

波動により円柱上に発達する3次元層流境界層について

岩 垣 雄 一*・石 田 啓**

1. 緒 言

円柱状構造物に作用する波力は、一般にモリソン公式を用いて慣性力と抗力の和として表現することが多い。しかし、波動運動による抗力の発生機構については、従来ほとんど研究されておらず、そのためこの場合の抗力係数と定常流の場合の抵抗係数との関係についても、不明確な点が多いといえる。一方、大口径円柱に働く波力の算定法として MacCamy と Fuchs により提示された回折理論¹⁾では、流体の粘性を無視するため、層流はく離の発生や、それに関連する後流抵抗などを考慮することができず、そのため理論の適用範囲が限定される欠点がある。したがって、より正確に波力を算定するためには、波と円柱との相互作用を明らかにするという考え方から、まず円柱が波に及ぼす影響を知り、ついで影響を受けた波の内部機構を明確にして、そのような速度場や圧力場での波が円柱に及ぼす作用力を評価するという方針で研究を進めることが必要であろう。この観点から、本研究ではその一過程として、正弦波により円柱面上に発達する層流境界層を理論的および実験的に取り扱うこととする。

境界層の概念は、1904 年に Prandtl により導入されたが、定常流による円柱上の境界層については、Blasius, Karman, Hiemenz, Porlhausen, Howarth, その他多くの人が研究しており、境界層内の速度分布、はく離点の位置、圧力分布あるいは抵抗係数の特性などについて重要な結果が得られている^{2), 3)}。また静水中を振動する円柱上の層流境界層については、Schlichting が境界層方程式を逐次近似法を用いて解き、境界層外縁の質量輸送の存在を説明している³⁾。なお、Keulegan と Carpenter は、重複波の節の位置に設置した水平円柱のまわりの流況と円柱の受ける波力との関係について研究し、Keulegan-Carpenter 数が 10.0 前後ではく離が発生し、110 程度で Karman 渦列が発生することなどを実験的に見出している⁴⁾。

本研究では、円柱座標表示した Navier-Stokes の方程式に、境界層近似と摂動法を適用して、境界層内の水粒子速度の近似解を誘導し、またこの解を用いて層流はく

離の発生の有無を検討する。なお、境界層内の水粒子速度の分布および後流渦の発生状況について、若干の実験を行ったので、理論値との比較を示すこととする。

2. 理 論

この場合の座標系を図-1に示す。

(1) 円柱周囲の水粒子速度

境界層内の水粒子速度は、境界層外縁で、粘性を無視して得られる主流速度、すなわち回折波の水粒子速度に接続するはずである。回折波の水粒子速度は、円柱壁に沿う方向の成分を U 、鉛直方向の成分を W とすれば、MacCamy-Fuchs¹⁾の

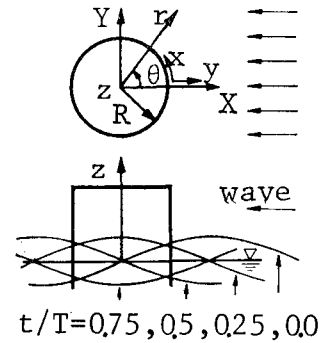


図-1 座 標 系

求めた速度ポテンシャル⁵⁾ ϕ を用いて、

$$U = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\pi H}{T} \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \frac{1}{kr} \times \left[- \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cdot n \left\{ J_n(kr) - \frac{J_n'(kR)}{H_n^{(2)'}(kR)} \cdot H_n^{(2)}(kr) \right\} \sin n\theta \right] e^{i\sigma t} \quad (1)$$

$$W = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\pi H}{T} \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \times \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ J_n(kr) - \frac{J_n'(kR)}{H_n^{(2)'}(kR)} H_n^{(2)}(kr) \right\} \times \cos n\theta \right] e^{i\sigma t} \quad (2)$$

のように求めることができる。ここに、 H は波高、 T は周期、 h は水深、 k は波数、 R は円柱半径、 σ は角周波数、 t は時間であり、 $J_n, H_n^{(2)}$ および $J_n', H_n^{(2)'}$ はそれぞれ n 次のベッセル関数、第2種ハンケル関数およびそれらの導関数である。また E_n は、 $E_0=1$ 、 $E_n=2 \cdot (-i)^n$ 、 $n \geq 1$ である。

(2) 3次元層流境界層

円柱座標表示した Navier-Stokes 方程式および連続

* 正 会 員 工 博 京都大学教授 工学部土木工学教室

** 学生会員 工 修 京都大学大学院 工学研究科博士課程

式を, $r=R+y$, $\theta=x/R$ の関係を用いて境界層用の座標系 (x, y, z) で表わすと,

$$\left. \begin{aligned} u_t + (u u_x + v u_y) / (1+y/R) \\ + v u_y + w u_z = - (1/\rho) p_x / (1+y/R) \\ + \nu \{ u_{yy} + u_{zz} / (1+y/R) \\ + (u_{xx} - u/R^2 + 2v_x/R) / (1+y/R)^2 \\ + u_{zz} \} \\ w_t + u w_x / (1+y/R) + v w_y + w w_z \\ = -g - (1/\rho) p_z \\ + \nu \{ w_{yy} + w_{zz} / (1+y/R) \\ + w_{xx} / (1+y/R)^2 + w_{zz} \} \\ u_x / (1+y/R) + v/R(1+y/R) \\ + v_y + w_z = 0 \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

となる。ここに, u, v, w はそれぞれ x, y, z 方向の水粒子速度, ρ は密度, p は圧力, g は重力加速度, ν は動粘性係数である。

次に諸量を無次元化するため, 流速の代表値として, $U_M = \pi H/T$, 長さの代表値として波長 $L = 2\pi/k$ を用い, また境界層を拡大するために波速 c を用いた便宜的な Reynolds 数 $Re = c/(k\nu)$ を導入すれば, それぞれの量は

$$\left. \begin{aligned} x' = kx, \quad y' = \sqrt{Re} ky, \quad z' = kz, \\ t' = \sigma t, \\ u' = u/U_M, \quad v' = \sqrt{Re} v/U_M, \\ w' = w/U_M, \quad p' = (p + \rho g z) / (\rho c U_M) \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

のように表わされる。しかし, 以後簡単のために無次元量のダッシュを取り除いて表わすことにする。したがって式(3)を無次元表示すれば,

$$\left. \begin{aligned} u_t + (U_M/c) \\ \times \{ (u u_x + v u_y) / kR \sqrt{Re} \} / (1+y/kR \sqrt{Re}) \\ + v u_y + w u_z \\ = -p_x / (1+y/kR \sqrt{Re}) + u_{yy} + u_y / \{ kR \sqrt{Re} \\ \times (1+y/kR \sqrt{Re}) \} + \{ u_{xx} / Re - u / (kR \sqrt{Re})^2 \\ + 2v / (Re kR \sqrt{Re}) \} / (1+y/kR \sqrt{Re})^2 + u_{zz} / Re \\ w_t + (U_M/c) \{ u w_x / (1+y/kR \sqrt{Re}) + v w_y + w w_z \} \\ = -p_z + w_{yy} + w_y / \{ kR \sqrt{Re} (1+y/kR \sqrt{Re}) \} \\ + w_{xx} / \{ Re (1+y/kR \sqrt{Re})^2 \} + w_{zz} / Re \\ (u_x + v/kR \sqrt{Re}) / (1+y/kR \sqrt{Re}) + v_y + w_z = 0 \end{aligned} \right\} \dots (3)'$$

となり, 無次元速度および無次元圧力に関する非線型偏微分方程式が, パラメーター U_M/c , $1/kR \sqrt{Re}$ および $1/Re$ を含んだ形で得られる。

ここに $U_M/c = \pi H/L$ は波形勾配のオーダーを示すものであり, 一般に微小量と仮定できるので,

$$\varepsilon_1 = U_M/c = \pi H/L \ll 1 \dots (5)$$

とおき, これを用いて, 無次元速度を

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_1^2 u_2 + \dots, \\ v &= v_0 + \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_1^2 v_2 + \dots, \\ w &= w_0 + \varepsilon_1 w_1 + \varepsilon_1^2 w_2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

と級数展開する。また $1/kR \sqrt{Re} = \sqrt{\nu T/2\pi}/R$ は境界層厚と円柱半径との比のオーダーを示す量であり, 一般に微小量と仮定できるので, これを

$$\varepsilon_2 = 1/kR \sqrt{Re} = \sqrt{\nu T/2\pi}/R \ll 1 \dots (7)$$

とおけば, $\varepsilon_2 y$ もまた微小であり, 次のような級数近似を行うことができる。

$$\begin{aligned} 1/(1+y/kR \sqrt{Re}) &= 1/(1+\varepsilon_2 y) \\ &= 1 - \varepsilon_2 y + \varepsilon_2^2 y^2 - \dots \dots (8) \end{aligned}$$

ここに ε_2 は, ε_1 と同程度のオーダーかあるいはそれ以下と仮定する。さらに円柱半径と波長の比に関する条件として, ここでは, $kR = 2\pi R/L \leq 1$ となる場合を取扱うことにすれば, $1/Re$ は, $1/Re = (kR)^2 \varepsilon_2^2 \leq \varepsilon_2^2$ となり, ε_2 の2乗のオーダー以下となる。

次に, 境界層外縁の水粒子速度として, 式(1)および(2)で $r=R$ において得られる回折波の水粒子速度の円柱壁面上の値を用いることとし, これらを U_M で割って無次元化したものを改めて U_R, W_R で表わせば,

$$\begin{aligned} U_R &= \frac{\cosh(kh+z)}{\sinh kh} \frac{2i}{\pi(kR)^2} \\ &\times \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot E_n}{H_n^{(2)'}(kR)} \sin \frac{nx}{kR} \right] e^{it} \dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_R &= \frac{\sinh(kh+z)}{\sinh kh} \frac{2i}{\pi kR} \\ &\times \left[- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{H_n^{(2)'}(kR)} \cos \frac{nx}{kR} \right] e^{it} \dots (10) \end{aligned}$$

のようになる。無次元圧力勾配は, これを用いて,

$$\left. \begin{aligned} -p_x &= U_{Rt} + \varepsilon_1 (U_R U_{Rx} + W_R U_{Rz}) \\ -p_z &= W_{Rt} + \varepsilon_1 (U_R W_{Rx} + W_R W_{Rz}) \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

のように近似的に表わすことができる。

式(3)'に, 式(5)から式(11)までを代入し, ε_1 のべきで整頓すれば, ε_1^0 (ε_1 の0乗のオーダー)に関する方程式として,

$$\left. \begin{aligned} u_{0t} - u_{0yy} &= U_{Rt}, \quad w_{0t} - w_{0yy} = W_{Rt}, \\ u_{0x} + v_{0y} + w_{0z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

が得られる。境界条件,

$$\left. \begin{aligned} y=0 \quad &u_0=v_0=w_0=0, \\ y \rightarrow \infty \quad &u_0=U_R, \quad w_0=W_R \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

を満足する式(12)の解, すなわち第1近似解は, Schlichting の解法⁹⁾ に準じて, 次のように求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} u_{1st} &= u_0 = \zeta_0' U_0 e^{it}, \quad w_{1st} = w_0 = \zeta_0' W_0 e^{it}, \\ v_{1st} &= v_0 = -\zeta_0 (U_{0x} + W_{0z}) e^{it} \end{aligned} \right\} (14)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0' &= 1 - e^{-(1+i)y/\sqrt{2}} \\ \zeta_0 &= y - \frac{1-i}{\sqrt{2}}(1 - e^{-(1+i)y/\sqrt{2}}), \\ U_0 &= U_R/e^{it}, \quad W_0 = W_R/e^{it}. \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

この U_0 および W_0 は, 振動流の場合には実数であるが, 波動の場合には式 (9) および (10) からわかるように複素数であり, 実際の水粒子速度は式 (14) の real part で与えられる。

ε_1 (ε_1 の 1 乗のオーダー) に関する方程式は,

$$\left. \begin{aligned} u_{1t} - u_{1yy} &= (U_R U_{R_x} + W_R U_{R_z}) \\ &\quad - (u_0 u_{0x} + v_0 u_{0y} + w_0 u_{0z}) \\ &\quad + (\varepsilon_2/\varepsilon_1) u_{0y} \\ w_{1t} - w_{1yy} &= (U_R W_{R_x} + W_R W_{R_z}) \\ &\quad - (u_0 w_{0x} + v_0 w_{0y} + w_0 w_{0z}) \\ &\quad + (\varepsilon_2/\varepsilon_1) w_{0y} \\ u_{1x} + v_{1y} + w_{1z} &= (\varepsilon_2/\varepsilon_1)(y \cdot u_{0x} - v_0) \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

となり, 境界条件は,

$$\left. \begin{aligned} y=0 \text{ で } u_1 &= v_1 = w_1 = 0, \\ y \rightarrow \infty \text{ で } u_{1y} &= 0, \quad w_{1y} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

で与えられる。式 (16) の解のうち, u_1 のみを示すと, 次式で表わされる。

$$\begin{aligned} u_1 &= (\varepsilon_2/\varepsilon_1) \zeta_{1'}' U_0 e^{it} + \zeta_{1a}' (U_0 U_{0x} + W_0 U_{0z}) e^{2it} \\ &\quad + \zeta_{1d}' (U_0 W_{0x} - W_0 U_{0z}) e^{2it} \\ &\quad + \zeta_{1b}' \{ (\dot{U}_0 \dot{U}_{0x} + \ddot{U}_0 \ddot{U}_{0z}) + (\dot{W}_0 \dot{U}_{0x} + \ddot{W}_0 \ddot{U}_{0z}) \} \\ &\quad + \zeta_{1c}' \{ (\dot{U}_0 \ddot{U}_{0x} - \ddot{U}_0 \dot{U}_{0x}) + (\dot{U}_0 \ddot{W}_{0z} - \ddot{U}_0 \dot{W}_{0z}) \} \\ &\quad + \zeta_{1e}' \{ (\dot{U}_0 \ddot{W}_{0z} + \ddot{U}_0 \dot{W}_{0z}) - (\dot{W}_0 \dot{U}_{0x} + \ddot{W}_0 \ddot{U}_{0z}) \} \end{aligned} \dots (18)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{1a}' &= -\frac{i}{2} e^{-\sqrt{2}(1+i)\eta'} + \frac{i}{2} e^{-(1+i)\eta'} \\ &\quad + \frac{1-i}{2} \eta' e^{-(1+i)\eta'}, \quad \zeta_{1'}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \eta' e^{-(1+i)\eta'}, \\ \zeta_{1d}' &= -\frac{7i}{4} e^{-\sqrt{2}(1+i)\eta'} + \frac{3i}{2} e^{-(1+i)\eta'} \\ &\quad + \frac{1-i}{2} \eta' e^{-(1+i)\eta'} + \frac{i}{4} e^{-2(1+i)\eta'}, \\ \zeta_{1b}' &= -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} e^{-2\eta'} + e^{-\eta'} \left(\frac{1}{2} \cos \eta' + 2 \sin \eta' \right) \\ &\quad - \frac{\eta'}{2} e^{-\eta'} (\cos \eta' - \sin \eta'), \\ \zeta_{1c}' &= -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} e^{-2\eta'} + e^{-\eta'} \left(\cos \eta' - \frac{1}{2} \sin \eta' \right) \\ &\quad + \frac{\eta'}{2} e^{-\eta'} (\cos \eta' + \sin \eta'), \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{1e}' &= -\frac{1}{2} + e^{-\eta'} \left(\frac{1}{2} \cos \eta' + \sin \eta' \right) \\ &\quad - \frac{\eta'}{2} e^{-\eta'} (\cos \eta' - \sin \eta'), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

であり, $\eta' = y/\sqrt{2}$ である。また $\wedge$ および $\vee$ はそれぞれ real part および imaginary part を示す。式 (18) は式 (16) の右边が複素数の積を含む点を考慮したうえで, 第 1 近似解と同様, 同次解と特解の和として求めたものである。以上より u の第 2 近似解は, 式 (14) および式 (18) を用いて,

$$u_{2nd} = u_0 + \varepsilon_1 u_1 \dots (20)$$

で与えられるが, 第 2 近似解には, 基本周波数成分のほかに, 2 倍周波数成分および質量輸送速度が含まれることがわかる。なお, 実際の水粒子速度は式 (20) の real part で与えられる。ここで, ζ_0' , ζ_{1a}' および ζ_{1b}' は, Schlichting が求めたもの³⁾ と全く同じであるが, ここで取扱った境界層は 3 次元であること, 円柱の曲率を考慮したこと, および境界層外縁の水粒子速度は振動流としてではなく, 波動の水粒子速度として与えられること, によって, ζ_1' , ζ_{1d}' , ζ_{1e}' および ζ_{1c}' がさらに含まれる結果となっている。

(3) 計算例および考察

式 (18) に示した境界層内の水粒子速度の第 2 近似解 u_{2nd} の計算例を示すが, u_{2nd} は座標変数, θ , y/R , z/h , t/T のほかに, 次の 4 つのパラメーター kh , kR , $\varepsilon_1 = \pi H/L$, $\varepsilon_2 = \sqrt{\nu T/2\pi}/R$ を与えることにより, 値が決定される。

図-2 に ε_1 の増加に伴う速度分布の変化を示すが, ε_1 が増加するにつれ, 図中に破線で示した主流速度 U_R との差が大きくなり, 境界層外縁での速度の接続が滑らかでなくなることがわかる。この原因は, 第 2 近似解の誘導において, 外縁での境界条件よりも壁面での境界条件を優先させた点にあるが, この解が妥当なものであると考えれば, 実際の現象としては, 波高が増大するにつ

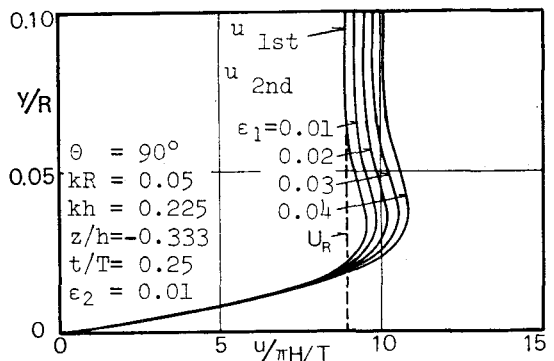
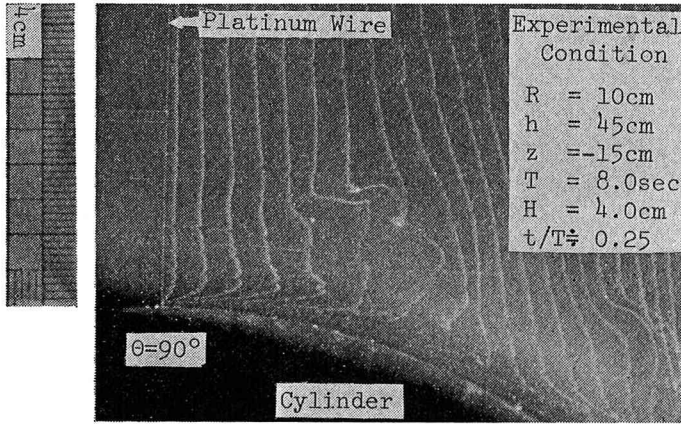


図-2 ε_1 による u_{2nd} の変化

れて、外縁付近に急激な速度勾配が生じ、後流渦が発生しない場合でも、これとは逆向きの小さな渦が発生することが予想される。これを裏付けるような現象が写真—



写真—1 境界層の水粒子の挙動

1 に見られる。図—3 は ε_2 のみを変えたものであり、これは ν を変えることになるが、 ε_2 が増加するにつれて境界層厚が厚くなるのがわかる。図—4 は、円柱半

径 R のみを変えた場合で、したがって kR と ε_2 を同時に変えることになるが、 $kR=0.01$ のように、波長に比べて円柱の径が小さい場合には、 $\theta=110^\circ$ ではすでにはく離が発生していることがわかる。なお、この場合の Keulegan-Carpenter 数 (以下、K.C. で表わす) は、

$$K.C. = \frac{U_{\max} \cdot T}{2R}$$

$$= \frac{\pi \varepsilon_1 \cosh k(h+z)}{kR \sinh kh} = 14.5$$

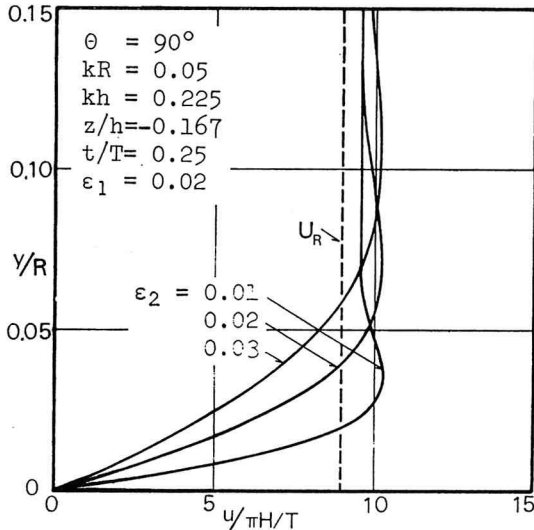
となる。後述するように、K.C. 数がさらに小さな場合でもはく離が生じるものであり、この計算例においてははく離が発生する

のは妥当なことと思われる。

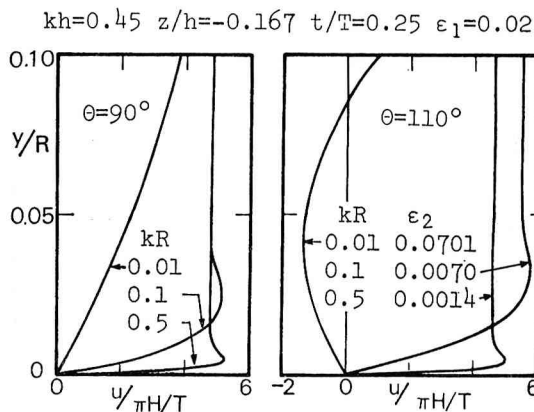
3. 実験結果および考察

層流境界層内の速度分布を調べるために、長さ 27 m、幅 50 cm、深さ 70 cm の水槽の側壁 (ガラス張り) に、半径 $R=10$ cm の透明の亚克力製半円柱を取り付け、水素気泡発生装置を用いて、円柱壁面から水平に張った白金線 (直径 0.05 mm) より水素気泡列を発生させ、水槽底面 (一部ガラス張り) から写真撮影した。実験条件は、 $\nu=1.204 \times 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{sec}$, $h=45$ cm, $z=-15$ cm, $\theta=90^\circ$ および 110° であり、波は、 $T=1 \text{ sec} \sim 10 \text{ sec}$, $H=1 \text{ cm} \sim 4 \text{ cm}$ のものを用いたが、そのうちの結果の一部を図—5 に示す。図中の丸印は写真から読み取った測定値であり、実線は u_{2nd} を、点線は u_{1st} を示すが、これらの実験条件下では、実験でも理論でも層流はく離は発生しない。図からわかるように、全般的に測定値は計算値よりも小さいが、その理由の一つとして、理論値には、境界層外縁の水粒子速度として、式 (9) および (10) に示す壁面上の値を用いたための誤差が混入していることがあげられる。すなわち、境界層の厚さを無視していることである。また回折波の水粒子速度に関して、最近著者らの行った実験⁹⁾ の範囲内では、測定値は式 (1) の値よりも若干小さくなる傾向があり、主流速度の与え方について今後さらに検討する必要があると思われる。

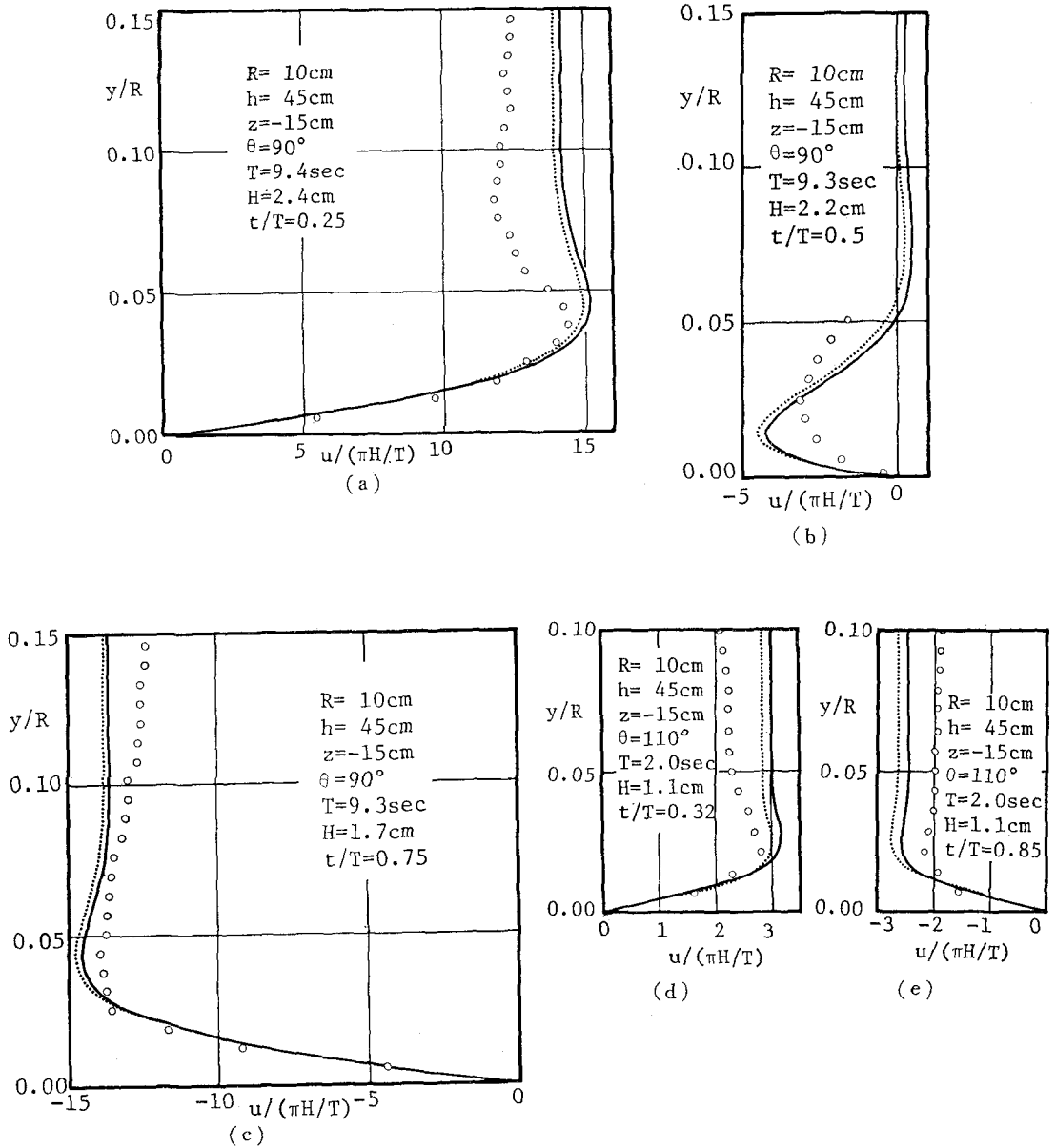
次に後流渦の発生について調べるために、 $R=1$ cm のしんちゅう製円柱を用い、円柱前面に白金線を水平に張って、波の峰が円柱の位置を通過した後、水素気泡列を撮影した。図—6 に実験条件 $T=3.0 \text{ sec}$, $H=3.0 \text{ cm}$, $z=-5 \text{ cm}$ で撮影した写真のトレースを示し、また図—7 に $t/T=0.25$ の u_{2nd} の計算結果を示すが、これらの図から、層流はく離の発生とそれに伴う後流渦の発生



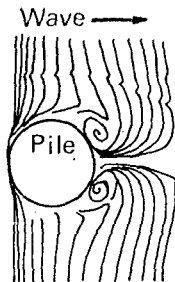
図—3 ε_2 による u_{2nd} の変化



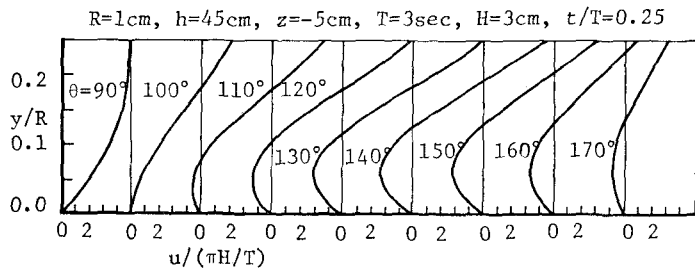
図—4 kR および ε_2 による u_{2nd} の変化



図—5 境界層の速度分布



図—6 後流渦の発生



図—7 波による円柱まわりの層流はく離

を知ることができる。なおはく離点は、計算によれば $t/T=0.25$ において $\theta=102^\circ$ であり、定常流の場合^{2),3)} とほぼ同じになることがわかる。また $K.C.$ 数は 10.7 であり、Keulegan-Carpenter の重複波での実験の場合とほぼ同様な値ではく離するといえる。

4. 結 語

本研究では、層流境界層方程式の理論解を誘導し、実験結果と比較して、速度分布およびはく離の発生について検討を加えたが、これらの結果を総合すれば、境界層厚、境界層内速度と主流速度との位相のずれ、境界層外縁付近の質量輸送速度の存在、はく離の発生などについては、第2近似解 u_{2nd} を用いてそれらの特性を説明することができると思われる。しかしながら、この理論解の精度を論ずるためには、回折波の水粒子速度も含めて、今後より広範囲の正確な実験データを得る必要があり、また波力問題との関連を考えれば、種々の条件に対するはく離の発生限界を知り、はく離が生じる場合の後流域の圧力分布を調べることも非常に重要であるといえよう。

最後に、本研究は文部省科学研究費による研究の一部であることを付して謝意を表するとともに、実験に協力して頂いた研究生 喜岡 渉君（当時学部学生）に厚く感謝する次第である。

参 考 文 献

- 1) MacCamy, R.C. and Fuchs, R.A.: Wave forces on piles: diffraction theory, Tech. Memo., No. 69, B.E.B., 1954.
- 2) 谷 一郎: 応用流体力学, 岩波講座, pp. 20~32, 1940.
- 3) Schlichting, H.: Boundary Layer Theory, MacGraw-Hill, 1968.
- 4) Keulegan, G.H. and Carpenter, L.H.: Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid, Jour. Res. Nat. Bur. Stand., Vol. 60, No. 5, pp. 423~440, 1958.
- 5) 岩垣雄一・石田 啓: 波による円柱まわりの層流境界層について, 第28回年次学術講演会講演概要集第2部, pp. 47~49, 1973.
- 6) 岩垣雄一・石田 啓・喜岡 渉: 回折波による円柱周辺の水粒子速度について, 関西支部年次学術講演会講演概要, pp. II-53-1~II-53-2, 1974.