

風波の方向スペクトルと分散方程式

力 石 国 男*・光 易 恒**

1. 序

風波の方向スペクトル構造の解明は実用的にも理論的にも重要な意義を有し、これまでに多くの研究がなされてきた。それらの測定原理の多くは相関関数やクロス・スペクトルを媒介としていたが、これは相関関数による一次元スペクトル解析の手法がそのまま二次元スペクトルの解析にも拡張・応用されたためと考えられる。最近著者らは、一次元スペクトルの計算ではスペクトル・ウィンドウの面から、FFTを用いる解析法が従来の相関関数による解析法より優れていることを明らかにし¹⁾、さらに二次元スペクトルの解析においても、相関関数によらない新しい解析法が有力であることを、数値実験の結果をもとにして論じた²⁾。

この論文は、さまざまな方向スペクトルの測定原理を概括した上で、著者らにより開発された新しい方向スペクトル測定法の長所および適用限界を、波の分散関係式との関連において議論したものである。さらに実験水槽での実際の風波の測定結果から、発達初期の風波の方向スペクトル構造を明らかにすることを試みた。

2. 方向スペクトルに関する各種の測定原理

これまでに知られている各種の方向スペクトルの測定原理は、観測する波の場をどのように記述するかによって特徴づけられる。一般に表面波形は、たとえば $\eta(x', y', t')$ で表わされるごとく、三次元的なものであるが、このうちわれわれが観測できるデータは、時間および空間ともに限られている。説明の簡単化のために観測の測点および時間が有限で離散的であるとし、さらにこれらが $x' = x\Delta x$, $y' = y\Delta y$, $t' = t\Delta t$ で表わされるものとする (Δx , Δy , Δt は空間および時間の単位測定間隔, x, y, t は $-N/2 \leq x, y, t \leq N/2 - 1$ の整数値)。これらの便宜的な仮定は、波の場の記述の一般性を失うものではない。

第1の方向スペクトルの測定原理は次のような波の表現のしかたに対応している。

$$\eta(x, y, t) = \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} A_{lmn} \cos \frac{2\pi}{N} \times (lx + my + nt + \varepsilon_{lmn}). \quad \dots\dots(1)$$

これは $N \times N = N^2$ の測点で各 N 個のデータを測定

するやり方である。式(1)は三次元表示であるので、対応する相関関数は、三次元的に

$$\begin{aligned} \rho(X, Y, \tau) &= \frac{1}{N^3} \sum_{x=-N/2}^{N/2-1} \sum_{y=-N/2}^{N/2-1} \sum_{t=-N/2}^{N/2-1} \eta(x, y, t) \\ &\quad \times \eta(x+X, y+Y, t+\tau) \dots\dots\dots(2) \\ &= \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \frac{1}{2} A_{lmn}^2 \\ &\quad \times \cos \frac{2\pi}{N} (lX + mY + n\tau) \dots\dots(3) \end{aligned}$$

で与えられる。これを三重フーリエ変換すれば三次元スペクトル A_{lmn}^2 が求まるが、この場合波のエネルギーは、形式的に l, m, n が互いに独立であるので、波の分散関係式

$$\begin{aligned} \omega^2 &= gk \quad \text{すなわち} \\ 4\pi^2 \left(\frac{n}{N\Delta t} \right)^2 &= g \left\{ \left(\frac{l}{N\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{m}{N\Delta y} \right)^2 \right\}^{1/2} \\ &\dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

を満足していない格子点 (l, m, n) にもいくぶん分配されることになる。この方法は、厳密に分散関係式(4)が満たされていない場合の風波の解析には、最も望ましいものであると考えられるが、現実問題として空間に沢山の波高計を分布させることがむずかしいので、未だに試みられていない。

Barber³⁾はこの方法を比較的少数の波高計の場合に適用するために、波の場に ergodicity の仮定を当てはめ、式(2)を

$$\begin{aligned} \rho'(X, Y, \tau) &= \frac{1}{N} \sum_{t=-N/2}^{N/2-1} \eta(x, y, t) \\ &\quad \times \eta(x+X, y+Y, t+\tau) \dots\dots\dots(2)' \end{aligned}$$

で置きかえた。さらに、水の波の場合には分散関係式を満たしている (l, m, n) の格子点 (この場合実数とする) に大部分のエネルギーが分配されていると考え、式(3)の三重フーリエ変換をこれらの格子点でのみ実行して、三次元的な表面波形を二次元エネルギーに変換することを提案している。Barber は相関関数を、波高計の設置点以外の空間ではゼロの値をとると仮定して、連続関数的に扱ったが、このため得られる方向スペクトルは、真の方向スペクトルをある重み関数で移動平均したものになる。しかしながら Barber が例示している波高計の配置では、あまり性質の良い重み関数が得られないので、それが彼の方法の短所になっている。

* 正会員 理修 九州大学助手 応用力学研究所
** 正会員 理博 九州大学教授 応用力学研究所

第2の測定原理は次のような波の表現に対応している。

$$\eta(x, y, t_0) = \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} A_{lm} \cos \frac{2\pi}{N} \times (lx + my + \varepsilon_{lm}) \quad \dots\dots\dots (5)$$

これは、ある瞬間 $t' = t_0$ で表面波形の空間的な分布を記録するやり方で、SWOP⁴⁾ の観測で代表される。相関関数は

$$\begin{aligned} \rho(X, Y) &= \frac{1}{N^2} \sum_{x=-N/2}^{N/2-1} \sum_{y=-N/2}^{N/2-1} \eta(x, y, t_0) \\ &\times \eta(x+X, y+Y, t_0) \quad \dots\dots\dots (6) \\ &= \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} \frac{1}{2} A_{lm}^2 \cos \frac{2\pi}{N} \\ &\times (lX + mY) \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

となるので、これを二重フーリエ変換すると、波数方向スペクトル A_{lm}^2 を得ることができる。相関関数に二次元のラグ・ウィンドウをかければ、 A_{lm}^2 を (l, m) 平面で平滑化した信頼度の高い波数方向スペクトルが求まる。この方法は理論的に明快で優れたものであるが、同時に広い空間の波高分布を測定するのが容易でないという技術的な問題と、式(7)から明らかにように、互いに 180° 異なる方向へ進む2つの波を識別できないという短所を有している。

第3の測定原理は、Longuet-Higgins et al.⁵⁾ に代表されるように、ある一点 (x_0, y_0) での波の物理量から、波の方向性を探るやり方である。たとえば波高を例にとると

$$\eta(x_0, y_0, t') = \sum_n A_n \cos(k_n \cos \theta_n \cdot x_0 + k_n \sin \theta_n \cdot y_0 + \omega_n t' + \varepsilon_n) \quad \dots\dots\dots (8)$$

のような表現と等価である。Longuet-Higgins et al. の場合には、物理量として波高と波の傾斜 (η_x, η_y) を測定し、これらの情報量の間のクロス・スペクトルと、方向スペクトルをフーリエ級数に展開するときのフーリエ係数とを関係づけた。この方法は周波数別の波向を良く識別することができ、周期2~10秒ぐらいの風波の方向スペクトルを解明するのに大きな成功をおさめている。短所としては、方向分解能が比較的粗いこと、周波数2Hz以上の小さな風波の場合には適当な物理量(たとえば波形勾配、粒子速度、水圧変化など)を精度良く測定するのが、現在のところ、むずかしいこと、などが考えられる。

第4の方法は、風波の写真の濃淡を、レンズの持っているフーリエ変換の働きを利用して、光学的に analog 処理するやり方である(板尾他⁶⁾, Stilwell⁷⁾, Sugimori⁸⁾)。この方法は容易に波の主方向およびその波長を識別する。この方法による結果とSWOPによる結果との比較はかなり良い一致を示している⁸⁾。しかしながら、波峰線が交差している short-crested な波の場合(互いに隣接し

た周波数を持つ二つの波が二方向から進入してくる場合に相当していると考えられる) のときには、レンズによる回折像は広範に分散するようである(杉森; 私信)。

3. 新しい方向スペクトルの測定法

われわれは方向スペクトルの合理的な測定を可能にするものとして、次のような波の場を考える。

$$\begin{aligned} \eta_i(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{N/2} \sum_{m=1}^M \{ a_{nm} \cos(k_n \cos \theta_{nm} \cdot x_i \\ &+ k_n \sin \theta_{nm} \cdot y_i + \omega_{ni}) \\ &+ b_{nm} \sin(k_n \cos \theta_{nm} \cdot x_i \\ &+ k_n \sin \theta_{nm} \cdot y_i + \omega_{ni}) \} \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$i=1, \dots\dots, M \quad t=0, 1, \dots\dots, N-1$$

$$\omega_n^2 = gk_n \quad \dots\dots\dots (10)$$

これは時系列を最初から二次元的に取扱う方法であって、波数 k_n は周波数 ω_n から式(10)によって決められる。式(9)で n は周波数、 m は波向に対応しており、周波数 ω_n は M 個の波向 $\theta_{n1}, \theta_{n2}, \dots\dots, \theta_{nM}$ に関係しているので、全体的な波の場は $N \times M$ 個の成分波の合成として表現される。未知数 a_{nm}, b_{nm} は、円周上に等間隔に配置される M 個の測定点 $(x_i = r \cos \theta_i, y_i = r \sin \theta_i, \theta_i = 2\pi i/M)$ の波高データ(合計 $M \times N$ 個)から、連立方程式を解いて求められる。すなわち、時系列 $\eta_i(t)$ をFFTを用いてフーリエ変換して、得られるフーリエ係数を A_{ni}, B_{ni} とするとき、 a_{ni}, b_{ni} は

$$\begin{pmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{ni} \\ \vdots \\ b_{n1} \\ \vdots \\ b_{nM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi_{nmi} & \sin \phi_{nmi} \\ -\sin \phi_{nmi} & \cos \phi_{nmi} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{n1} \\ \vdots \\ A_{ni} \\ \vdots \\ B_{n1} \\ \vdots \\ B_{nM} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \cos \phi_{nmi} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_{n11} & \cos \varphi_{n12} & \dots\dots \cos \varphi_{n1M} \\ \cos \varphi_{n21} & \cos \varphi_{n22} & \dots\dots \cos \varphi_{n2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos \varphi_{nM1} & \cos \varphi_{nM2} & \dots\dots \cos \varphi_{nMM} \end{pmatrix} \\ \sin \phi_{nmi} &= \begin{pmatrix} \sin \varphi_{n11} & \sin \varphi_{n12} & \dots\dots \sin \varphi_{n1M} \\ \sin \varphi_{n21} & \sin \varphi_{n22} & \dots\dots \sin \varphi_{n2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin \varphi_{nM1} & \sin \varphi_{nM2} & \dots\dots \sin \varphi_{nMM} \end{pmatrix} \\ \varphi_{nmi} &= rk_n \cos(\theta_{nm} - \theta_i) \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

$$\theta_{nm} = \frac{2\pi m}{M}$$

で求められる(r : 円形波高計の半径)。このとき方向スペクトル密度は

$$\phi(n, m) = \frac{1}{2} (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) / \Delta f \Delta \theta \quad \dots\dots\dots (13)$$

で定義され、周波数に関しても波向に関しても離散的で

ある。(Δf=1/NΔt, Δθ=2π/M)。このようにして得られる粗な方向スペクトル密度から信頼度の高い推定値を得るためには

$$\bar{\phi}(n', m') = \sum_{n=n'-II}^{n'+II} \sum_{m=m'-JJ}^{m'+JJ} g_{nm} \phi(n, m) \cdots (14)$$

のように、重み関数 g_{nm} を掛けて移動平均する必要がある。しかしながら平均操作の範囲を広げることは分解能の低下をもたらす。周波数分解能の低下はそれほど問題にならないとしても、波向の分解能の低下は、波高計を十分密に設置するのがむずかしいので、これを避けなければならない。このために波向に関してはアンサンブル平均を実行すべきである。すなわち複数個の時系列群を得て、各時系列群ごとに方向スペクトルを算出し、それらの結果を平均する方法である。これにより、波高計の数によって決まる最高の波向分解能 $\Delta\theta=2\pi/M$ を保ちながら、推定値の統計的自由度を高めることができる。

さて、式 (11) 右辺第 1 項の行列を T と呼ぶことにすると、行列 T は、測定しようとする波と波高計の最適な設置半径との関係を決める重要な役割を持っている。一般に連立方程式を解く時には、計算誤差をなるべく小さくおさえるために、pivot として絶対値最大の行列要素を選ぶ工夫がなされている。しかしながら掃き出しの段階が進むにつれて、しばしば pivot が 0 に収束する場合が生じる。このような条件を有している行列 T に対しては、方程式 (11) は解けなかったり、解けたとしても非常に大きな計算誤差を含んだ解をもたらす。したがって事前に行列 T の特性を調べておくことが不可欠である。このため、方向性のわかった人工の波高データを入力し、その方向スペクトル解析の結果を正しい値と比較し、正解が得られる周波数範囲を確認しておく必要がある。

われわれは $\sin^8(\theta/2)$ の方向スペクトルを有するように 360 本の成分波を重ね合わせてモデルの時系列を作り、 $M=12$ としてこのような操作を実行した。その結果、

$$S = \frac{rk_n}{\pi} = \frac{2r}{L_n} \cdots \cdots \cdots (15)$$

をパラメーターとして、 $0.30 < S < 1.75$ の範囲で正しい解が求まることが明らかになった。したがって円形波高計の直径を、風波の平均的な波長とほぼ同程度に定めれば良い。逆に $1/S$ の範囲で考えると、われわれが測定できる波は、円形波高計の直径の 0.75~3.33 倍の波長を持つ波に限られることがわかる。たとえば直径 $D=1$ m の波高計では 0.67~1.67 Hz の波、 $D=20$ cm のときには 1.5~4.0 Hz の波の方向スペクトルを測定できる。

図-1 は、 $M=12$, $S=0.82$ の条件のもとに、 $\Delta\theta$ の

Directional leakage ($M=12, S=0.82$)

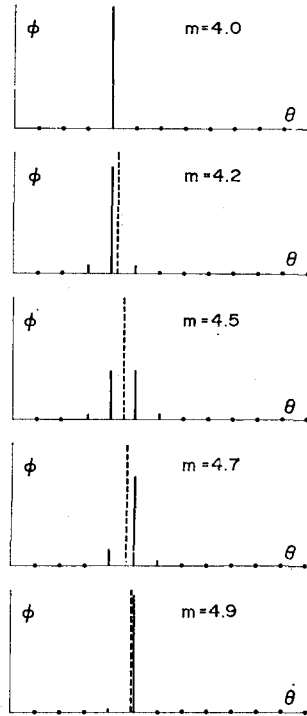
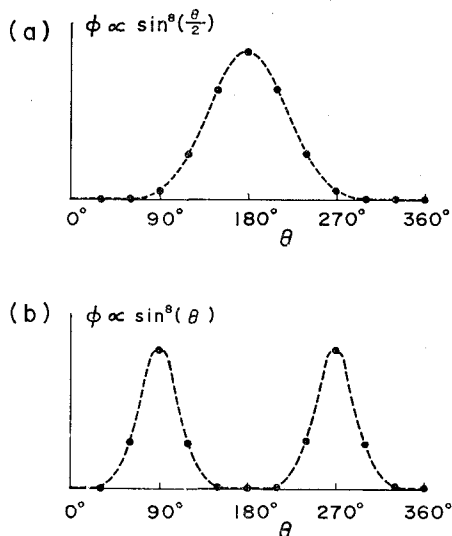


図-1 Directional leakage error (点線は入力の方
向スペクトル、実線は出力の方向スペクトル)

実数倍の波向を持っているモデル・データを入力した時に得られる、“directional leakage”の誤差を示したものである。directional leakage error の特徴は、一次元スペクトルの leakage error と同様で、 $\Delta\theta$ のちょうど中間に入力波がある時に leakage error が最大となり、 $\Delta\theta$ の整数倍に近い時ほど小さくなる。図-2 は、入力の波 (360 本の合成波) の方向スペクトルが、 $\sin^8(\theta/2)$ および $\sin^8(\theta)$ に比例している時に、われわれの方法で得られる方向スペクトルを示したものである。点線は入力の方
向スペクトル、丸印が出力の方向スペクトルを表わしているが、両者の一致はこの新しい方法の妥当性を示すものと考えられる。

4. 分散方程式と方向スペクトル

われわれの新しい方向スペクトル測定法は、①相関関数によらないこと、②時間と空間を分散関係式 (10) で結びつけること、によって三次元的な表面波形を二次元的なエネルギーに変換している。したがってこの新しい方法では、分散関係式が重要な意義を持っている。具体的には式 (12) の k_n が分散関係式 (10) を用いて計算され、その効果が行列 T の中に入りこむ。この点、時間と空間を独立に扱う第 1 の方法、空間分布だけを扱う第 2 および第 4 の方法、時間変化だけを扱う第 3 の方

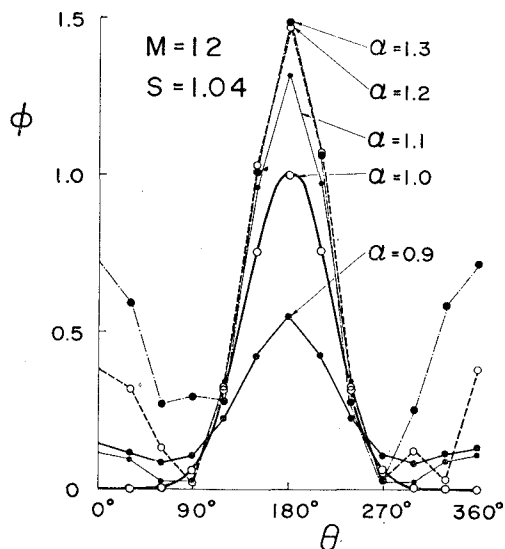


図—2 モデル・データの方角スペクトル解析（破線は入力の方角スペクトル，黒丸は出力の方角スペクトル）

法などは，この関係式の直接的な影響を受けない。

分散関係式 (10) は，無限水深微小振幅波の波動理論から導き出される水の波の最も基本的な性質であり，実際に造波機などで作られる規則波の場合は，かなりの精度で成り立っていることが知られている。しかしながら風波のように不規則な現象の場合には，この関係式は単純なものではなくなるようである。仮に形式的に $\omega^2 = \alpha g k$ で風波の分散関係式を表わすことができるとすると，平均的には $\alpha = 1.2 \sim 1.3$ が妥当な値のようである (Hamada, Mitsuyasu and Hase⁹⁾)。また風波の進行方向に並べた2つの波高計のデータをクロススペクトル解析して，周波数別に波速を求めると，全体的に実験値が理論値をかなり上回り，最大のスペクトル密度を与える周波数付近では $\alpha = 1.1 \sim 1.3$ ，それより高周波側では $\alpha = 1.5$ にも達する (Yefimov et al.¹⁰⁾)。波速が（したがって分散方程式が）理論値と風波による実験値とでこのように異なるのは，吹送流の影響⁹⁾，風圧の影響（水野・光易¹¹⁾），風波の方角スペクトルの影響¹⁰⁾ などの原因によるものと考えられている。

われわれの新しい方角スペクトルの測定法は，これまで見てきたように，風波の時間変化と空間変化が分散関係式によって coherent に結びつけられていることを前提にしているので，風波の場に適用すべき正しい α の値を評価する必要がある。図—3 は， α の評価を誤った場合に得られる方角スペクトルを，モデル・データを用いて計算したものである。入力の方角スペクトルは $\sin^8(\theta/2)$ で，入力の係数 α を 0.9 から 1.3 まで変化させ，内部での解析は $\alpha = 1.0$ を仮定して計算された。これから，方角スペクトルの形が分散関係式に大きく影

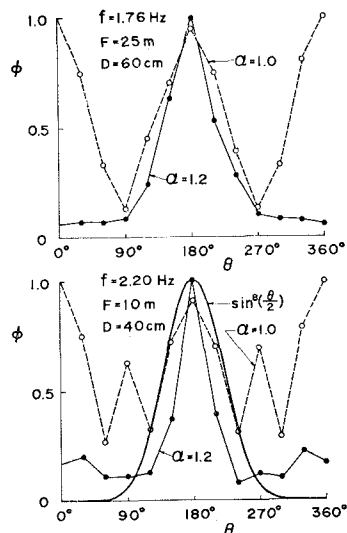


図—3 分散関係式の変化に伴う方角スペクトルの変化

響されること，係数 α の評価が適切でないと，真の波向とちょうど正反対の方向にも見掛け上のエネルギーが現われること，などが確かめられる。

図—4 は，新しい方法によって実際の風波の場を方角スペクトル解析した結果である。実験は当研究所の大型水槽（全長 80 m × 幅員 8 m × 水深 3 m）で行なわれたが，実験装置および風の特性に關しては，以前の研究（光易¹²⁾）と同一条件であるので，ここでは割愛した。風速は送風機の吹出口で 20 m/sec，吹出口から 10 m の所で 12 m/sec，25 m の所で 6.5 m/sec であった。またスペクトル解析の計算条件は， $N=256$ ， $II=2$ ， $JJ=2$ ， $g(n, m)=1/25$ ，推定値の自由度 50 で，各波高計は 5N のデータを記録

している。図—4 (a) は，吹送距離が 25 m の地点の風波の方角スペクトルである。点線は $\alpha = 1.0$ として計算したときの結果であるが，風波の進行方向 (180°) と正反対の方向でも高いエネルギーを示しているのは，図—3 で見たように，不適切に α を評価したた



図—4 風波の方角スペクトル（最大値を 1 に規格化してある）

めと考えられる。 α として実験による平均値⁹⁾ $\alpha=1.2$ を用いて計算しなおすと、方向スペクトルは実線で見られるようなもっともらしい形に修正される。(b)は吹送距離が10mの地点の方向スペクトルであるが、(a)と同様 $\alpha=1.2$ の時に信頼できると考えられる方向スペクトルが得られる。また図には $\sin^8(\theta/2)$ の曲線も合わせて示してあるが、得られた方向スペクトルはそれよりもかなりシャープな形を表わしている。一般的に吹送距離の減少とともに、ピークの周波数の方向スペクトルはシャープになる傾向が見られたが、詳細は別の機会に発表する予定である。

5. 結 語

これまでに知られている各種の方向スペクトルの測定法は、それぞれ固有な長所短所を備えている。それらは同じ方向スペクトルの名を冠しているが、厳密には同一の結果を与えない。主方向がはっきりしている風波の場合には、いずれの方法もほぼ正しい方向性を識別すると思われる。しかしながら、二方向から周期の同じ波が規則的に進入している場合、空間は節点・腹点が生じて一様でなくなるので、第1(Barber)、第3、第4の方法は正しくない結果を与えることが予想される。われわれの新しい方法はこのような場合にも有効であることが、数値実験、造波機による規則的節波、二方向からの風波、などの解析により確認されている。

この場合正しい分散関係式を評価できることが必要条件となるが、一様な波の場合は、二次元スペクトル $\phi(n, m)$ と一次元スペクトル $\Phi(n)$ の間に近似的に $\sum \phi(n, m) d\theta = \Phi(n)$ の関係式が成り立つことが認められているので、逆にこのことから帰納的に最も適切な α を決定することができる。即ち具体的には $\alpha=1.00, 1.05, \dots, 1.50$ の計11ケースについて方向スペクトルを計算し、その中から上の関係式に最も近い結果を与える場合を採用すれば良い。このようにしてわれわれは十分信頼でき

る方向スペクトルを求めることができる。

謝 辞：本研究の遂行にあたり重要な示唆を与えて下さった水野助教授に心から感謝の意を表します。また、円形波高計の作製、水槽実験、図面の作成などの多くの面で著者らに貴重な助力を与えて下さった江藤賢次技官に、厚く謝意を表わします。さらに、実験を行なうにあたって援助を与えて下さった本多忠夫助手 田中道芳技官に合わせて感謝の意を表します。

なお本研究の電子計算機による計算処理は、九州大学大型計算機センターの FACOM 230-60 および当研究所の FACOM 270-20 を使用して行なわれた。

参 考 文 献

- 1) 力石国男・光易 恒：応用力学研究所所報, No. 39, 1973, 77-104 pp.
- 2) 力石国男・光易 恒：日本海洋学会秋期大会予稿集, 1972, 9-10 pp.
- 3) Barber, N. F.: In, *Ocean Wave Spectra*, Prentice Hall Inc., 1963, 137-150 pp.
- 4) Cote, L. J. et al.: *Met. Pap.* New York U. Coll. Eng. 2, No. 6, 1960.
- 5) Longuet-Higgins, M. S., D. E. Cartwright and N. D. Smith; In, *Ocean Wave Spectra*, Prentice Hall Inc., 1963, 111-136 pp.
- 6) 板尾純一・木戸 武・井島武士・松尾隆彦・石川敏雄：第14回海岸工学講演会講演集, 1967, 60-67 pp.
- 7) Stilwell, D. J.: *Journal of Geophysical Research*, 74(8), 1969, 1974-1986 pp.
- 8) Sugimori, Y.: *La mer*, Tome 10, No. 1, 1972, 9-20 pp.
- 9) Hamada, T., H. Mitsuyasu and N. Hase: *Report of Trans. Tech. Res. Inst.*, No. 8, 1953, 1-22 p.
- 10) Yefimov, V. V., P. Soloviyev and G. N. Khris-toforov: *Izv., Atmospheric and Oceanic Physics*, Vol. 8, No. 4, 1972, 435-446 pp.
- 11) 水野信二郎・光易 恒：第20回海岸工学講演会論文集, 1973.
- 12) 光易 恒：第14回海岸工学講演会講演集, 1967, 39-44 pp.