

流れを遡る波のエネルギーの減衰について (III)

佐 藤 道 郎*

1. まえがき

水深が一様な流れを波が遡っていく場合にかなりの波高の減衰がみられる。この点に関し筆者は流れによってもたらされる乱れの作用によるものと考えて波エネルギーの逸散ならびに波高減衰率を明らかにしようとした^{1),2)}が定量的に実際の現象を説明できるには至らなかった。その原因を検討するうちに、波エネルギー方程式に誤りがあることがわかり、今回その修正を行なうとともに、せん断流場でも波と流れの相互作用によるエネルギー授受があり得ることならびに水面勾配の存在が流れの中の波エネルギーを考える上で重要なことを示した。

2. エネルギー方程式

二次元運動を考え、 x 軸を水底に沿ってとり、それと垂直上向きに y 軸をとる。水底は水平と θ の傾きを有し

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho}{2} \{ (U+u)^2 + v^2 \} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho}{2} \{ (U+u)^2 + v^2 \} + p + \rho g(y-H_L) \cos \theta \right] (U+u) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\rho}{2} \{ (U+u)^2 + v^2 \} + p + \rho g(y-H_L) \cos \theta \right] v = (U+u) \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (4)$$

式(4)を底から水面まで積分して波一周期の平均をとって上付き bar で表わせば次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^{h+\eta} \frac{\rho}{2} \{ (U+u)^2 + v^2 \} dy + \frac{1}{2} \rho g \cos \theta \bar{\eta^2} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h+\eta} \left[\frac{\rho}{2} \{ (U+u)^2 + v^2 \} + p + \rho g(y-H_L) \cos \theta \right] (U+u) dy = \int_0^{h+\eta} (U+u) \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \quad (5)$$

ここに、 h は水深、 η は $y=h$ からの水位変化である。また、次式の水面条件および $y=0$ で $v=0$ を用いて。

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (U+u) \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{at } y=h+\eta \quad (6)$$

いま、式(5)を变形して次のように表わしておく。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^{h+\eta} \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) dy + \frac{1}{2} \rho g \cos \theta \bar{\eta^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{h+\eta} \left\{ \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) + p + \rho g(y-h) \cos \theta \right\} u dy \right. \\ \left. + \int_0^{h+\eta} \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) U dy + \frac{1}{2} \rho g \cos \theta \bar{\eta^2} U_{h+\eta} \right] = - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{h+\eta} \frac{\rho}{2} U^2 dy \\ + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h+\eta} \rho (U+u) \left\{ \frac{U^2}{2} - g(h-H_L) \cos \theta \right\} dy - \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{h+\eta} \rho u U dy \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h+\eta} [\rho (U+u)^2 + p] U dy - \int_0^{h+\eta} U \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right] + \frac{1}{2} \rho g \cos \theta \cdot \eta^2 \frac{\partial U_{h+\eta}}{\partial x} + \int_0^{h+\eta} u \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \quad (7)$$

次に式(3)に $\rho \{ U^2/2 - g(h-H_L) \cos \theta \}$ を乗じて底から水面まで積分し 1 周期の平均をとれば次の式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h+\eta} \rho (U+u) \left\{ \frac{U^2}{2} - g(h-H_L) \cos \theta \right\} dy = \int_0^{h+\eta} \rho v U \frac{dU}{dy} dy + \rho g \sin \theta \int_0^{h+\eta} (U+u) dy - \frac{\rho}{2} U_{h+\eta}^2 \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (8)$$

水深は一定とする。波の x, y 方向速度成分を u, v とし、流れの速度を U とする。以下の計算は U が y のみの関数の場合である。

運動方程式、連続方程式は次のとおりである。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (U+u) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial (U+u)}{\partial y} \\ = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (U+u) \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

ただし、 ρ は密度、 g は重力加速度、 τ は粘性によるせん断応力を表わす。ポテンシャルエネルギーに関する水平基準線として $y=H_L$ をとる。 $dH_L/dx=\tan \theta$ となり、式(1)に $\rho(U+u)$ を乗じ、式(2)に ρv を乗じて加え式(3)を用いて变形すれば次式を得る。

* 正会員 工修 東北大学助手 工学部土木工学科

また式(1)に ρU を乗じて底から水面まで積分し1周期の平均をとれば次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \overline{\int_0^{h+\eta} \rho u U dy} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\int_0^{h+\eta} \{(\rho(U+u)^2+p)U\} dy} - \overline{\int_0^{h+\eta} U \frac{\partial \tau}{\partial y} dy} \\ & = \overline{\int_0^{h+\eta} \rho v (U+u) \frac{dU}{dy} dy} - \overline{\rho U^2 h + \frac{\partial \eta}{\partial t}} + \overline{\rho g \sin \theta \int_0^{h+\eta} U dy} \quad \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

式(8), (9)を(7)の右辺第2項および第3項に代入して

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\int_0^{h+\eta} \frac{\rho}{2} U^2 dy} = \overline{\int_0^{h+\eta} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} U^2 \right) dy} + \frac{\rho}{2} \overline{U^2 h + \frac{\partial \eta}{\partial t}} = \frac{\rho}{2} \overline{U^2 h + \frac{\partial \eta}{\partial t}}$$

を考慮すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\overline{\int_0^{h+\eta} \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) dy} + \frac{1}{2} \rho g \bar{\eta}^2 \cos \theta \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\overline{\int_0^{h+\eta} \left\{ \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) + p + \rho g(y-h) \cos \theta \right\} u dy} \right. \\ & \quad \left. + \overline{\int_0^{h+\eta} \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) U dy} + \frac{1}{2} \rho g \cos \theta \cdot \overline{\eta^2 U_{h+\eta}} \right] = \frac{1}{2} \rho g \cos \theta \bar{\eta}^2 \frac{\partial U_{h+\eta}}{\partial x} + \overline{\int_0^{h+\eta} (-\rho uv) \frac{dU}{dy} dy} \\ & \quad + \rho g \sin \theta \overline{\int_0^{h+\eta} u dy} + \overline{\int_0^{h+\eta} u \frac{\partial \tau}{\partial y} dy} \quad \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

左辺第1項は波エネルギー密度の局所的な時間変化を表わし、第2項は断面を通過する波のエネルギー流束の変化を表わし、式(10)は波エネルギーの収支を与えるものである。右辺に“湧き出し”に相当するものが4つ現われてる。第1項は水面変動による余剰圧力が流れになす仕事を表わし、第2項は波によるせん断力が流れになす仕事を表わす。これらはともに流速が y 方向に勾配をもつことにより現われた項である。せん断流の中では、これらの項を通じて、波と流れの相互作用によりエネルギー授受が生じることを示している。第3項は、波が水面の勾配を有することにより生じた項である。波のエネルギー流束では、ポテンシャルエネルギーの基準線として平均面がとられるが平均面が勾配を有する場合には、断面間で実際にはポテンシャルエネルギーのレベルに差が生じることになる。そのレベルの異なるところへ波の質量輸送として水の実質を輸送するには、その分だ

け重力に対して仕事をすることになる。だから、たとえば波が下流から上流に向かって伝播するような場合にはエネルギーの補給がなければ伝播とともに波エネルギーは減少し波高は減衰するものと考えられる。最後の項は粘性による波エネルギーの逸散を与えるものである。

せん断流の中で波のエネルギーは保存されず、上述の4つの項の複雑なからみ合いからなり、これらがすべて打ち消し合う場合にのみ波高が変化せずに伝播し得るが、それ以外では必ず減衰するか増大するかのいずれかとなることになる。

ここでは、式(10)を振幅について二次までを考えることとすると、

$$U_{h+\eta} \approx U_h + \eta \frac{dU_h}{dy}$$

から、右辺第1項は無視でき、 θ は $\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta \approx \tan \theta = I$ とおける程度として、次式となる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\overline{\int_0^h \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) dy} + \frac{1}{2} \rho g \bar{\eta}^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\overline{\int_0^h \rho u dy} + \overline{\int_0^h \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) U dy} + \frac{1}{2} \rho g \bar{\eta}^2 \right] \\ & = \overline{\int_0^h (-\rho uv) \frac{dU}{dy} dy} + \rho g I \overline{\int_0^{h+\eta} u dy} + \overline{\int_0^h u \frac{\partial \tau}{\partial y} dy} \quad \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

右辺第1項は非粘性としての波の運動を考えるときはゼロとなるが、少なくとも波動境界層の存在を無視し得ない場合には考慮する必要があろう。

一方、式(5)から式(10)を引くことにより流れに関して次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\overline{\int_0^{h+\eta} \frac{\rho}{2} \{(U+u)^2 - u^2\} dy} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\overline{\int_0^{h+\eta} \frac{\rho}{2} U^2 (U+u) dy} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\overline{\int_0^{h+\eta} (\rho u^2 + p) U dy} \right] \\ & = \rho g \sin \theta \overline{\int_0^{h+\eta} U dy} + \overline{\int_0^{h+\eta} U \frac{\partial \{\tau + (-\rho uv)\}}{\partial y} dy} \quad \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

3. エネルギーおよび波高の変化

まず式(11)の右辺第1項についてみるとこととし、

$$R = \overline{\int_0^h \rho uv \frac{dU}{dy} dy} \quad \dots \dots \dots (13)$$

とする。 u, v を非粘性流速 u_1, v_1 および粘性による補正

流速 u_2, v_2 の和として次のようにおく。

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2 \quad \dots \dots \dots (14)$$

u_1, v_1 は底における u_1 の振幅を u_0 として次のように表わされよう。

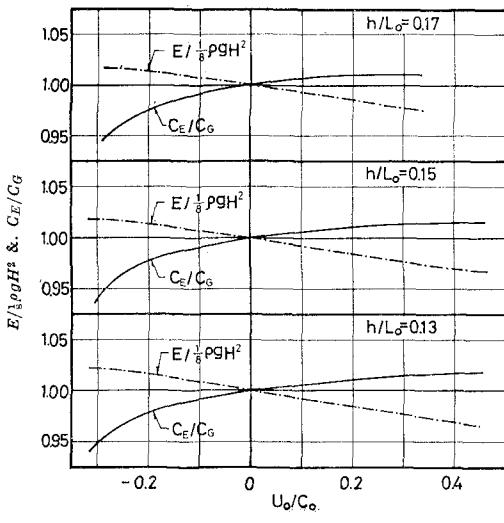
$$u_1 = u_0 \Psi_1(y) \cos(mx - \omega t) \quad \dots \dots \dots (15)$$

4. 計算結果

以上の諸式を用いて波高変化率を計算を行なった。結果の例を図-1に示す。この図では α はすべて減衰率として $\alpha_1 = -\alpha'_1, \alpha_2 = -\alpha'_2$ としている。また α_0 は前回までの計算で求めた式(11)右辺の第3項に関するものである。無次元化に用いた L_0, C_0 はそれぞれ流れが無い場合の波長および波速である。

R に関連した減衰率 α_1 は、向い流れの場合に波高の減衰を与える、 h/L_0 が大きい場合にはその効果は小さくなるようである。また、同じ向きの流れに対しては波高の変化にあまり効いていない。しかし、流速が大きくなるとわずかながら負の減衰率を与える、エネルギーの流れから波への移行が生じているものと思われる。

次に S に関する減衰率 α_2 であるが、これはその物理的な意味からして、この場合当然、向かい流れでは減衰を与え、同じ向きの流れでは波高を増幅させる。また重要なことは波高変化にかなり大きく影響していることである。これらに α_0 の効果も加えて全体としての波高減衰率を α として太線で示したが、せん断流においては向かい流れの場合に流速が大きくなるとかなり減衰効果が大きくなることを示している。したがって、Longuet-Higgins と Stewart⁴⁾ による Radiation Stress を介绍了エネルギー授受や流れの Stopping Action による増幅機構が作用するような流れにおいてもせん断流において



—2

は必ずしも予期される程波高が増大するとは限らない。向かい流れの場において波高の増大が問題となることの一つは榎木⁵⁾の実験に見られるように発散する流れによって侵入波が屈折して波の集中が生ずる場合であろう。この場合に局部的に1.8倍ほどにまでも波高は増大し得る⁶⁾。

ところで、 α の変化を見ると同じ向きの流れにおいては U_0/C_0 が 0.2 程度のところでゼロとなり、それより大きくなると α は負となり波高は増大することになる。これは実験的な検討を要する。

図中の白丸は実験値である。実験値は大き目であるがその変化のしかたはこの計算の傾向をよく表わしていると思われる。

なお、式(42)に基づく E と $(1/8)\rho_0 H^2$ の比ならびに群速度 C_g と式(45)の C_E 比を図-2に示したが、その違いはほんのわずかにすぎない。対数分布が一様分布にかなり近いことを考えれば当然であろう。

5. あとがき

波の水深一様なせん断流中を伝播する場合、波のレイノルズ応力を媒介として波と流れの間にエネルギー授受が生じ得ること、ならびに水面勾配の存在が波高変化に大きな役割をもつことを示した。

本研究を行なうにあたり終始ご指導を賜った東北大学教授 岩崎敏夫博士に深く感謝の意を表します。

なお、本研究は文部省科学研究費補助金(奨励研究A)の助成を受けて行なったものであることを付記し謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 岩崎敏夫・佐藤道郎：流れを遡る波のエネルギーの減衰について，第17回海岸工学講演会論文集，1970.
 - 2) 岩崎敏夫・佐藤道郎：流れを遡る波のエネルギーの減衰について(II)，第18回海岸工学講演会論文集，1971.
 - 3) 浜田徳一：せん断流の中の表面波の性質について，第18回海岸工学講演会論文集，1970.
 - 4) M. S. Longuet-Higgins & R.W. Stewart: The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents., Jour. of Fluid Mechanics, Vol. 110, 1961.
 - 5) 横木 亭：河口閉そく機構に関する基礎的研究(第一報)，第12回海岸工学講演会講演集，1965.
 - 6) 工藤奎吾：流れを遡る波に関する一研究，東北大学工学部土木工学科卒業論文，1968.