j, m)$ を用いて要素内の η を次のように仮定する。

$$\begin{aligned} \bar{\eta}^e &= \{L^T\} \{\bar{\eta}^e\} = L_i \bar{\eta}_i^e, \\ \bar{\eta}^s &= \{L^T\} \{\bar{\eta}^s\} = L_i \bar{\eta}_i^s \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

これを式 (6) に代入して $\delta I=0$ とおくことにより各要素について次式を得る。

$$\begin{bmatrix} [D] & [E] \\ -[E] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\eta}^e \\ \bar{\eta}^s \end{Bmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} [D] &= ([B] + [C] - k^2 [A]) \\ [B] &= \int_{\Delta} \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T dx dy \\ [C] &= \int_{\Delta} \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T dx dy \\ [A] &= \int_{\Delta} \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T dx dy \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

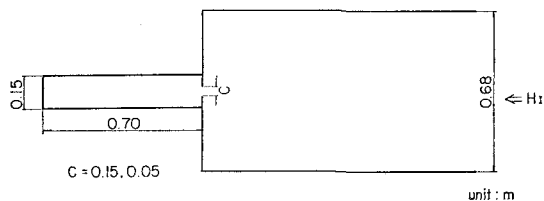
また、 $[E]$ は仮想境界が存在するときに必要となる項である。ただし、 Δ は要素の面積であり、かつ、

$$\mathbf{b} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x}, \quad \mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (13)$$

全体のマトリックス式は、各要素の式 (11) を重ね合わせて次のように得られる。

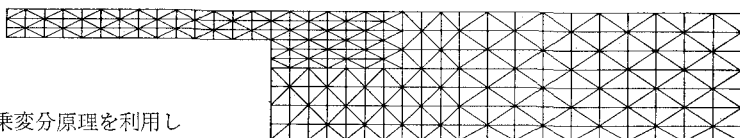
$$\sum_{\Delta} \begin{bmatrix} [D] & [E] \\ -[E] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\eta}^e \\ \bar{\eta}^s \end{Bmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

4. 解析結果



Harbor Model

図-4



Mesh Division

図-5

前節で得られた FEM のマトリックス方程式により図-4 に示す港湾の湾水振動の問題を検討してみる。開口幅 C が 0.15 m と 0.05 m (そのときの開口比 R はそれぞれ 1.0 と 0.33) の場合を考える。水深 h は一定で 0.2 m である。現象は湾軸に対称であると考えられるので湾の下半分だけ取り出して図-5 のようにメッシュ分割して解析した。

解析結果はまず実験値と比較し、次に他の理論値と比較してみる。その後湾水振動に関して FEM 解析により

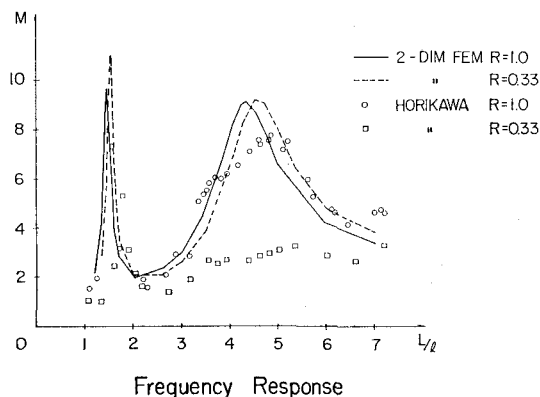


図-6

得られた結果を述べることにする。

ここで取り上げた港湾モデルは堀川・西村¹¹⁾が水槽実験を行ったものであり、その結果と FEM 値を比較してみる(図-6)。これは入射波長 L を湾長 l で無次元化した値に対する波高増幅率 $M(=(\text{湾奥波高})/(\text{入射波高}))$ の変化を示している。実験値と比較してみると、 $R=1.0$ の場合は FEM 値は実験値にほぼ近い値を与えているようである。ところが、 $R=0.33$ の場合は実験値では第1次モードの共振が消滅してしまい第2次モードが残っているのに反し、FEM 値では第1次モードが消滅するような現象はおこっていない。これは開口比が小さいと渦の発生などにより多大のエネルギーが開口部で失われるという従来の実験結果にもよく現われている現象がおこっているためであり、基礎方程式ではこの損失を無視していることから相違が生じたものと思われる。

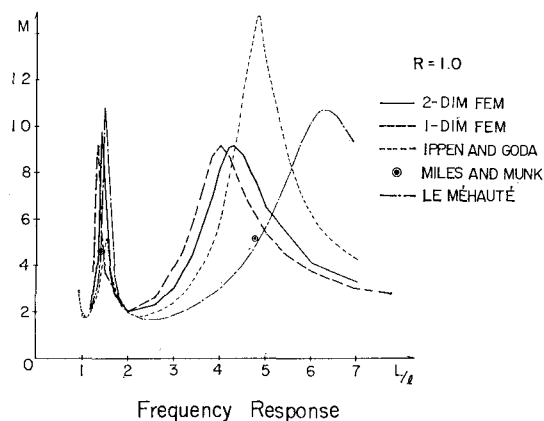


図-7

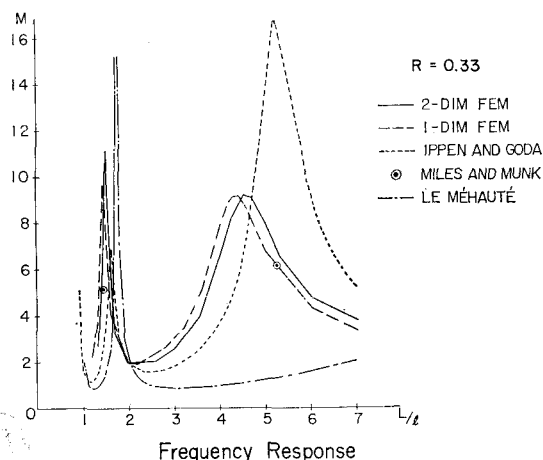


図-8

次に FEM 解析解と従来の解析解を比較してみる。図-7 は $R=1.0$ 、図-8 は $R=0.33$ の場合である。ところが、これらの解析解は、Le Méhauté においては (外湾幅) $< L/12$ 、Ippen and Goda は open sea に直結した

湾でかつ、 $(2\pi/L) \cdot C/2 \leq 1$ 、Miles and Munk は open sea に直結した湾でかつ $(2\pi/L) \cdot C/2 \ll 1$ という条件のもとで解かれたものであり、今考えている港湾モデルとは条件が異なっているので直接比較するには若干無理がある。しかし、これらと比較してみると、FEM 値は他の解析解と似た傾向を示し、またさきの堀川・西村の実験値には他の解析解と比較してもよく合っていると思われる。ところで、Ippen and Goda の理論は open sea の場合に対応するものであり、本モデルの条件とは合致しない。試みに、本モデルの外湾幅を 1.5 倍に拡張して計算してみると、Ippen and Goda の結果に比較的良く一致することがわかる(図-9)。

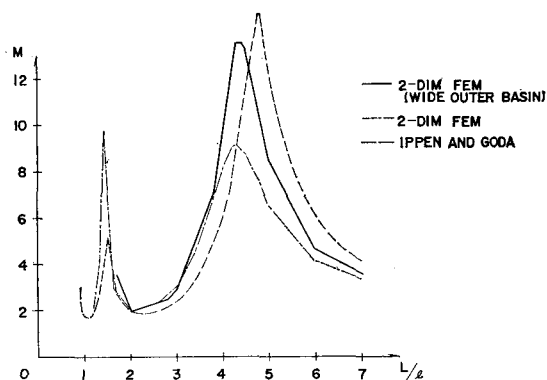


図-9

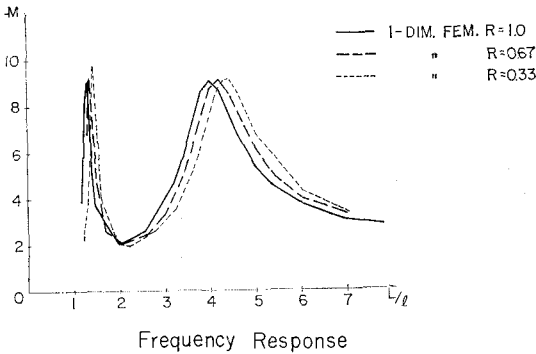
以上述べたように FEM 解析は湾水振動特性をかなりよく表わしていると思われる。

続いて FEM の 2 次元解析と 1 次元解析を比較し、1 次元解析の有効性を検討してみる(図-7, 8)。なお、1 次元 FEM 解析では図-4 の港湾モデルを 99 個の一定長さの要素に分割した。両者を比較してみると、1 次元 FEM のほうが共振波長が少し短くなり、また共振時には湾口がちょうど節になっているが、波高増幅率に関しては 1 次元 FEM と 2 次元 FEM でほぼ同じ値となっている。このように本モデルのような外湾幅が内湾幅の約 4.5 倍程度の場合には 1 次元解析は十分有効であると考えられよう。

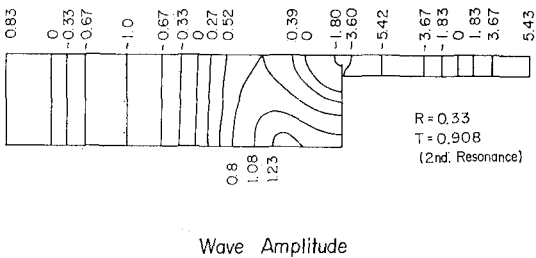
さて、図-9 により内湾幅に対する外湾幅の大きさが共振特性に与える影響を検討してみる。(外湾幅)/(内湾幅)の値が約 6.9 の場合が実線、約 4.5 の場合が一点鎖線、 ∞ の場合である open sea に直結したモデルに対する Ippen and Goda の結果を破線で示した。なお、実線は 2 次共振点付近には引かれていないがほぼ 4 ぐらいの極大値をとるようであるが、横振動による乱れが著しく正確な値を求めることができなかった。これから、実線では open sea に近い 1 次共振点で M が大きく 2 次共振点で小さいが、(外湾幅)/(内湾幅)が約 4.5 の場合にはもはやこの傾向はなく、1 次と 2 次の共振点で

同じくらいの M を与えていることがわかる。

次に開口比 R による共振特性の変化をみると(図—6), R が小さいほうが共振波長が長めになっており, 波高増幅率 M に関しては2次共振において harbor paradox の現象が見られるが1次共振点ではほぼ同じ M の値をとっている。なお, 図—10 に示すように1次元FEM解析では harbor paradox の現象は見られないようであった。



図—10



図—11

また, 図—11 は防波堤設置時における防波堤付近の波高分布の様子を2次元解析によって得たものである。

5. あとがき

以上のような結果から, 湾水振動の問題に FEM を適用することは十分可能であり, FEM の特長から不必要

なモデル化を避け現実に沿った解析が可能であると思われる。現在さらに完全な open sea と直結した任意形状の港湾の問題, あるいは resonator などによる波浪制御の問題への適用を検討しており, さらにまた外海の構造物の波による挙動などの解析にも適用されよう。

本研究にあたり東京大学 堀川清司教授にご教示いただいたことを記し厚く感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Miles, J. and Munk, W: Harbor Paradox, J. Waterways and Harbors Div., ASCE, pp. 113-130, Aug. 1961.
- 2) Ippen, A. T. and Goda, T.: Wave Induced Oscillations in Harbors, The Solution for a Rectangular Harbor Connected to the Open Sea, Rep. No. 59, Hydrodynamics Lab., M.I.T., July. 1963.
- 3) Le Méhauté, B.: Theory of Wave Agitation in a Harbor, J. Hydraulics Div., ASCE, pp. 11-14, Nov. 1960.
- 4) 梶浦欣二郎: 湾水振動におよぼす防波堤の効果, 地震研究所彙報, 第41号, 1963.
- 5) Hwang, L. and Tuck, E.: On the Oscillations of Harbours of Arbitrary Shape, J. Fluid Mech., Vol. 42, Part 3, pp. 447-464.
- 6) Lee, J. J.: Wave Induced Oscillation in Harbors of Arbitrary Geometry, J. Fluid Mech., Vol. 45, Part 2, pp. 375-394.
- 7) 運輸省港湾局調査設計事務所: 長周期波に対する防波堤の効果に関する計算, pp. 47, 1962.
- 8) 坂井藤一・河合三四郎: 波動解析への有限要素法の適用, 第20回海岸工学講演会論文集(1973), pp. 393-396.
- 9) Bai, K. J.: A Variational Method in Potential Flows with a Free Surface, Rep. No. NA 72-2, University of California, Berkeley, Sept. 1970.
- 10) 坂井藤一: 任意の開水路における波動の FEM 解析, 土木学会年次学術講演会講演概要集, 1974.
- 11) 堀川清司・西村仁嗣: 津波防波堤の効果について, 第16回海岸工学講演会講演集(1969), pp. 365-369.