

不規則な波の振幅の極大値の連なりについて

永 井 康 平*

1. 緒 言

海の波はどのような連なり方をしているのだろうか。海洋に浮んだプラットホームの水面上の高さを設計するときには、その上への越波量や繰返し波力を考慮する関係上、基本的にこの疑問が解かれる必要があると思われる。

これは一面からみた波の不規則性の捕え方である。かつては高い波がどの程度の確率で起こるのかという研究が主体であった。それを高い波がどの程度続いて起こるのかという点に注目してみたのが本稿である。このような波の連なり方の問題を扱う手法としては、

1) マルコフ連鎖過程の理論

2) ラン(連)の理論¹⁾

3) 正規過程の狭帯域理論²⁾, 自己相関関数の理論などの統計理論があげられる。実際にこれらの手法を用いて波の連なり方を解析した例はそう多くないと考えられる。海の波の問題にマルコフ過程とランの理論を適用した初期のものとして、Sawhney⁴⁾は引き続いた正負の振幅の極大値の統計的独立性を水圧波形記録に対して検討し、相続く正の極大値間の従属性はほとんどないことを見出した。また合田・永井⁵⁾は不規則波造波機による実験波形と現地風波の波形の相似性の検討にランの理論を導入し、波高のランの平均長とそれと自己相関関数の特性との関係を求めた。合田⁶⁾はさらに種々の形のスペクトルをもつ波の波高のランの長さを数値計算で求め、それを完全にランダムな波のその理論値と比較し、スペクトルの尖鋭度がよい指標となることを示した。これを受けて合田・永井・伊藤⁷⁾は現地風波の波高のランと比較し、理論値は風波のランの長さの下限値に近いことを検証した。一方 Ewing⁸⁾は、正規過程の狭帯域スペクトルの期待交差度数理論²⁾によりうねりの波高のランの平均長を求め、合田の計算と比較した。しかしながら、上に述べたプラットホーム状の海洋構造物を考えると、不規則波の特徴として波高ばかりでなく平均水位からの振幅の極大値の連なり方を知っておく必要があると考えられる。

本報告では、このような観点から、ランの理論を用いて各種のスペクトル幅をもつ不規則波の振幅の極大値の

ランの平均長を統計解析、数値計算、実測値との比較によって検討してみた。

2. 波の振幅の極大値のランの理論

(1) ランの概念

一つのラン(run, 連)とは、“前後に異なった事象が起こったときその中間に起こっている同種の事象のつながり”と定義され、その一ランの内の要素の数をそのランの長さという。このランに関する理論は、19世紀の終りにルーレットの問題から始まり、1940年代初めには集大成されたと考えられる。主に試料の不規則性あるいは一様性の試験、さらには企業での品質管理、気象学での乾期、雨期の長さの解析等多くの分野で用いられてきた。

さて、以下においてはある統計量の実現値は小文字で表わすこととし、2つの要素 a_1 または a_2 をとる独立な確率変数 X_j ($j=1, 2, \dots, n$) を考える。このとき a_1, a_2 の起きる確率 $P(X_j=a_i)$, ($i=1, 2$) は、 $j=1, 2, \dots, n$ において

$$P(X_j=a_1)=p, P(X_j=a_2)=1-p=q \cdots \cdots (1)$$

である。いま X_j の一連の実現値 $x_1, x_2, \dots, x_n$ を考え

$$x_{j-1} \neq x_j = x_{j+1} = \cdots = x_{j+l} \neq x_{j+l+1}$$

であったとすると、 $x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+l}$ (ここで $j=1, 2, \dots, n, l=0, 1, \dots, n-j$) は1つのランであり、その長さは $l+1$ である。さらに、要素 a_i (ここで $i=1$ または 2) でできている長さ j のランの数を K_{ij} , a_i でできているランの数を K_i , ランの総数を K , a_i の数を N_i で表わすと次の関係が成立つ。

$$\left. \begin{aligned} N_1 + N_2 &= n, \sum_j j K_{ij} = N_i \\ K_1 + K_2 &= K, \sum_j K_{ij} = K_i \end{aligned} \right\} (i=1, 2) \cdots \cdots (2)$$

たとえば、 a_1 を +, a_2 を - とすると、

$$+, +, -, -, -, +, -, -, +.$$

の連なり方においては、長さ2の+のラン1つ、長さ3の-のラン1つ、長さ1の+のラン2つ、長さ2の-のラン1つで成立っている。すなわち、 $n_+=4, n_-=5, n=9; k_{+2}=1, k_{-3}=1, k_{+1}=2, k_{-2}=1; k_+=3, k_-=2, k=5$ である。

さて、上のような考え方に従えば、ランの数 K_1, K_2 , K_3 の期待値 E と分散 D^2 は、試料数 n だけに制約され、

Mood³⁾によれば次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} E(K_1) &= np(1-p) + p^2 \\ D^2(K_1) &= np(1-4p+6p^2-3p^3) \\ &\quad + p^2(3-8p+5p^2) \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} E(K_2) &= nq(1-q) + q^2 \\ D^2(K_2) &= nq(1-4q+6q^2-3q^3) \\ &\quad + q^2(3-8q+5q^2) \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

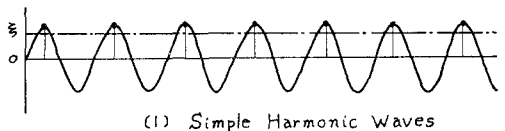
$$\left. \begin{aligned} E(K) &= p^2 + q^2 + 2npq \\ D^2(K) &= 4npq(1-3pq) \\ &\quad - 2pq(3-10pq) \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

特に $p=q=1/2$ のときには、次のように簡単になる。

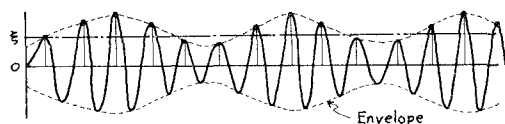
$$\left. \begin{aligned} E(K) &= (n+1)/2 \\ D^2(K) &= (n-1)/4 \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

(2) 波の振幅の極大値のラン

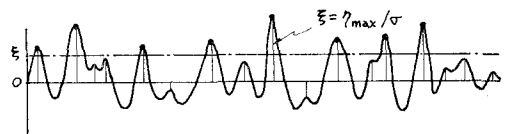
波の振幅の極大値 $\eta_{\max}$ は、図-1 に示すように、一連の波の上に凸な波形のピーク値までの平均水面からの高さとして定義する。図中(1)は正弦波で常に+側の一定の値をとる。一方(2)のビートの場合は、波のスペクトル $S(f)$, f は周波数、の式(7)で定義される幅 ϵ が狭いとき ($\epsilon \neq 0$) に発生し、前後の $\eta_{\max}$ は当然独立ではない。したがって(1)で述べたランの理論は適用できなくなり、上に紹介した Ewing⁸⁾ の使った手法が適している。



(1) Simple Harmonic Waves



(2) Beats



(3) Irregular Waves

図-1 波の振幅の極大値 $\eta_{\max}$ のラン

ここでスペクトル $S(f)$ の幅 ϵ は、

$$\epsilon^2 = 1 - m_2^2 / m_0 m_4 \quad (0 \leq \epsilon \leq 1) \dots (7)$$

と定義される。ただし m_n は

$$m_n = \int_0^\infty f^n S(f) df \dots (8)$$

であり、 $S(f)$ の n 次のモーメントである。 $\eta_{\max}$ はこの ϵ の値によってその確率密度 $p(\xi)$ の分布が異なり、Cartwright・Longuet-Higgins⁹⁾によれば、図-2のような分布をしている。ここで $\xi = \eta_{\max} / \sigma$, σ は振幅 η の

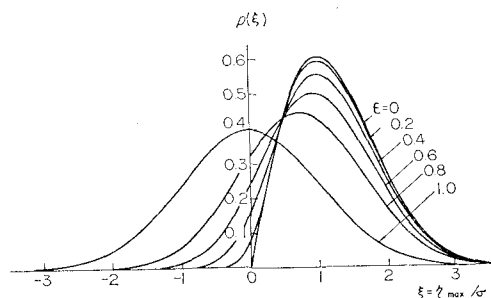


図-2 ϵ による $\eta_{\max}$ の確率密度分布の差 (Cartwright・Longuet-Higgins⁹⁾)

r.m.s. 値である。 ϵ の値が1に近いほどスペクトルの周波数分布幅および $\eta_{\max}$ の分布が広い。この ξ の分布をある基準の ξ の値から無限大まで積分した超過確率は⁹⁾,

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{\xi}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx + \sqrt{1-\epsilon^2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\frac{\xi\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right] \dots (9)$$

であり、 $\epsilon=0,1$ の極限においては、

$$p(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi \leq 0) \\ \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) & (\xi > 0) \end{cases}, \quad (\epsilon=0) \quad (10)$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx, \quad (\epsilon=1) \right]$$

となる。

さて、ここで問題とするのは、図-1の(3)に示したようなスペクトル幅 ϵ が $0 < \epsilon \leq 1$ の一般的な不規則な海の波である。それに(1)で述べたランの理論を適用し、 $\eta_{\max}$ の総数 n におけるある水位 ξ 以上のランの数 k_+ 、それ以下のランの数 k_- 、およびそれらの総数 k からそれぞれのランの平均長 $\bar{j}_+$, $\bar{j}_-$, $\bar{j}$ を求めることとした。ここで改めて注意するべき点は、 ξ_j と ξ_{j+1} とは独立したものであるという点で、これは ϵ が比較的大きな値の場合、Sawhney⁴⁾の結果から首肯できる仮定と予想される。

$\eta_{\max}$ の出現が完全にランダムで、波数が無限であれば、すでに合田⁶⁾によって、ランの長さの確率 $P(j_+)$, $P(j_-)$ と平均長 $\bar{j}_+$, $\bar{j}_-$ は次式で与えられている。

$$\left. \begin{aligned} P(j_+) &= p^{j_+} q, \quad \bar{j}_+ = 1/q \\ P(j_-) &= p q^{j_-}, \quad \bar{j}_- = 1/p \end{aligned} \right\}, \quad (q=1-p) \dots (11)$$

いま、 $\eta_{\max}$ の総数は n であり、そのある ξ の上下におけるランの平均長 $\bar{j}_+$, $\bar{j}_-$ は、 ξ の上下に現われる $\eta_{\max}$ の期待個数がそれぞれ pn , qn であるから、式(3), (4)より

$$\bar{j}_+ = \frac{pn}{E(k_+)} = \frac{n}{nq+p}, \quad (q=p-1) \dots\dots\dots(12)$$

$$\bar{j}_- = \frac{qn}{E(k_-)} = \frac{n}{np+q}, \quad (q=p-1) \dots\dots\dots(13)$$

と求まる。同様に式 (5) よりすべてのランの平均長 $\bar{j}$ は

$$\bar{j} = \frac{n}{E(k)} = \frac{n}{p^2+q^2+2npq}, \quad (q=p-1) \dots\dots\dots(14)$$

となる。 n が十分大きければ $\bar{j}_+=1/q$, $\bar{j}_-=1/p$, $\bar{j}=1/(2pq)$ で合田⁹⁾の結果式 (11) に一致する。さらに $p=q=1/2$ の場合, $\eta_{\max}$ のそれぞれが独立であるという仮定のもとに,

$$\bar{j}_+ = \bar{j}_- = \bar{j} = 2n/(n+1) \dots\dots\dots(15)$$

となり, n が少ない時は 2 より小さく, n が多くなるに従って 2 に漸近する。

こうして, n 個の振幅の極大値 $\eta_{\max}$ のある基準水位 $\xi = \eta_{\max}/\sigma$ 上下のランの平均長は, $\eta_{\max}$ がそれぞれ独立であれば, スペクトル $S(f)$ の幅 ϵ を式 (7) で計算し, 次に ξ と ϵ を式 (9) に代入して ξ の超過確率 p を求め, それを式 (12), (13), (14) に代入することによって求められる。

なお, 合田⁹⁾は以上のようなランの定義のほかに, “ある事象が起こってからいくつかが起こらず再び起こるまでのラン” をトータルランと名づけて解析しているが, これについては本稿では扱わなかった。

3. 振幅の極大値のランの計算法の検討

ここでは 2. で述べた不規則な波の振幅の極大値のランの理論の適応性を検討するため, いくつかの基準水位 ξ とスペクトル幅 ϵ に対する理論値, シミュレーション波形からの計算値, および現地の実測風波の解析値とを比較してみる。

表一1 $\eta_{\max}$ のランの平均長, $\bar{j}_+$, の理論値

ϵ	n	$\xi = 0$		$\xi = 1.0$		$\xi = 2.0$	
		∞	200	∞	200	∞	200
0		∞	200	2.54	2.52	1.16	1.16
0.5		14.9	14.0	2.11	2.10	1.13	1.13
1.0		2	1.99	1.19	1.19	1.02	1.02

理論値は $\epsilon=0, 0.1, 0.2, \dots, 1.0$, $\xi=0, 0.5, 1.0, \dots, 3.0$ に対して, 式 (12) ~ (14) より $\eta_{\max}$ のランの平均長を計算した。 $\eta_{\max}$ の総数を ∞ および 200 とした場合の $\bar{j}_+$ の値の一部を表一1 に示した。これより, 式 (11), (15) などからいってスペクトル幅 ϵ が 1 に近づくほど理論値の精度がよく, 基準水位 ξ が高いほど n の効果が落ちることが想像できる。特に ϵ が 0 に近く ξ が高くなると理論値は不自然な値になっているのは, 本理論の独立性の仮定の限界に由来しているものと判断される。

一方, 種々スペクトル幅をもつシミュレーション波形を, 合田⁹⁾のプログラム (Pierson・Moskowitz 型スペクトル) によって作成した。 ξ の条件は上のとおりとし, ϵ は 14 種について, 波数 $n=200$ でもってそれぞれ 10 回シミュレートして得られた波形を解析し, その 10 回の平均の $\eta_{\max}$ のランの平均長を求めた。

最後に基準水位 $\xi=1.0, 2.0$ の 2 種類については, 名古屋港における表面風波の観測結果⁷⁾ から, 実際の波のランを解析した。

以上 3 種類の $\eta_{\max}$ のランの平均長の解析結果のうち, $\bar{j}_+$ について比較したものが, 図一3 である。この図より 2. で求めた理論式 (12) の正当性について, 以下のことがいえる。

1) 基準水位 $\xi=0$ (平均水面) のとき, 理論値は数値シミュレーション結果とかなりよく合っている。特にスペクトル幅 ϵ が 0.3 より大きいときと 0.1 より小さいときにより結果が得られている。前者は $\eta_{\max}$ の独立性 (ランダム性) の仮定がスペクトル幅が広いほどよく適合すること, 後者は波数 n の制限がよくきいていることによるものと解釈できる。

2) $\xi \geq 0.5$ の場合には, $\epsilon > 0.3$ の範囲では理論値とシミュレーション結果がよく合っているが, それ以下では上の独立性の仮定がくずれ, 両者の差が ϵ が小さくなるほど大きくなっている。

3) ϵ が大きくなるほど理論式は正確さを増すと考えられるが, $\epsilon=0.85$ のシミュレーション結果はこの想定にやや逆った傾向を示している。これは幅の広いスペクトルをもつ波のシミュレーション法 (本計算ではスペクトルの周波数分割数を 50 に統一して計算している) に帰因するものと考えられる。

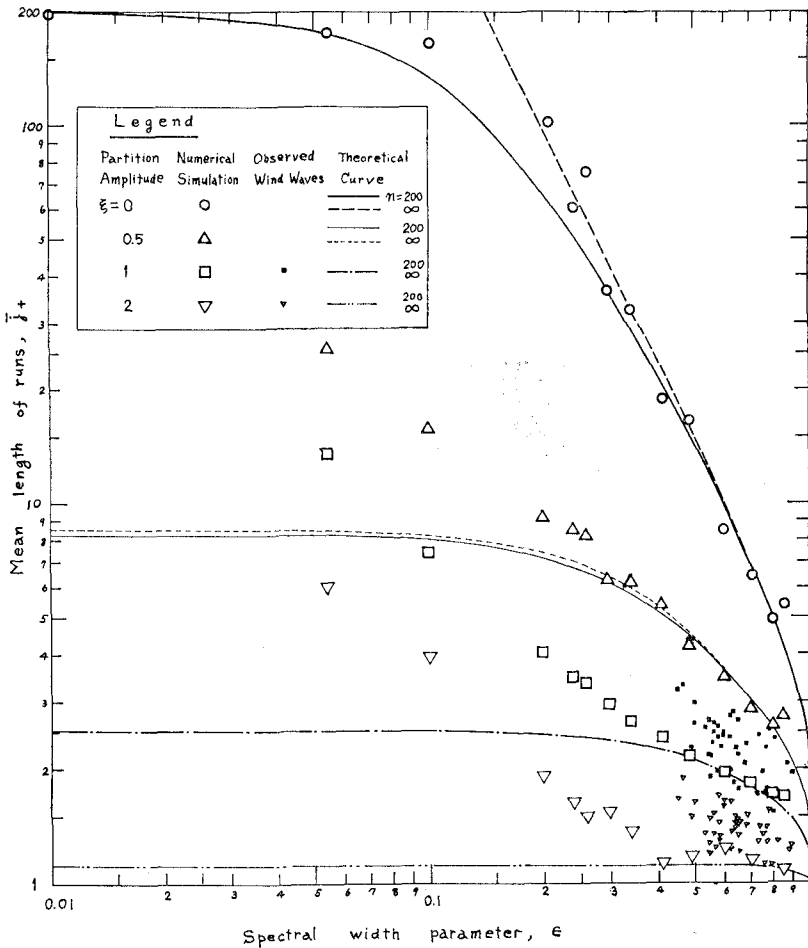
4) 理論値と現地表面風波の実測値との対応においては, 理論値は実測値のほぼ下限値を与えているのが注目される。逆に理論値は危険側の値を示しているといえよう。

5) $\eta_{\max}$ のある基準水位以上のランの理論式の中に波数 n が入っている効果は, スペクトル幅 ϵ が狭いほど, また基準水位が平均水面に近いほど, 顕著である。

6) 完全に不規則な波 ($\epsilon=1$) の場合, 基準水位 ξ 上の $\eta_{\max}$ のランの平均長は, $\xi=0$ で n が大きいとき 2, ξ および n が大きいとき 1 に漸近する。後者は ξ が非常に大きい場合に奇異に感じるが, ランの平均長は常に 1 以上である。

4. 結 語

本稿においては, ある基準水位の上下におこる海の波の振幅の極大値に注目し, その連なり (ラン) の平均長を求める理論式を, それらの極大値は互いに独立 (ランダム) な事象であるという仮定のもとに導いた (式 (12) ~

図-3 基準水位 ξ を越える $\eta_{\max}$ のランの平均長

(15)). この式には $\eta_{\max}$ の全数 (近似的には波数に等しい) が変数として入っており, 有限のデータに対しても適用可能である. この理論値を数値シミュレーションと名古屋港における表面風波の解析結果と比較したところ, 上に箇条書きしたような特徴が得られた. すなわち, 波のスペクトル幅 ϵ (式(7)) が 0.3 より大きければ, 理論値はシミュレーション結果とよく合う. しかし, 上記の風波の実測値と比べると理論値は実測値の下限を与えているものと判断される.

いずれにせよ, 将来不規則波に対する構造物の設計法が進歩し, 本稿で述べたランの平均長の考えが越波量の計算法などと結びつけられれば, 本理論は次のようにして実際問題に応用しようと考えられる.

1) 前提としてスペクトル幅 ϵ が $0.3 < \epsilon \leq 1.0$ の風波のスペクトル $S(f)$ を想定し, 分散 $\sigma^2 = \int_0^\infty S(f) \cdot df$ を計算する. あるいは, 有義波高 $H_{1/3}$ を仮定し, 標準偏差 σ を近似的に $\sigma = H_{1/3}/4.0$ で求める.

2) 基準水位となる平均水面からの振幅 $\eta_{\max}$ を決め

それを構造物の設計条件と仮定して, $\xi = \eta_{\max}/\sigma$ を計算する.

3) 式(9)と式(12)あるいは図-3より, その基準水位以上の波の極大振幅のランの平均長を求める. それが設計上妥当かどうか検討し, 悪ければ 2) にもどってやり直す.

終りに本報告は 1970 年に著者が運輸省港湾技術研究所において行なった研究を主体としてまとめたものであり, 同研究所波浪研究室の合田良実室長から研究への助言と, さらにはシミュレーションプログラムの貸与に預った. ここに記して深く感謝致します. なおシミュレーションほか大分の計算は, 同所計算室の電子計算機 TOSBAC-3400 を用いたことを付記する.

参考文献

- 1) Fisz, M: "Probability Theory and Mathematical Statistics", John Wiley & Sons, Inc., 1963, p. 677.

- 2) Rice, S.O.: "The Mathematical Analysis of Random Noise", Selected papers on noise and stochastic process; edited by N. Wax, Dover Pub., 1945, pp.133~294.
 - 3) Mood, A.M.: "The Distribution Theory of Runs", Annals of Mathematical Statistics, Vol.11, 1940, pp.367~392.
 - 4) Sawhney, M.D.: "A Study of Ocean Wave Amplitudes in Terms of the Theory of Runs and a Markov Chain Process", Tech. Rep. of New York Univ., 1962, p.29.
 - 5) 合田良実・永井康平: "造波板の変速運動による発生不規則波のスペクトルについて", 港湾技研報告, 第8巻第3号, 1969, pp.47~75.
 - 6) Goda, Y.: "Numerical Experiments on Wave Statistics with Spectral Simulation", Rep. of Port and Harbour Res. Inst., Vol. 9, No.3, 1970, pp.3~57.
 - 7) 合田良実・永井康平・伊藤正彦: "名古屋港における波浪観測, 第3報——現地波浪の回折現象ならびに統計的性質について——" 港湾技研資料, No.120, 1971, p.24.
 - 8) Ewing, J.A.: "The Mean Length of Runs of High Waves", to be published in J. Geophys. Res., 1973.
 - 9) Cartwright, D.E. and Longuet-Higgins, M.S.: "The Statistical Distribution of the Maxima of a Random Function", Proc. Royal Soc., A., Vol.237, 1963, pp.212~232.
-