

海岸不規則波の Short-time Spectra とその応用について

浜 中 建 一 郎*・沢 橋 剛 志**

1. ま え が き

海岸不規則波について、Short-time spectra を用いて解析を行なった。また、修正ペリオドグラムとの関係について若干の検討を行ない、Short-time spectra によって非定常現象のスペクトル解析を行なうことの一つの可能性を示した。さらに、Short-time spectra を用いて、海岸不規則波の Cepstra の一般的な形を示すとともに、スペクトル上に現われる ripple の特性を示した。また、周波数成分間の相関係数を求め、エネルギーの授受の様子を示した。

2. Short-time spectra

通常、不規則変動のパワースペクトルを推定する場合、自己相関関数のフーリエ変換として求められる。この時、原変動は、エルゴード性と定常性の2つの条件を満たしていることが必要となる。しかし、われわれが現実に観測し得るもろもろの自然現象は原則的には唯一度限りのものと考えられ、エルゴード性を検定することはできない。さらに、定常性に関しても、厳密な意味で自然現象は非定常であると考えの方が妥当であろうし、現象によっては非定常性そのものを解析する場合や、非常に短いデータしか得られない場合もある。このように考えると、スペクトル理論が、確率理論に基づいていかに厳密に展開されていたとしても、実際の適用との間には、大きなへだたりを感じる。

そこで、現象が非定常であることを認めたくえて、より簡単にスペクトルを定義するものとして、Fano¹⁾ や Schroeder & Atal²⁾ らの提唱による Short-time spectra をあらためて考えてみたい。

Schroeder & Atal は Short-time spectra として、3つの定義式を述べているが、その中で最も一般的と思われるのは、

$$G(\omega, t) = \left| \int_{-\infty}^t r(t-x) f(x) e^{-i\omega x} dx \right|^2 \dots\dots\dots (1)$$

$r(\tau)$ は実現可能な任意の重み関数である。

これを、デジタル計算しやすいように次のように修正する。すなわち、 $G(\omega, t)$ は $f(x)$ の周波数成分の位相

には無関係だから

$$G(\omega, t) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) f(t-\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right|^2 \dots\dots\dots (2)$$

さらに、 $r(\tau)=0$, $|\tau|>T_m$ とすると

$$G(\omega, t) = \left| \int_{-T_m}^{T_m} r(\tau) f(t-\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right|^2 \dots\dots\dots (3)$$

さらに、スペクトル密度として、原変動の時間平均エネルギーに対する寄与を表わすようにするため、

$$G(\omega, t) = \frac{C}{2T_m} \left| \int_{-T_m}^{T_m} r(\tau) f(t-\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right|^2$$

ここで

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2T_m} \int_{-T_m}^{T_m} [r(\tau)]^2 d\tau \dots\dots\dots (4)$$

とすると、原理的には、得られたデータに、データウィンドウをかけたもののフーリエ変換ということになる。結局このスペクトルの特性はデータウィンドウ $r(\tau)$ の形によって決まる。どのようなウィンドウが最適であるかは次の機会に検討するとして、今回は Hamming と Hanning のウィンドウについて述べる。図-1 は周知のとりのスペクトルウィンドウである。次に変動を、

$$f(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) \dots\dots\dots (5)$$

とし、ウィンドウを

$$r(\tau) = \alpha + \beta \cos \pi t / T_m, \quad |t| \leq T_m \\ = 0, \quad |t| > T_m \dots\dots\dots (6)$$

$\alpha=0.54$, $\beta=0.46$ のとき Hamming

$\alpha=0.50$, $\beta=0.50$ のとき Hanning

として、ウィンドウをかけた変動のエネルギーを求めると、

$$E = \frac{1}{2T_m} \int_{-T_m}^{T_m} \{r(t)f(t)\}^2 dt \\ = \frac{A_1^2}{2} \left\{ \alpha^2 + \frac{\beta^2}{2} + \cos 2\phi_1 \sin 4\pi f_1 T_m \right. \\ \times \left[\frac{\alpha^2}{4\pi f_1 T_m} - \alpha\beta \left(\frac{1}{4\pi f_1 T_m + \pi} - \frac{1}{4\pi f_1 T_m - \pi} \right) \right. \\ \left. + \frac{\beta^2}{4} \left(\frac{1}{4\pi f_1 T_m + 2\pi} + \frac{1}{4\pi f_1 T_m - 2\pi} \right) \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2\pi f_1 T_m} \right] \right\} \dots\dots\dots (7)$$

となる。図-2 は、Hamming を例にとり、 $A_1=1$ とし ϕ_1 の最も条件の悪い場合のもので、ウィンドウのかからない場合との比較のため

* 正会員 工修 北海道大学助手 工学部土木工学科

** 正会員 電電公社

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2T_m} \int_{-T_m}^{T_m} r(t)^2 dt = \alpha^2 + \frac{\beta^2}{2}$$

で割ってある。これによると, no-window に比し, 非常に早く一定値に収束していることがわかる。しかし, ウィンドウの幅 $2T_m$ に2波以下しか入らないような低周波成分があるときは非常に大きなエネルギーとして見積

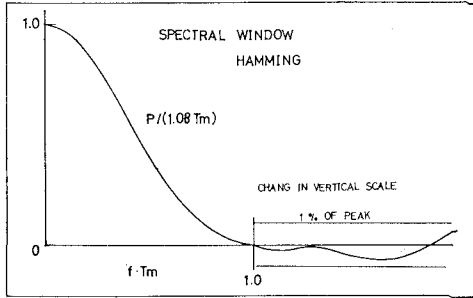


図-1

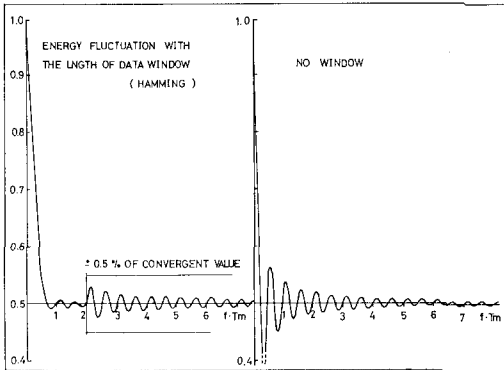


図-2

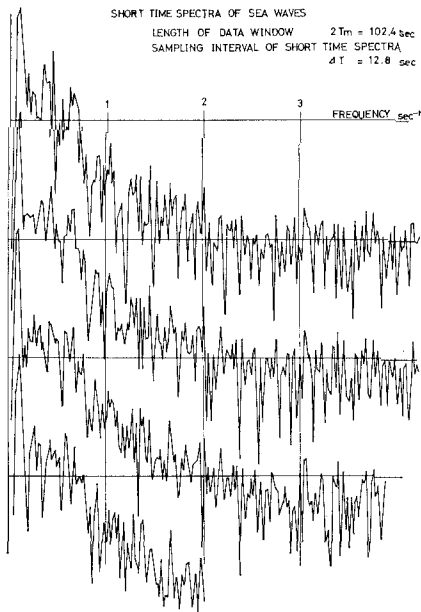


図-3

られる恐れがあり, そのリーケージの影響を考えると, あらかじめ除去しておくことが必要であろう。さらに, デジタル計算に際して, データの読みとり間隔 Δt は, これまでと同様 Nyquist frequency との関係で決まり, データウィンドウの長さ $2T_m$ は解析しようとする周波数幅によって決まる。

図-3 は, データウィンドウとして Hamming を用いた Short-time spectra の計算例である。記録は苫小牧海岸で観測した水位変動である。横軸は周波数, 縦軸はエネルギー密度と時間を表わし, 1 個の Short-time spectrum は $\Delta t=0.1$ 秒ごとに読みとった長さ $2T_m=104.2$ 秒のデータから計算され, おおのこのスペクトルは $\Delta T=12.8$ 秒ごとに計算されている。これによると, おおのこのスペクトルはかなり複雑な形をしているが, 時間とともに徐々に変化しているのがわかる。

3. 修正ペリオドグラムとの関係

修正ペリオドグラムは, Bingham ら⁸⁾や Welch⁴⁾ が FFT を使ってパワースペクトルの計算をすることを発表してから最近よく使われるようになった。また, 桑島・永井⁵⁾も詳しい解説を発表している。そこで述べられている定義式は, 原理的には式(4)で表わされる Short-time spectra と全く同じである。しかし, Short-time spectra が, 非定常現象の解析を試みようとしたのに対して, 修正ペリオドグラムは, あくまでも相関関数より求めたパワースペクトルを真のスペクトルとして, 直接フーリエ変換から, FFT を利用していかに経済的にスペクトルを求めるかということから出発している。そのため, 真のパワースペクトルを推定する方法として, 得られた修正ペリオドグラムをさらにスペクトルウィンドウで平滑化する方法や, 修正ペリオドグラムを時間的に平均する方法が提案されている。

図-4 は比較のため Short-time spectra を両対数で表

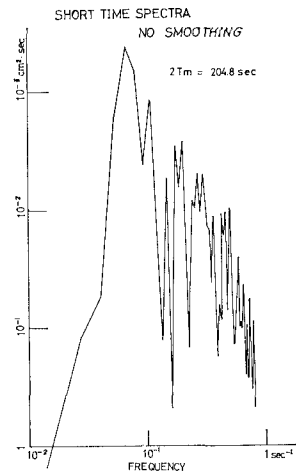


図-4

わたしたちの一つで、図-5 はそれを Hamming のスペクトルウィンドウで平滑化したものである。これによると、平滑化によって相関関数から求めたスペクトルに近づいている様子がわかるが、さらに的確な計算例が桑島らによって示されている。また、図-6 は Short-time spectra を時間平均したものである。これによっても、時間平均することによって相関関数から求めたスペクトルに非常によく一致することがわかる。しかし、前述したとおり、現象を非定常と考え、非定常性を解析しようとするなら一致したこと自体はさほど意味はなくなるだろう。もし、観測された時間内で、現象の周波数特性が変化する場合、相関関数より求めたスペクトルに近づくということは、真のスペクトルに近づくということになり、単に時間的に平均化されただけということになる。また、このような問題は多かれ少なかれあらゆる現象についていえることであり、海岸波浪のスペクトルについてもその例外ではない。しかし、その問題は今後の課題として、今回は、式(4)で求める Short-time spectra も一つのスペクトルと考え、これを応用した2つの解析例

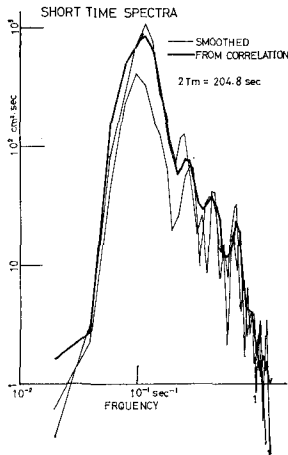


図-5

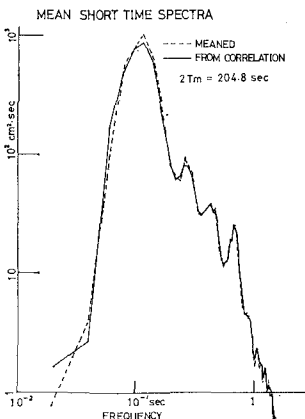


図-6

を示す。

4. Short-time Cepstrum

セプストラムは、対数パワースペクトルのパワースペクトルとして定義され (Borgert, Healy and Tukey⁶⁾), さらに Noll⁷⁾ によって、音声学における音源のピッチ detector として確立されたものである。すなわち、Noll によると、

$$C(\tau) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \log |F(\omega)|^2 e^{-i\omega\tau} d\omega \right|^2 \dots\dots\dots (8)$$

$C(\tau)$: Cepstrum, τ : Quefrency

Short-time spectrum と同様、式(4)を用いて Short-time Cepstrum を定義すると、

$$C(\tau, t) = \left| \int_0^{\infty} S(\omega) \log G(\omega, t) \cos \omega\tau d\omega \right|^2 \dots (9)$$

$S(\omega)$: セプストラムにおけるデータウィンドウ

音声学においては、音声のスペクトルは、音源のスペクトルと音道のスペクトルとの積で表わされ、対数をとることによって、おのおのの和に分解できる。そこに対数をとる積極的意味があるが、今回は海面の水位変動だけを考えているので、そのような system は考えられない。したがって、セプストラムから求めようとするものは、次のようなことである。すなわち、式(4)で求めた海岸波浪の Short-time spectra には、図-3 に示されるごとく、非常に多くの ripple が存在する。これも一つのスペクトルの姿であるという立場から、この ripple にある共通のパターンが存在しないだろうか、それがセプストラムによって表現できないだろうかということである。図-7 はその計算例である。これによると、ある程度は一定のパターンを示している。また、ここには載せていないが、図-7 のほかに、3種類のスペクトル構造が異

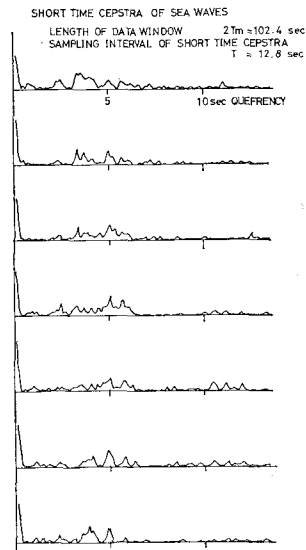


図-7

なった海岸波浪についても同様のセブストラムの計算を行なったが、いずれも図-7 とほぼ同様なセブストラム構造を持つことがわかった。さらに、これらによると、ケフレンシー 3~5 秒 ($=1/\text{Frequency}$) に比較的大きなピークが存在しており、周波数領域においては、0.3~0.2 cycle/sec ごとに存在する ripple が卓越していることを示している。

5. 周波数成分間の相関係数

Short-time spectra を使った非定常解析の一つとして、周波数成分間の相関係数を求めてみた。すなわち、

$$G_{\omega,k} = G(\omega, t_k), \quad \bar{G}_{\omega} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K G_{\omega,k}$$

とすると、相関係数は

$$p(\omega_1, \omega_2) = \frac{\sum_{k=1}^K (G_{\omega_1,k} - \bar{G}_{\omega_1})(G_{\omega_2,k} - \bar{G}_{\omega_2})}{\sqrt{\sum_{k=1}^K (G_{\omega_1,k} - \bar{G}_{\omega_1})^2} \sqrt{\sum_{k=1}^K (G_{\omega_2,k} - \bar{G}_{\omega_2})^2}} \quad (10)$$

実際の計算では $G(\omega, t)$ は、ある時間間隔 ΔT ごとに計算されている。すなわち、データウィンドウの長さ $2T_m$ より短いスペクトルの時間的変動は、原理的に求められないし、すでに述べたように、あらかじめ低周波成分は除いてあるので、 $2T_m$ より長い、スペクトルの時間的変動を求めるために、サンプリング定理により、 $\Delta T = 2T_m/2 = T_m$ ごとに、スペクトルを計算すれば良いことになる。図-8 は 図-4 の計算に用いた同じ記録から計算された、周波数成分間の相関係数である。用いた記録は、約 20 分、 $2T_m = 51.2$ 秒、 $\Delta T = 25.6$ 秒である。

これによると、値はかなりばらついてはいるが、高周波成分同士では 1 に近い値を持ち、いずれかが、低周波

に近づくに従って減少し、負の値を持つに至る。もし、周波数成分波間にエネルギーの授受が行なわれているとすると、高周波同士エネルギーは急速に移行し、低周波成分になるほど遅くなることを示している。

6. あとがき

以上述べてきたことを結論としてまとめると、次のようになる。

(1) Short-time spectra を用いることによって、非定常な現象のスペクトル解析に対する可能性をある程度示せたと思うが、まだ十分満足できるものではない。特に最近、他の分野において、非定常性の非常に強い現象や、十分に長いデータをとることが、物理的に不可能であるような現象についても、スペクトルを調べる必要があることがよくあり、より一層の理論的深化が必要と思われる。また、Short-time spectra の計算にあたって、データウィンドウの最適な形についても、さらに詳細な検討が必要であろう。

(2) 海岸波浪のスペクトル上に表われる複雑な ripple の特性を、セブストラムによって表わすことができた。今後、波に伴うほかの現象との関連においてセブストラムをとらえることによって、セブストラム解析の有効性をさらに論ずることができると思われる。

(3) 周波数成分間の相関係数を求めることにより、エネルギーの移行の様子をある程度示せたと思われるが、さらに非定常性の強い条件での観測（たとえば波の発達期や減衰期）が必要と思われた。

なお、この研究中、フーリエ変換の計算はすべて FFT 法によっている。

参 考 文 献

- 1) Fano, R. M.: J. Acoust. Soc. Am. 22, 546, 1950.
- 2) Schroeder, M. R. and B. S. Atal: J. Acoust. Soc. Am. 34, 1962.
- 3) Bingham, C., M. D. Godfrey and J. W. Tukey: Trans. of I.E.E.E. (Audio, Elec.) Vol. AU-15, No. 2, 1967, 56~66.
- 4) Welch, P. D.: Trans. of I.E.E.E. (Audio, Elec.) Vol. AU-15, No. 2, 1967, 70~73.
- 5) 桑島進・永井康平: 港湾技研資料, No. 155, 1973.
- 6) Borgert, B. P., M. J. R. Healy and J. W. Tukey: in Proceedings of the Symposium on Time Series Analysis, edited by M. Rosenblatt, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.
- 7) Noll, A. M.: J. Acoust. Soc. Am., 22, No. 2, 1964.

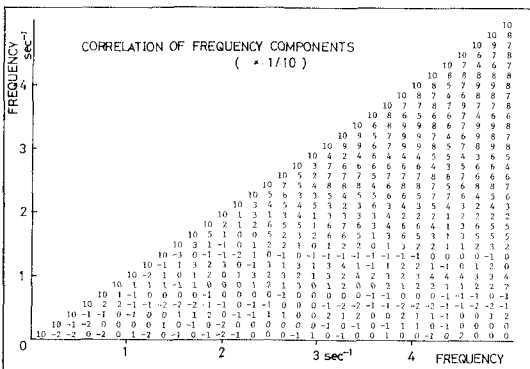


図-8