

波状底面上の流れによる表面波

浜 田 徳 一*

時間的な変化がゆるやかな波状底面上の流れにより生ずる表面波は主として移動床上の流れの問題で取り扱われるが、これは定常な表面波としての性質からも興味ある問題である。この問題については岩佐と Kennedy (1968) による一般構造についての研究があるが、今回の研究は表面波の形成を支配する底の境界条件の力学的検討である。

1. 非粘性の取扱いにおける特徴

(1) 一般流の流速分布の曲率を無視したとき

水平に x 軸, 垂直上向きに y 軸をとり, $y=0$ を水面, $y=-h$ を水底とする。

この場合の運動, 連続の各式は

$$\rho U \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} \dots\dots\dots (1)$$

$$\rho U \frac{\partial v}{\partial x} = - \rho g - \frac{\partial p}{\partial y} \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

一般流は

$$U = U_b + \beta(y+h) \dots\dots\dots (4)$$

とし, 水底 $y=-h$ において U_b の大いさのスリップ速度を持つものとする。境界条件は

$$U_b \frac{\partial \eta_b}{\partial x} = v_b \quad y=-h \text{ にて} \dots\dots (5)$$

$$U_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} = v \quad y=0 \text{ にて} \dots\dots (6)$$

$$U_0 \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g v = 0 \quad y=0 \text{ にて} \dots\dots (7)$$

U_0 は水表面の一般流速とする。式 (5), (6) は運動学的, 式 (7) は力学的な境界条件である。

これを解き

$$\eta_b = a_b \cos mx \dots\dots\dots (8)$$

の底面の起伏に対応する表面の起伏

$$\eta = a_0 \cos mx \dots\dots\dots (9)$$

を求めると

$$a_0 = \frac{U_0 m U_b a_b}{\sinh mh} \frac{1}{U_0^2 m \coth mh - \beta U_0 - g} \dots\dots (10)$$

式 (10) より水表面の起伏は水底のスリップ速度 U_b に比例し, その位相は底の起伏の位相と一致するか, 180°

だけ異なるかであり, いわば位相のずれが生じない。水底におけるスリップ速度 U_b は非粘性問題としては決定の方法がなく, 経験的に与えるほかはない。

なお式 (10) を用いて m についての積分形式を採用すれば, $x=0$ の水底に単純な突起がある場合の非粘性の水面形を求めることができ, 式 (10) の

$$\begin{aligned} & U_0^2 m \coth mh - \beta U_0 - g \\ &= \frac{U_0^2}{h} \left\{ mh \coth mh - \frac{\beta h U_0 + gh}{U_0^2} \right\} \end{aligned}$$

において, $(\beta h U_0 + gh)/U_0^2 < 1$ の場合は, $x=0$ の両側に exponential に減衰してゆく波形, $(\beta h U_0 + gh)/U_0^2 > 1$ の場合は減衰しない正弦型波形と, $x=0$ の両側に exponential に急速に減衰する波形とが現われる。

(2) 一般流の流速分布の曲率を考慮したとき

曲率を考慮した流速分布のもっとも簡単なものは

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{U_1}{h^2} (h^2 - y^2) + U_b \\ U_0 &= U_1 + U_b = \beta' U_1, \quad \beta' = 1 + \frac{U_b}{U_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

で示される放物線型流速分布であり, これに対する式 (10) の関係は

$$a_0 = \frac{U_0 U_b a_b}{U_0^2 (K_0 + K_2 m^2 h^2 + \dots) - gh (L_0 + L_2 m^2 h^2 + \dots)} \dots\dots\dots (12)$$

$$\begin{aligned} K_0 + K_2 m^2 h^2 + \dots &= \cosh mh - \frac{1}{\beta'} \frac{\sinh mh}{mh} \\ &- \frac{1}{\beta'^2} \left(\frac{1}{45} m^2 h^2 + \frac{1}{630} m^4 h^4 + \dots \right) \\ &- \frac{1}{\beta'^3} \left(\frac{1}{90} m^2 h^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_0 + L_2 m^2 h^2 + \dots &= \frac{\sinh mh}{mh} - \frac{1}{\beta'} \left(\frac{\cosh mh}{m^2 h^2} - \frac{\sinh mh}{m^3 h^3} \right) \\ &- \frac{1}{\beta'^2} \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{126} m^2 h^2 + \frac{1}{3 \cdot 240} m^4 h^4 + \dots \right) \\ &- \frac{1}{\beta'^3} \left(\frac{1}{35} + \frac{11}{2 \cdot 835} m^2 h^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

式 (12) に類似したかたちに式 (10) を書き直すと

$$a_0 = \frac{U_0 U_b a_b}{U_0^2 \cosh mh - (\beta U_0 + g) h \cdot \sinh mh / mh} \dots\dots\dots (13)$$

すなわち式 (12) は流速分布の曲率の影響を受け, 式 (13) の分母に附加的な項が加わっているが, 分子の $U_b a_b$

の関係は全く同じであり、問題の要点は水底のスリップ速度 U_b の解明にあることがわかる。

2. 粘性を考慮した解

この場合のせつ動流としての波の運動の粘性解を求めるとは水底近傍については Benjamin (1959) の wall friction layer の取扱いをを用いるのがよい。そして自由表面における粘性の効果は通常底のそれに対し非常に小さいことがわかっているから、自由表面の境界条件は非粘性とする。せつ動流に対し wall friction layer で働く粘性係数については現在の所その内容がはっきりしないが、ここでは一般流に対するそれよりは小で、分子粘性係数よりは大きい程度とし、垂直方向に一様の場合を取扱い、垂直方向に変化する場合については若干の言及をする。

運動方程式は一般流を $U = \beta(y+h)$ として

$$\rho U \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_2 \nabla^2 u \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$\rho U \frac{\partial v}{\partial x} = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu_2 \nabla^2 v \quad \dots\dots\dots(15)$$

$u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$ として, u_1, v_1 は非粘性解, u_2, v_2 は粘性解とする。 $u_i = -\partial \phi_i / \partial y$, $v_i = \partial \phi_i / \partial x$ ($i=1, 2$) の流関数を用い, 非粘性解は

$$\phi_1 = e^{imx} (A \cosh my + B \sinh my) + F(y) \dots\dots\dots(16)$$

のかたちを持つ。

粘性解は $y = -h$ の水底近傍のみで有効である。流関数を用い, 式 (14) を y で微分し, 式 (15) を x で微分し, その差をとる。水底近傍を考えるから $y+h=\eta$ とおき,

$$\beta \eta \left(\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \eta^2} - m^2 \phi_2 \right) = \frac{\nu_2}{im} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - m^2 \right) \phi_2 \dots\dots\dots(17)$$

ただし $\phi_2 = \phi_2 e^{imx}$ となっている。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - m^2 \right) \phi_2 = X, \quad X = \int_c e^{i\eta t} v(t) dt$$

とおき, 式 (17) を解いて

$$X = \int_c \text{const.} \cdot e^{i\eta t} e^{(\nu_2(t^3/3 + m^2 t)/\beta m)} dt \quad \dots\dots\dots(18)$$

を得る。これから

$$\phi_2 = \int_c \text{const.} \cdot e^{i\eta t} \frac{e^{(\nu_2(t^3/3 + m^2 t)/\beta m)}}{t^2 + m^2} dt \quad \dots\dots\dots(19)$$

m は h に対応し, t は η に対応するから, 式 (19) は次式の近似を用い得る。

$$\phi_2(\eta) = \int_c \text{const.} \cdot e^{i\eta t} \frac{e^{(\nu_2/3 \beta m) \cdot t^3}}{t^2} dt \quad \dots\dots\dots(20)$$

積分回路 c は X を求める計算中

$$[(t^2 + m^2) e^{(\nu_2(t^3/3 + m^2 t)/\beta m)}]_c = 0 \quad \dots\dots\dots(21)$$

として得られ, これから t は実軸に沿い $-\infty$ から 0 に向かい, 0 を回って偏角 $(+)\pi/3$ で第 1 象限を右上方に進めばよいことがわかる (図-1)。

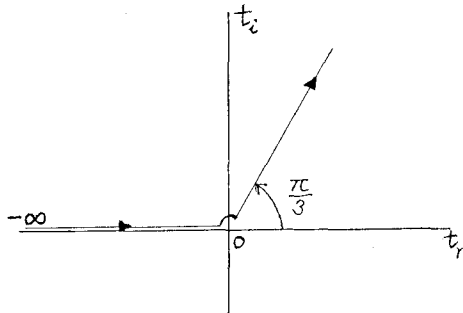


図-1 式 (20) の積分回路

次に示す水底の境界条件で $\phi_2'(0)/\phi_2(0)$ が必要とせられるから, この積分回路を用いて計算すると

$$\left. \begin{aligned} \phi_2(0) &= (-) \text{const.} \cdot e^{-i(\pi/6)} 3^{1/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{\nu_2}{\beta m}\right)^{1/3} \\ \phi_2'(0) &= \frac{2}{3} \text{const.} \cdot \pi \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(22)$$

$$\frac{\phi_2'(0)}{\phi_2(0)} = -1.288 e^{i(\pi/6)} \left(\frac{\nu_2}{\beta m}\right)^{-1/3} \quad \dots\dots\dots(23)$$

底の境界条件は

$$U(\eta) + u(\eta) = 0, \quad v(\eta) = 0 \quad \dots\dots\dots(24)$$

である。これを線形化し, 流関数を入れ計算すると

$$\phi_1'(0) - \frac{\phi_2'(0)}{\phi_2(0)} \phi_1(0) - \beta a_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(25)$$

あるいは η のかわりに y を用い

$$\phi_1'(-h) - \frac{\phi_2'(-h)}{\phi_2(-h)} \phi_1(-h) - \beta a_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(25)'$$

式 (23) を用いると

$$\begin{aligned} \phi_1'(-h) + 1.288 e^{i(\pi/6)} \left(\frac{\nu_2}{\beta m}\right)^{-1/3} \\ \times \phi_1(-h) - \beta a_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

表面条件としては非粘性の式 (6), (7) を用い, 式 (16) において式 (7) から

$$B = \frac{A(g + U_0 \beta)}{U_0^2 m} \quad \dots\dots\dots(27)$$

$\eta = a_0 e^{imx}$ として, 式 (6) から

$$a_0 = \frac{A}{U_0} \quad \dots\dots\dots(28)$$

式 (26) の水底の境界条件から, A は複素数, したがって a_0 も複素数とする。多少の計算ののち, 求められる a_0 は

$$a_0 = \frac{a_0 \text{sech } mh}{(gh + U_0^2)/U_0^2 - mh \tanh mh + (U_0 h \cdot mh/\nu_2)^{1/3} (1 - (gh + U_0^2) \tanh mh/U_0^2 mh) 1.288 e^{i(\pi/6)}} \quad \dots\dots\dots(29)$$

$U_0 h/\nu_2$ が十分大きい場合を考えると,

$$\alpha_0 = \frac{a_0 U_0^2 m h / \sinh m h}{(U_0 h / \nu_2 \cdot m h)^{1/3} (U_0^2 m h \coth m h - g h - U_0^2) 1.288 e^{i(\pi/6)}} \dots\dots\dots (30)$$

式 (30) の a_0 を式 (10) の a_0 と比較すると、水底のスリップ速度 U_0 として

$$U_0 \simeq \frac{U_0}{1.288 (U_0 h / \nu_2 \cdot m h)^{1/3}} \dots\dots\dots (31)$$

となり、式 (9) の $\cos m x$ が $\cos (m x - \pi/6)$ と $\pi/6$ の位相差が現われている。この場合の Reynolds 数ともいうべき $U_0 h / \nu_2$ が十分大きい場合を考えることは、粘性解の極限としての非粘性に近い解を求めているわけである。

式 (31) はスリップ速度と表面流速との比が $U_0 h / \nu_2$, $m h$ に支配せられることを示し、ことに具体的決定のむ

$$\frac{\phi_2'(0)}{\phi_2(0)} = \frac{2.094 - 1.408 \cdot \alpha / \nu_2 \cdot (\nu_2 / \beta m)^{1/3}}{-1.626 e^{-i(\pi/6)} (\nu_2 / \beta m)^{1/3} + 1.288 \cdot \alpha / \beta m \cdot (\beta m / \nu_2)^{1/3} e^{-i(\pi/6)}} \dots\dots\dots (34)$$

式 (34) は $\alpha=0$ で式 (23) に一致し、 $\alpha>0$ の時、位相差は $\pi/6$ よりも小となり、 $\alpha<0$ の時、 $\pi/6$ よりも大となる。

ずかしい ν_2 を含むことは、問題の困難さを示している。

次に位相差が $\pi/6$ と一定値に得られたことは、 ν_2 を垂直方向に変化させなかったためと考えられたため

$$\nu_2' = \nu_2 + \alpha(y+h) \dots\dots\dots (32)$$

とおき検討を行なった。この場合式 (17) に相当するものは

$$\left\{ \frac{\nu_2}{im} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - m^2 \right) + \frac{2\alpha}{im} \frac{\partial}{\partial \eta} - \beta \eta \right\} \times \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - m^2 \right) \phi_2 = 0 \dots\dots\dots (33)$$

となり、 $|\alpha|$ が非常に小さいとして、式 (23) に相当する近似解は

参 考 文 献

- 1) Iwasa, Y. & J.F. Kennedy: Free surface shear flow over a wavy bed, Journal of Hy. Division, Proc. A.S.C.E. 1968.
- 2) Benjamin, T.B.: Shearing flow over a wavy boundary, J. Fluid Mech., Vol. 6, 1959.