

Stream Function Theory による斜面上の碎波の 水粒子速度の表現について

岩 垣 雄 一*・酒 井 哲 郎**

1. ま え が き

斜面上を進行する周期波の、碎波点における水粒子速度場に関しては、すでに第 18 回¹⁾ および 20 回²⁾ の海岸工学講演会において実験結果を示した。そこでは、特に波の峯の位相における水平方向水粒子速度の実験値の鉛直分布は、同時に測定した碎波水深 h_b 、波の周期 T および碎波高 H_b を用いて求めた Stokes 波の第 3 次近似解³⁾ およびクノイド波の第 2 近似解⁴⁾ による鉛直分布とくらべてかなりの相違があることがわかった。すなわちクノイド波理論による鉛直分布は、その勾配が実験値に比べてはるかに急であり、また Stokes 波理論による勾配はほぼ実験値に近いが、値そのものは一般に実験値よりかなり大きく、Stokes の波速の第 2 定義⁵⁾ を用いてもまだ大きいことが見出された。特に第 20 回の講演会では、波の峯の位相における水平方向水粒子速度の鉛直分布が、碎波型を支配する底勾配 i と沖波波形勾配 H_0/L_0 の値によって分類しうること示した。

一方、第 28 回年次学術講演会⁶⁾ において、Dean⁷⁾ の Stream Function Theory を、第 20 回海岸工学講演会で示した実験結果のうちの 2 例に適用し、同時に測定した碎波点における水位の時間記録を用いて水粒子速度の鉛直分布を求め実験値と比較した。その結果、この理論が水平床上的に変形しない波を仮定しているにもかかわらず、計算した鉛直分布は、実験値とほぼ一致することがわかった。しかしながら、適用例がわずか 2 例であったので、一般的に Dean の理論が斜面上の碎波の水粒子速度場を説明しうかどうかは明らかにしえなかった。この研究は、Dean の Stream Function Theory を著者らの多くの実験結果に適用し、この理論によって斜面上の周期波の碎波点での波の峯の位相における水平方向水粒子速度の鉛直分布が実験のとおり表現できるかどうかを検討するものである。

なお実験は、長さ 30 m、幅 50 cm、高さ 75 cm の波浪水槽で行われたもので、その装置、方法および解析方法に関してはすでに第 20 回海岸工学講演会論文集²⁾ で詳細に述べたのでここでは省略する。

2. Dean の Stream Function Theory⁷⁾

詳細は原論文に示されているので、概略を示しておく。一様水深 h を一定の波速 L/T (L : 波長, T : 周期) で変形せずに伝播する波を、波速と同じ速度で運動する座標系 $x-z$ (x : 波の進行方向の水平座標, z : 静水面を原点とする鉛直上向き座標) から見て、次式のような流れ関数 ϕ で表現する。

$$\phi = \frac{L}{T} z + \sum_{n=4,6,8,\dots}^{N-1} \frac{\sinh \frac{(n-2)\pi(h+z)}{L}}{L} \times \left\{ X_n \cos \frac{(n-2)\pi x}{L} + X_{n+1} \sin \frac{(n-2)\pi x}{L} \right\} \quad (1)$$

上式は、 $\pi/2$ だけ位相差のある 2 項を考慮することによって波形の非対称性を表現している。水面波形 η は、式 (1) で $z=\eta$ とおけば、流れ関数 ϕ が水面で一定値 $\phi(x, \eta) (\equiv X_3)$ をとることから、次式のようになる。

$$\eta = \frac{T}{L} X_3 - \frac{T}{L} \cdot \sum_{n=4,6,8,\dots}^{N-1} \frac{\sinh \frac{(n-2)\pi(h+\eta)}{L}}{L} \times \left\{ X_n \cos \frac{(n-2)\pi x}{L} + X_{n+1} \sin \frac{(n-2)\pi x}{L} \right\} \quad (2)$$

まず、 $T (\equiv X_2)$ の初期値として時間波形の記録から読みとった波の周期を与え、 $L (\equiv X_1)$ の初期値として微小振幅波の波長を与える。次に実測波形を η_m 、理論波形を η_p として、1 周期を I 個の離散値 i に分割し、 η_m と η_p の不一致の程度を次式で表現する。

$$E_2 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (\eta_{mi} - \eta_{pi})^2 \quad (3)$$

残りの未知数 $X_3 \sim X_N$ の初期値は、この E_2 が最小になるように、 $\partial E_2 / \partial X_n = 0$ ($n=3 \sim N$) より求める。

式 (1) からわかるように、 ϕ はラプラスの方程式を満たし、かつ海底での境界条件および水面での運動学的条件を満たす。残りの条件は水面での力学的条件で、水面での圧力 $p=0$ とすれば運動座標系では次式のようになる。

$$\eta + \left\{ \left(u - \frac{L}{T} \right)^2 + w^2 \right\} / 2g = Q \quad (4)$$

ただし、 u , w はそれぞれ静止座標系から見た波の水粒子速度の x , z 成分であり、 Q はベルヌーイの定数である。

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

** 正会員 工博 京都大学助教授 工学部土木工学教室

る。ここでベルヌーイの定数 Q が1周期にわたってなるべく変動しないようにすることを考え、 Q の変動の程度を表現する次のような量 E_1 を考える。

$$E_1 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (Q_i - \bar{Q})^2, \quad \bar{Q} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I Q_i \quad \dots\dots\dots (5)$$

さらに前述の E_2 と合わせて、 $E_T = E_1 + E_2$ なる量を定義し、前述の $X_n (n=1 \sim N)$ の初期値を $X_n' (n=1 \sim N)$ だけ増加すれば、 E_T は近似的に次式で与えられる。

$$E_T = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \left[\left\{ Q_i + \sum_{n=1}^N \frac{\partial Q_i}{\partial X_n} X_n' \right\} - \left\{ \bar{Q} + \sum_{n=1}^N \frac{\partial \bar{Q}}{\partial X_n} X_n' \right\} \right]^2 + \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \left[\left\{ \eta_{pi} + \sum_{n=1}^N \frac{\partial \eta_{pi}}{\partial X_n} X_n' \right\} - \eta_{mi} \right]^2 \quad \dots\dots\dots (6)$$

この E_T を最小にするための式 $\partial E_T / \partial X_j' = 0 (j=1 \sim N)$ は $X_j' (j=1 \sim N)$ に関しての N 個の連立方程式になる。この連立方程式を解いて、 X_j' が十分小さくなければ、 $X_j + X_j'$ を新たに X_j として再び同じ計算を繰返す。

3. 計算結果

実際の計算においては、23 の全実験ケースについて、同時に測定した砕波点での水位の連続した時間記録 η_m から適当な一波を選び、一周期 T を15分割 ($I=15$) して、 $x_i (i=1 \sim 15)$ に対する η_{mi} を読みとった。 N の値としては、Stokes 波の第5次近似解に対応する値13を採用した。また、式(6)の E_T を最小にするための繰

返し計算は5回とした。なお、No. 13~15 の3ケースは、水位の測定を行わなかったので計算から除外した。

図-1(1)~(18)は、こうして計算した Dean の理論波形 η_p (図中 D で示した太い破線) と実測波形 η_m (図中太い実線) を比較したものである。図中には、底勾配 i 、沖波波形勾配 H_0/L_0 および砕波水深 h_b 、砕波高 H_b から求めた $T\sqrt{g/h_b}$ と H_b/h_b の値をも示している。ただし H_b は、第20回海岸工学講演会の際に述べた方法とは異なり、水位の時間記録から求めたものを採用している。表-1に、 $T\sqrt{g/h_b}$ と H_b/h_b の値を全ケースについて示している。表には、繰返し計算の収束度を表現する量として、のちに述べる波の峯の位相における底面での水平方向水粒子速度 u の4回目と5回目の計算値の相対誤差 $(R.E.)_D$ をも示している。No. 2 と 18 は $|(R.E.)_D| > 0.1$ のため、図-1には示していない。

図-1には、表-1の $T\sqrt{g/h_b}$ と H_b/h_b の値を与えて求めた Skjelbreia⁹⁾ の Stokes 波の波形の第3次近似解 (図中 S で示した細い実線) をも示している。この計算では、水深・波長比 h/L の値を20回の繰返し計算で求めたが、Dean の理論の計算と同様に、その収束度を表現するものとして19回目と20回目の計算値の相対誤差 $(R.E.)_S$ を、同様に表-1に示している。No. 6, 12, 22 および 23 は、 $(R.E.)_S > 0.1$ のため、図-1には示していない。

Dean の理論による水平方向水粒子速度 u は、式(1)で考えられる流れ関数 ϕ が波とともに移動する運動座標系での ϕ であることを考慮すれば、次式のように与えられる。

表-1 砕波条件および実験値と計算値の比較

No.	$T\sqrt{g/h_b}$	H_b/h_b	$(R.E.)_D$	$(R.E.)_S$	$\frac{\eta_{p0} - \eta_{m0}}{\eta_{m0}}$	$\frac{u_D - u_E}{u_E} \Big _{1.0}$	$\frac{u_S' - u_E}{u_E} \Big _{1.0}$	$\frac{u_S - u_E}{u_E} \Big _{1.0}$
1	9.3	0.94	-0.01	0.00	0.08	0.38	0.97	1.30
2	11.5	1.11	0.17					
3	12.6	1.00	-0.03	0.01	0.17	0.14	0.71	0.96
4	13.5	1.05	-0.01	0.03	0.01	0.38	1.26	1.62
5	15.0	0.87	-0.08	0.04	0.09	0.09	0.70	0.93
6	17.9	0.84	-0.01	0.12	0.00	0.00		
7	7.8	0.61	0.00	0.00	0.01	0.23	0.37	0.57
8	9.6	0.63	0.02	0.00	-0.02	0.00	0.21	0.36
9	11.9	0.77	-0.01	0.00	0.03	0.08	0.59	0.79
10	11.3	0.69	-0.03	0.00	-0.07	0.00	0.44	0.56
11	13.5	0.91	0.02	0.02	-0.06	0.12	0.81	1.07
12	18.9	1.13	-0.06	0.55	-0.10	-0.07		
16	9.1	0.69	0.05	0.00	-0.10	-0.10	0.28	0.43
17	10.0	0.68	-0.03	0.00	0.02	0.14	0.38	0.54
18	11.8	0.66	-0.26					
19	13.1	0.86	0.02	0.01	0.01	0.14	0.61	0.84
20	14.6	0.75	-0.01	0.02	-0.02	0.10	0.50	0.67
21	17.2	0.79	-0.03	0.07	-0.05	0.12	0.56	0.78
22	19.3	0.82	-0.06	0.18	0.06	0.00		
23	23.9	0.89	-0.07	0.71	-0.02	-0.02		

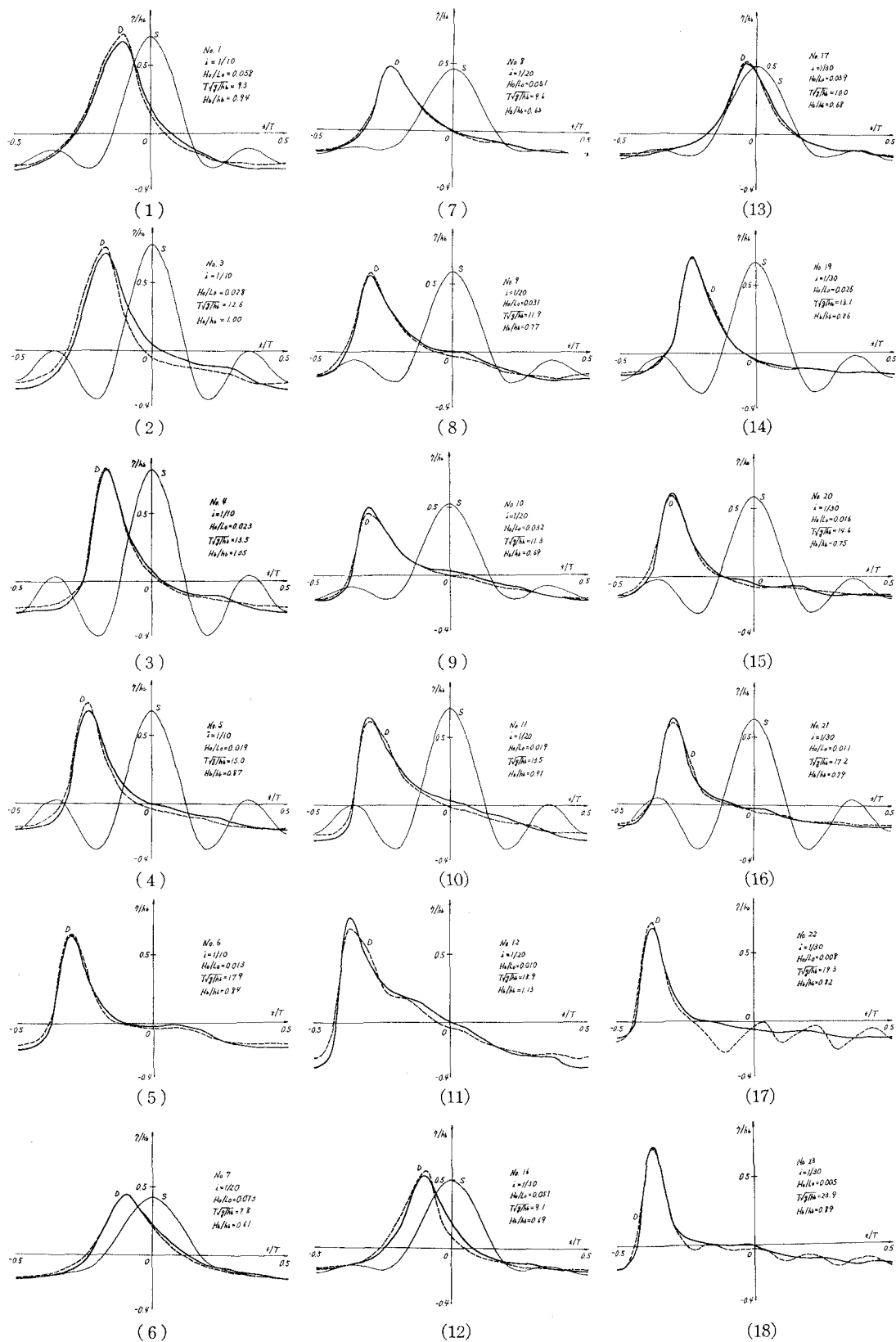


図-1 碎波波形に関する実験値と Dean の理論値との比較

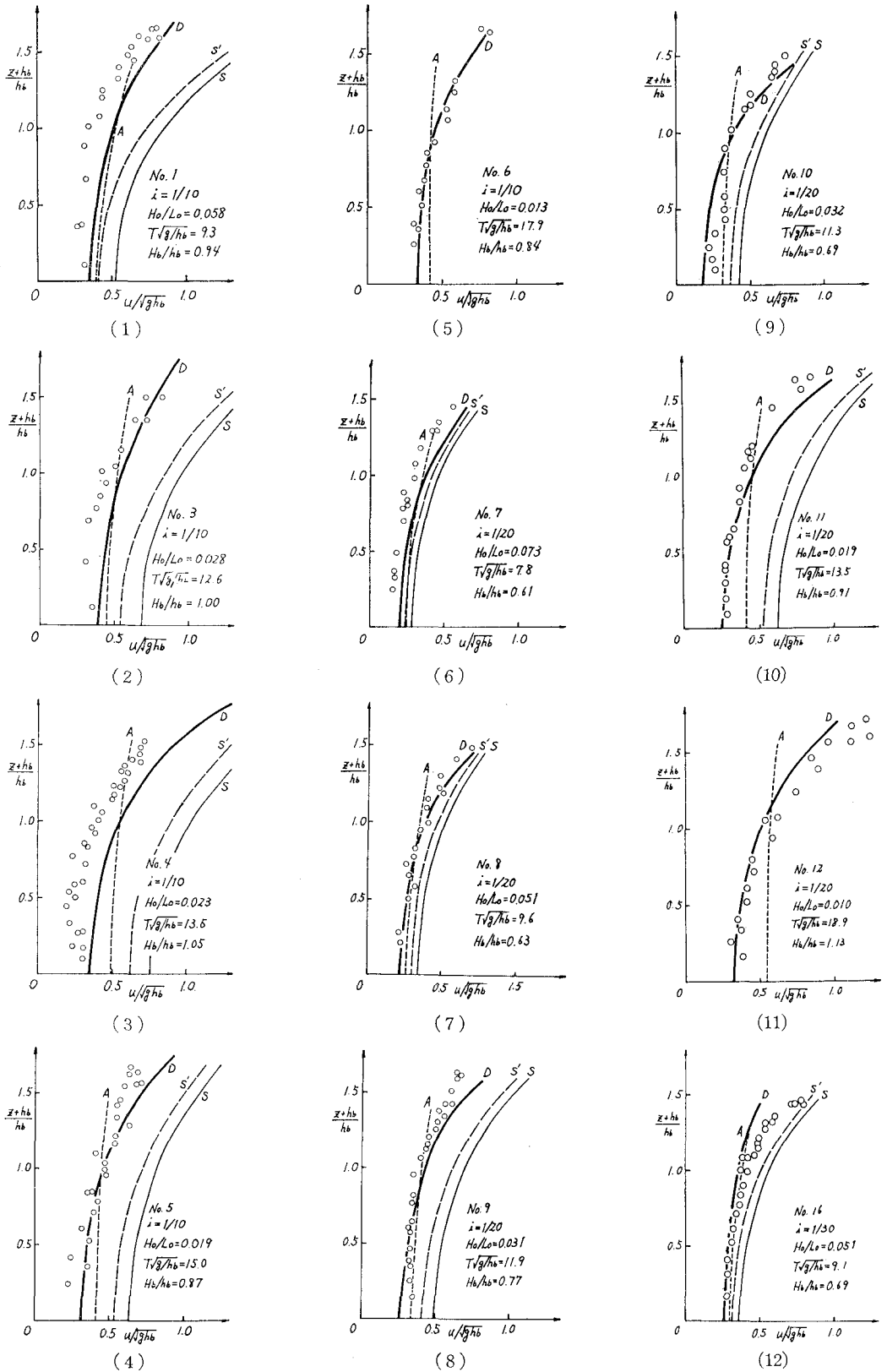


図-2 碎波の水粒子速度に関する実験値と Dean の理論値との比較

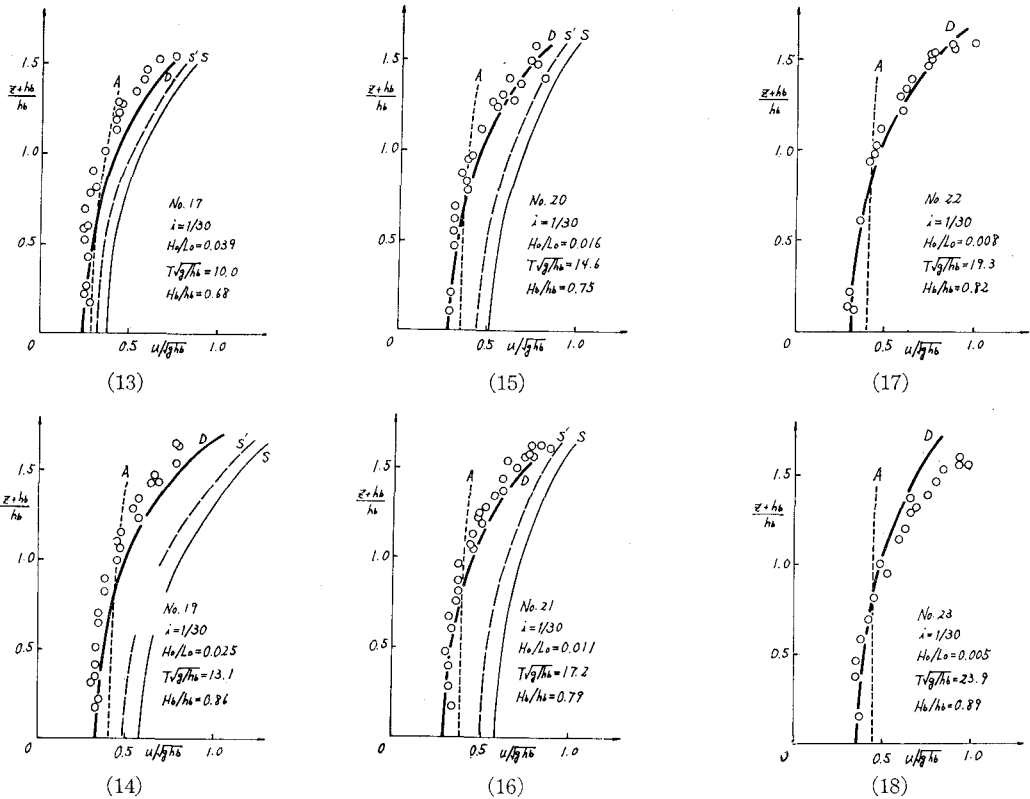


図-2 碎波の水粒子速度に関する実験値と Dean の理論値との比較

$$u = - \sum_{n=4,6,8,\dots}^{N-1} \frac{(n-2)\pi}{L} \cosh(n-2)\pi \frac{h+z}{L} \times \left[X_n \cdot \cos(n-2)\pi \frac{x}{L} + X_{n+1} \cdot \sin(n-2)\pi \frac{x}{L} \right] \dots\dots\dots (7)$$

水位の時間波形から求めた波の峯の位相の x_i を式 (7) に代入すれば、その位相での u が求められる。図-2 (1)~(18) は、こうして求めた Dean の理論による波の峯の位相での u の鉛直分布 (図中 D で示した太い実線) を、実験値 (図中白丸) と比較したものである。なお図中には、Stokes 波の第 3 次近似解の Stokes⁵⁾ の波速の第 1 と第 2 定義を用いた u (図中 S および S' で示している細い実線および破線) および微小振幅波の u (図中 A で示している細い点線) も示している。

4. 考 察

図-1 を見てわかるように、一周期の間の時間波形は、斜面上の碎波点では明らかに非対称で、対称な波形を有する Stokes 波理論はこの事実を説明できない。Dean の理論は、本来実験波形を一致させるように係数 X_n を決定する方法であるので、当然のことながら実験波形をほぼ再現させている。波の峯の位相での水平方向水粒子速

度に直接関係する量として、同じ位相での実験波形の水位 η_{m_0} と Dean の理論波形の水位 η_{p_0} の差を表-1 に示している。すべて 10% 以下であるが、5% 以上のケースは 18 ケース中 7 ケースである。

水粒子速度の鉛直分布に関して、実験値と理論値の一致の程度を量的に表現することは簡単ではない。第 18 回海岸工学講演会においては、その論文集¹⁾の図-7 に示するような鉛直方向の平均値 $\bar{u}$ と分布の勾配を表現する $\Delta(u/\sqrt{gh})/\Delta(z+h/h)$ の 2 つの量で表現を試みたが、ここではこのような量的な議論をする前に、定性的に結果を考察することにする。

図-2 を見ればわかるように、水粒子速度は一般に Stokes の波速の第 1 定義を用いた Stokes 波の理論値、次に第 2 定義を用いた理論値の順に小さくなり、Dean の理論値および微小振幅波の理論値はもとにそれより小さく、最も実験値に近い。Dean の理論分布と微小振幅波の理論分布は互に交差し、微小振幅波のほうが勾配が小さい。以上の傾向は、波高・水深比 H_0/h_0 の値が小さいほど顕著でなくなり、すべての理論分布は実験値に近づいてくる。このことは、 $H_0/h_0 < 0.7$ の No. 7, 8, 10, 16, 17 を見れば明らかである。

微小振幅波理論の鉛直分布は、斜面上の碎波という非線型性がきわめて強い現象にもかかわらず、Dean の理

論とともに最も実験値の分布に近い。しかしながら鉛直分布の勾配は、Dean の理論と異なって実験値と交差する形になっており、実験値の分布より緩やかである。したがって、Morison 公式を用いて斜面上の碎波点での波力のモーメントを微小振幅波理論で求めると、かなり小さく見積る危険性がある。

さて、各理論の鉛直分布と実験値の適合性を量的に表現するために、 $(z+h)/h=1.0$ すなわち静水面における Dean の理論値 $u_D/\sqrt{gh}$ 、Stokes の波速の第 2 および第 1 定義を用いた Stokes 波の第 3 次近似解の理論値 $u_s'/\sqrt{gh}$ および $u_s/\sqrt{gh}$ と実験値 $u_E/\sqrt{gh}$ との差を $u_E/\sqrt{gh}$ で割った値を表—1 に示している。表からわかるように、Dean の理論値は Stokes 波に比べて実験値との差が小さく、Stokes 波理論にくらべて実験値との差はかなり減少するが、それでも No. 1, 4 のケースでは実験値と 40% 近い差があり、No. 7 の場合も 20% 以上の差がある。また一般に、静水面における水平方向水粒子速度に関する実験値と Dean の理論値との差は、波の峯高 η_0 に関する差よりも大きい。ところで、水平方向水粒子速度の測定誤差は、約 9% であった。このことを考えれば、Dean の理論は少なくとも静水面においては、No. 1, 4 および 7 のケースを除いて $(u_D - u_E)/u_E$ の値が 0.14 以下であることから、ほぼ実験値と一致しているといえよう。

以上のように、碎波点での水位の時間記録を与えて計算した Dean の Stream Function Theory による碎波の波の峯の位相における水平方向水粒子速度の理論値は、Stokes 波の理論値とくらべて小さく、測定誤差を考えれ

ば、実験値をほぼ説明しうるといえる。

Dean の理論値が、水平床上の変形しない波を仮定しているにもかかわらず実験値とほぼ一致することは、峯の位相における斜面上の碎波の水平方向水粒子速度を支配するものは碎波の波形であると考えられる。今後は、斜面上で碎ける周期波の碎波波形を理論的、実験的に詳細に検討し、斜面上の碎波の水粒子速度場を明らかにしたい。

参 考 文 献

- 1) 岩垣雄一・酒井哲郎・川島 毅: 斜面上の波の水粒子速度の鉛直分布について, 第18回海岸工学講演会論文集, pp. 93~96, 1971.
- 2) 岩垣雄一・酒井哲郎・月岡康一・沢井信樹: 斜面上の碎波の水粒子速度の鉛直分布と碎波型について, 第20回海岸工学講演会論文集, pp. 553~557, 1973.
- 3) Skjelbreia, L.: Gravity waves, Stokes' third order approximation, Table of function, Council on Wave Research, The Engineering Foundation, 1959.
- 4) Laitone, E.V.: The second approximation to cnoidal and solitary waves, Jour. of Fluid Mech., Vol. 9, pp. 430-444, 1961.
- 5) Tsuchiya, Y. and M. Yamaguchi: Some considerations on water particle velocities of finite amplitude wave theories, Coastal Eng. in Japan, Vol. 15, pp. 43~58, 1972.
- 6) 酒井哲郎・山田雄三: Stream function theory の水粒子速度場への適用性, 第28回年次学術講演会講演概要集, 第2部, pp. 3~5, 1973, 土木学会.
- 7) Dean, R.G.: Stream function representation of non-linear ocean waves, Jour. Geophysical Res., Vol. 70, No. 18, pp. 4561~4572, 1965.