

浅海における波の変形

——特に Soliton の発生について——

土 屋 義 人*・安 田 孝 志**

1. 緒 言

浅海における波浪の変形に関しては、最近各種の研究が進められ¹⁾、実用的にもまた波の理論の進展にも大きく寄与する成果がえられている。特に 1895 年 Korteweg de Vries らによって見出されたクノイド波理論の重要性があらためて認識されるとともに、Laitone らによる高次の近似解もえられて理論の発展がなされたことは周知のとおりである。一方、K-dV 方程式はプラズマなど非線型波動の近似理論における基礎式として、海岸波浪のみならず各方面への応用が重要視されてきたが、それは定常解として存在する孤立波が唯一の固有値を持ち、かつ粒子的な挙動をすることが見出されつつあるためと思われる。この観点から、この方程式に基づく数値計算が試みられてきたが、1970 年 Zabusky-Galvin²⁾ らは波浪に対して適用し、水の波の場合にもいわゆる soliton が発生することを確かめている。ところが、いずれの研究においても浅海における波浪にシミュレートした研究が少なく、現象への対応が十分とはいえないと思われるので、本文では同様な数値実験によって浅海における波浪の変形を取扱い、波形変化と soliton の発生などについて考察することにした。

2. 基礎方程式と計算方法

(1) 一様水深の場合の基礎方程式

角谷³⁾にしたがって、基礎方程式を誘導すれば、次のとおりである。まず図-1に示す座標を用いれば、一様水深での波動に対する基礎式は次式で与えられる。

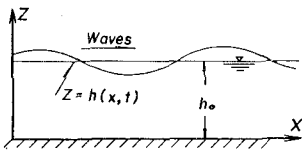


図-1 一様水深の場合の座標系

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 \\ \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + g(z - h_0)|_{z=h} &= 0 \\ h_t + h_x \phi_x - \phi_z|_{z=h} &= 0 \\ \phi_z|_{z=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

ここに、 ϕ : 速度ポテンシャル、 h : 水位変動、および

g : 重力の加速度を表わす。いま、 h_0 および $c_0 = \sqrt{gh_0}$ を用いて、

$$\Phi = \frac{\phi}{c_0 h_0}, \quad z^* = \frac{z}{h_0}, \quad x^* = \frac{x}{h_0}, \quad t^* = \frac{tc_0}{h_0}, \quad h^* = \frac{h}{h_0} \dots\dots(2)$$

で表わされる無次元量を定義すれば、式(1)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= 0 \\ \Phi_t^* + \frac{1}{2}(\Phi_{x^*}^2 + \Phi_{z^*}^2) + (h^* - 1)|_{z^*=h^*} &= 0 \\ h_t^* + h_{x^*}^* \Phi_{x^*} - \Phi_{z^*}|_{z^*=h^*} &= 0 \\ \Phi_{z^*}|_{z^*=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(2)$$

したがって、Gardner-Morikawa 変換を行ない、 h^* および Φ について次式で示すせつ動解を考える。

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x^* - t^*), \quad \tau = \varepsilon^{3/2}x^*, \quad z = z^* \dots\dots(4)$$

ここに $\varepsilon = (h_0/L_0)^2$ であり、 L_0 は初期波の波長である。

$$\left. \begin{aligned} h^*(\xi, \tau) &= 1 + \varepsilon h_1^*(\xi, \varepsilon) + \varepsilon^2 h_2^*(\xi, \tau) + \dots \\ \Phi(\xi, \tau, z) &= \varepsilon^{1/2} \{ \Phi_1(\xi, \tau, z) + \varepsilon \Phi_2(\xi, \tau, z) + \dots \} \end{aligned} \right\} \dots\dots(5)$$

以上の方法によって、まず第1近似式として、

$$h_1^* + \left(\frac{3}{2} \right) h_1^* h_{1\xi}^* + \left(\frac{1}{6} \right) h_{1\xi\xi\xi}^* = 0 \dots\dots(6)$$

がえられ、また第2近似式として次式がえられる。

$$\begin{aligned} & h_2^* + (h_1^* \tau + h_1^* \xi \xi \xi) h_{2\xi}^* + h_1^* h_{2\xi}^* \xi \\ &= \frac{1}{2} h_{1\xi}^* + 3 h_1^* \xi h_{1\xi}^* + \left(\frac{1}{30} \right) h_{1\xi\xi\xi\xi}^* \dots\dots(7) \end{aligned}$$

すなわち、式(6)はいわゆる K-dV 方程式といわれる。初期波高 H_0 を用いて、

$$\zeta = \frac{3}{2} \left(\frac{\varepsilon h_1^*}{H_0^*} \right), \quad \bar{\tau} = \left(\frac{H_0^*}{\varepsilon} \right) \tau, \quad H_0^* = \frac{H_0}{h_0} \dots\dots(8)$$

なる変換から式(6)は次式のようになる。

$$\zeta_{\bar{\tau}} + \zeta \zeta_{\xi} + \left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{\varepsilon}{H_0^*} \right) \zeta_{\xi\xi\xi} = 0 \dots\dots(9)$$

この式は規準化されているので、初期波の特性は第3項に掛かる係数と初期条件のなかにのみ含まれる。この係数を λ とすると、

$$\lambda = \left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{\varepsilon}{H_0^*} \right) = \left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{1}{U_s} \right) \dots\dots(10)$$

となり、Ursell parameter U_s によって表わされる。

一方、式(9)よりえられる波速は次式によって表わされる。

* 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所

** 学生会員 工修 京都大学大学院工学研究科

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \zeta + \frac{\lambda \xi \xi \xi}{\zeta} \dots\dots\dots (11)$$

したがって、上式の第1項は amplitude dispersion による steepening 効果を表わし、波の振幅の増大と水深の減少に応じて著しくなり、また第2項は frequency dispersion による smoothing 効果を表わす。たとえば、前者は $\zeta \sim 1$ 、また後者は λ に比例し、相互の物理的意味が明らかとなろう。すなわち、 λ の値が小さい場合には steepening 効果が強く、smoothing 効果との均衡が不十分となり、極端な場合には bore を発生することになる。また、 λ の値が大きい場合には、波形の分散性が強くなり、いわゆる dispersive waves となる。これら両者が平衡した領域においてのみ定常解が存在する可能性があるといえる。たとえば、式(11)において $d\xi/d\tau = \text{const.}$ とすれば、次式がえられる。

$$(\zeta \xi)^2 = \left(\frac{2c_1}{\lambda} \right) \zeta - \left(\frac{1}{3\lambda} \right) \zeta^3 - \left(\frac{c}{\lambda} \right) \zeta^2 + c_2 \dots\dots (12)$$

ここに、 $c = \xi \tau = \text{const.}$ であり、 c_1 および c_2 は積分定数である。図-2 は式(12)を示すものであり、 $c_2 < 0$ であれば定常解が存在し、いわゆる permanent type waves となり、また $c_2 = 0$ の場合は 図-2 位相速度による波の分類
いわゆる soliton が発生することになる。さらに、 $c_2 > 0$ の場合には、前述したような dispersive waves として表わされ、波形の変形を余儀なくされる。

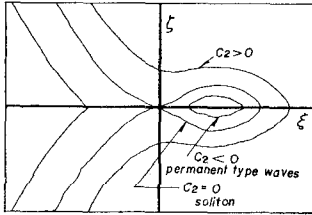


図-2 位相速度による波の分類

(2) 傾斜海浜における場合

水深が変化する場合に対しては、Mei⁴⁾ が式(9)に対応した基礎方程式を誘導して、若干の数値計算と実験との比較を行なっているが⁵⁾、ここでは角谷⁶⁾によって導出された基礎式を用いる。次にその概要を

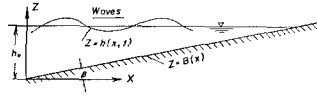


図-3 傾斜海浜における座標系

示す。用いる基礎式は式(1)であるが、図-3によって海底の境界条件のみが次式のように変形される。

$$\phi_z - B_x \phi_x|_{z=B=0} \dots\dots\dots (13)$$

一様水深の場合と同様な無次元化に加えて、 $B^* = B/h_0$ とすれば、式(2)に対応した次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} F^2 \Phi &= 0 \\ \Phi_{t^*} + \frac{1}{2}(\Phi_{x^*}^2 + \Phi_{z^*}^2) + (h^* - 1)|_{z^*=h^*} &= 0 \\ h_{t^*} + h_{x^*} \Phi_{x^*} - \Phi_{z^*}|_{z^*=h^*} &= 0 \\ \Phi_{z^*} - B_{x^*} \Phi_{x^*}|_{z^*=B^*} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (14)$$

ただし、 h_0 は基準点における水深を表わす。さらに、次の Gardner-Morikawa 変換

$$\xi = \varepsilon^{1/2} \left(\int \frac{dx^*}{V_0} - t^* \right), \quad \eta = \varepsilon^{3/2} x^*, \quad z = z^*, \quad V_0 = \sqrt{(1-B^*)}$$

を行なうことにし、式(6)と同様なせつ動解を求めることにすれば、 h_1^* に関する K-dV 式として次式がえられる。

$$\begin{aligned} h_1^* \eta + \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{1}{V_0^3} \right) h_1^* h_1^* \xi + \left(\frac{V_0}{6} \right) h_1^* \xi \xi \xi \\ - \left(\frac{B_1^*}{4V_0} \right) h_1^* = 0 \end{aligned}$$

これに対して式(8)と同様な規準化を行なえば、式(9)に対応した次式がえられる。

$$\zeta_\eta + \zeta \zeta_\xi + \left(\frac{\varepsilon V_0}{6^4 H_0^3} \right) \zeta \xi \xi \xi - \left(\frac{B_1^*}{4V_0^2} \right) \zeta = 0 \dots\dots (15)$$

上式において、左辺第3項の係数を

$$\lambda_1 = h_0^3 [1 - B \{ (h_0/L_0)^3 x \}]^2 / 6L_0^2 H_0 \dots\dots (16)$$

とし、第4項の係数を $\lambda_2 = (L_0/h_0)^3 B_x [1/4(1-B)]$ とすれば、一様水深の場合に対して前述したような2つの効果のほかに λ_2 で表わされる水深変化に依存する steepening 効果をもたらす項が加わることがわかる。なお、この場合に対しても、第2近似式を誘導したが複雑であるので省略することにした。

(3) 数値計算の方法

式(9)および式(15)を用いて数値シミュレーションを行なうために、implicit scheme を採用し、初期時間 step は前進型を、また $n \geq 2$ の step では対称型を採用した。すなわち、まず式(4)に対しては初期 step ($n=1$) の場合、

$$\begin{aligned} F_1 = \zeta_j^{n+1} - \zeta_j^n + \left(\frac{1}{16} \right) \left(\frac{\Delta \tau}{\Delta \xi} \right) (\zeta_{j+1}^{n+1} + 2\zeta_j^{n+1} + \zeta_{j-1}^{n+1}) (\zeta_{j+1}^{n+1} + \zeta_{j+1}^{n-1} - \zeta_{j-1}^{n+1} - \zeta_{j-1}^{n-1}) \\ + \left(\frac{1}{4} \right) \left\{ \frac{\lambda \Delta \tau}{(\Delta \xi)^3} \right\} (\zeta_{j+2}^{n+1} + \zeta_{j+2}^{n-1} - 2(\zeta_{j+1}^{n+1} + \zeta_{j+1}^{n-1}) + 2(\zeta_{j-1}^{n+1} + \zeta_{j-1}^{n-1}) - \zeta_{j-2}^{n+1} - \zeta_{j-2}^{n-1}) = 0 \dots\dots (17) \end{aligned}$$

であり、また $n \geq 2$ の場合、

$$\begin{aligned} F_2 = \zeta_j^{n+1} - \zeta_j^{n-1} + \left(\frac{1}{8} \right) \left(\frac{\Delta \tau}{\Delta \xi} \right) (\zeta_{j+1}^{n+1} + 2\zeta_j^{n+1} + \zeta_{j-1}^{n+1}) (\zeta_{j+1}^{n+1} + \zeta_{j+1}^{n-1} - \zeta_{j-1}^{n+1} - \zeta_{j-1}^{n-1}) + \left(\frac{1}{2} \right) \\ \times \left\{ \frac{\lambda \Delta \tau}{(\Delta \xi)^3} \right\} (\zeta_{j+2}^{n+1} + \zeta_{j+2}^{n-1} - 2(\zeta_{j+1}^{n+1} + \zeta_{j+1}^{n-1}) + 2(\zeta_{j-1}^{n+1} + \zeta_{j-1}^{n-1}) - \zeta_{j-2}^{n+1} - \zeta_{j-2}^{n-1}) = 0 \dots\dots (18) \end{aligned}$$

同様に、式(15)に対しては、それぞれ次式を用いることにした。

$$\begin{aligned} & \zeta_j^{n+1} - \zeta_j^n + \left(\frac{1}{16}\right) \left(\frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta \xi}\right) (\zeta_{j+1}^n + 2\zeta_j^n + \zeta_{j-1}^n) (\zeta_{j+1}^{n+1} + \zeta_{j+1}^n - \zeta_{j-1}^{n+1} - \zeta_{j-1}^n) \\ & + \left(\frac{1}{4}\right) \left\{ \frac{\lambda_1 \Delta \bar{\tau}}{(\Delta \xi)^3} \right\} \{ \zeta_{j+2}^{n+1} + \zeta_{j+2}^n - 2(\zeta_{j+1}^{n+1} + \zeta_{j+1}^n) + 2(\zeta_{j-1}^{n+1} + \zeta_{j-1}^n) - \zeta_{j-2}^{n+1} - \zeta_{j-2}^n \} \\ & - \left(\frac{1}{8}\right) (\lambda_2 \Delta \bar{\tau}) \{ \zeta_{j+1}^{n+1} + \zeta_{j+1}^n + 2(\zeta_j^{n+1} + \zeta_j^n) + \zeta_{j-1}^{n+1} + \zeta_{j-1}^n \} = 0 \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \zeta_j^{n+1} - \zeta_j^{n-1} + \left(\frac{1}{8}\right) \left(\frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta \xi}\right) (\zeta_{j+2}^n + 2\zeta_j^n + \zeta_{j-1}^n) (\zeta_{j+1}^{n+1} + \zeta_{j+1}^{n-1} - \zeta_{j-1}^{n+1} - \zeta_{j-1}^{n-1}) \\ & + \left(\frac{1}{2}\right) \left\{ \frac{\lambda_1 \Delta \bar{\tau}}{(\Delta \xi)^3} \right\} \{ \zeta_{j+2}^{n+1} + \zeta_{j+2}^{n-1} - 2(\zeta_{j+1}^{n+1} + \zeta_{j+1}^{n-1}) + 2(\zeta_{j-1}^{n+1} + \zeta_{j-1}^{n-1}) - \zeta_{j-2}^{n+1} - \zeta_{j-2}^{n-1} \} \\ & - \left(\frac{1}{8}\right) (\lambda_2 \Delta \bar{\tau}) \{ \zeta_{j+1}^{n+1} + \zeta_{j+1}^{n-1} + 2(\zeta_j^{n+1} + \zeta_j^{n-1}) + \zeta_{j-1}^{n+1} + \zeta_{j-1}^{n-1} \} = 0 \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

Truncation error に関しては、それぞれ次式で示すオーダーとなるが、後者の差分 scheme の方が精度がよいことがわかる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_1}{\Delta \tau} &= (\zeta_{\bar{\tau}} + \zeta_{\xi\xi} + \lambda \zeta_{\xi\xi\xi}) + \Delta \bar{\tau} \left(\frac{1}{2} \zeta_{\bar{\tau}\bar{\tau}} + \zeta_{\xi\bar{\tau}} + \lambda \zeta_{\xi\xi\bar{\tau}} \right) + O(\Delta \tau^2) \\ \frac{F_2}{\Delta \tau} &= (\zeta_{\bar{\tau}} + \zeta_{\xi\xi} + \lambda \zeta_{\xi\xi\xi}) - \frac{1}{6} [2(\Delta \bar{\tau})^2 - (\Delta \xi)^2] \zeta_{\xi\xi\xi} - \left(\frac{\lambda}{4}\right) \{ (\Delta \bar{\tau})^2 \zeta_{\xi\xi\xi\bar{\tau}} + 2(\Delta \xi)^2 \zeta_{\xi\xi\xi\xi} \} + O[(\Delta \xi)^3] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

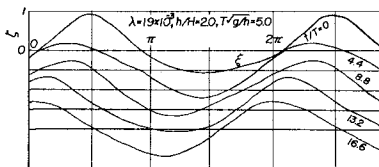
一方、安定性に関しては、 φ を差分式の exact solution, δ を error term として、 $\zeta = \varphi + \delta$ として δ に関する変分式が $\Delta \xi, \Delta \tau$ および時間 $\bar{\tau}$ に対して安定であることの確認を行なうことにした。まず、 ζ は局所的にあまり変化せず、線型成分 ζ_0 の周囲を変動する $\delta \zeta$ を付加して表わされるとすれば、 $\zeta \zeta \sim \zeta_0 \zeta$ と線型化される範囲で検討した結果ではいずれも安定であることがわかった。なお、実際の計算では、以上の差分 scheme を用いても numerical error が伝播していくために、 ζ_j^n の離散値に 2 次式を最小自乗法であてはめ、平滑化を行なうことにした。

は Stokes 波の第 1 および第 3 近似解を用いて数値計算し、波の変形特性、特に soliton の発生について考察することにした。まず、図-4 (a) は Stokes 波の第 3 近似解を初期条件とした場合で、 $\lambda=0.019$ と比較的大きいときの波の変形を示し、また図-4 (b) は第 1 近似解を用い、 $\lambda=0.005$ とした場合を示す。前者では、 λ の値が大きいため soliton は発生せず、初期条件の特性から若干 dispersive な波の変形をしているが、後者では 2 つの soliton が発生し、次第に両者の位相がずれていくことがわかる。図-5 はさらに λ の値を小さくし、第 1 近似解を用いた場合であるが、このうち (a) では soliton は 3 つ、(b) では 4 つ発生しており、Zabusky⁷⁾ らがすでに示したとはほぼ同様な傾向を示し、各 soliton がそれぞれ波高に対応した位相速度で進行している様子がよく現われている。

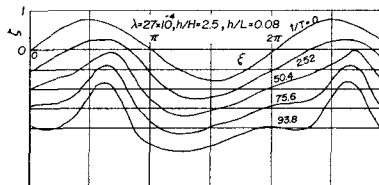
3. 数値計算の結果と考察

(1) 一様水深における波の変形と soliton の発生

前述したように、波の変形特性は K-dV 方程式に基づく限りでは、初期条件としての波の特性とこれによって特長づけられる λ の値によって決定されるので、ここで

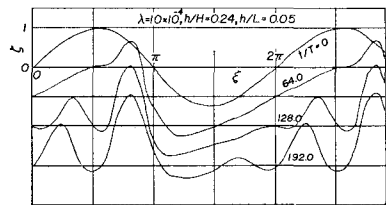


(a)

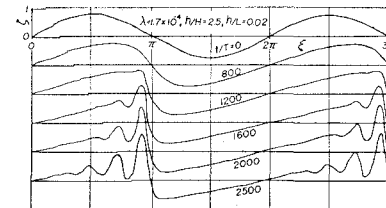


(b)

図-4 λ の値が大きい場合の波の変形



(a)



(b)

図-5 λ の値が小さい場合の波の変形

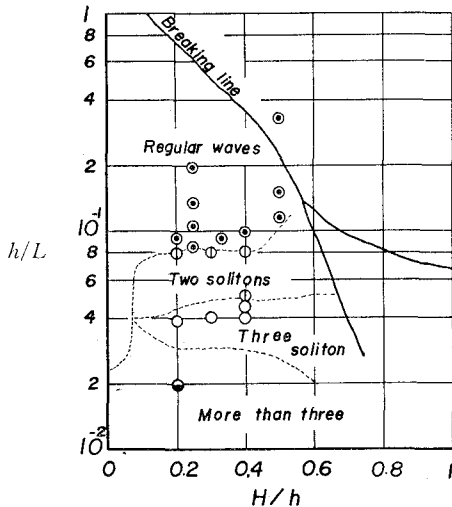
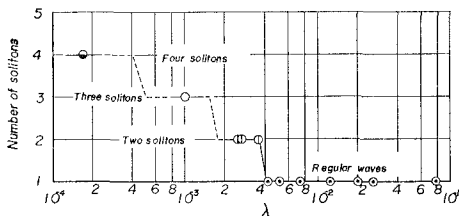


図-6 Galvin の実験結果との比較

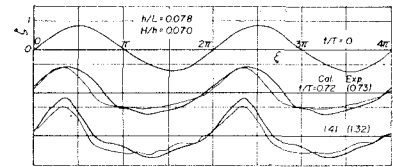
このように、一樣水深の場合には初期波の特性と λ の値によって soliton の発生が規定されるので、図-6 には Galvin^{9),10)} の造波特性と soliton の発生との関係の比較を示す。計算結果が十分でなく、すべてについて確かめることはできないが、両者の対応のある範囲ではかなり一致しているといえよう。また、図-7 は soliton の発生を λ によって表わそうとしたものであるが、初期波形にも若干影響され、また計算結果も十分でないけれども、ほぼ soliton の発生数を見出すことができる。

図-7 λ による soliton の発生数の変化

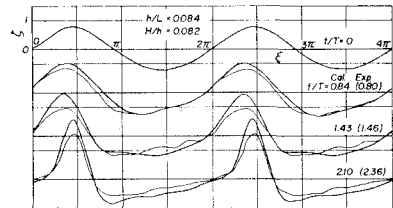
(2) 傾斜海底における波の変形

傾斜海底の波の変形に関して、直接海底勾配の影響を考慮したものとしては、岩垣ら⁹⁾ のものが発表され、波形の非対称性の発生を理論的に解明されたが、いまだ実験波形との直接の比較はなされていないようである。したがって、ここでは第1近似式ではあるが海底勾配の影響が付加された式(15)に基づいて数値計算し、実験結果と比較することにしよう。

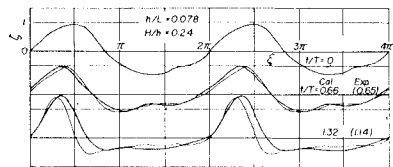
勾配 1/30 の傾斜海底で、周期 2 sec の波を起し、各点での波の変形を詳細に記録した酒井の実験結果に基づいて数値計算した。図-8 は計算結果と実験値とを比較したものであり、図中 t/T の値はそれぞれ計算値(Cal.) および実験値(Exp.) を示し、また太い実線および細い実線はそれぞれ計算および実験波形である。両者の比較



(a)



(b)



(c)

図-8 一樣勾配の傾斜海底における波の変形

を行なう場合、初期条件としての波速または波長の決定がかなり重要であるので、一樣水深部での測定結果から直接推定することにした。これらの計算結果から、両者の一致は大体良好であり、特に波形が非対称になっていく過程をある程度説明することができる。しかし、ここに図示した t/T の値より少し岸側に波が進行する場合の計算結果では、波形がかなり複雑に変形するようであり、このことは前述した steepening および smoothing 効果に加えて、式(15)の左辺第4項で表わされる海底勾配の直接的な影響による波の steepening 効果の結果とも考えられるが、砕波限界との関連においてこの数値実験の適用限界を調べていく必要があることはいうまでもない。なお、この計算の結果では soliton の発生は明らかでない。さらに勾配の緩やかな場合には soliton が発生することから、その場合には式(15)における λ_1 と λ_2 との相互関係特に勾配の効果が大きいと考えられるが、これらについては別の機会に発表するつもりである。

(3) 現地海岸における波の変形への適用

大潟海岸における冬期波浪時のうねりに近い観測記録に基づいて、浅海における波浪の変形を数値計算し、実測記録と比較した一例を述べる。この海岸の海底断面は図-9 のとおりであり、離岸距離約 220 m 以浅における 6 点の観測結果をその比較の対象とする。すなわち、

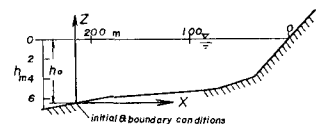
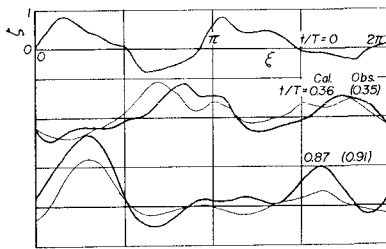


図-9 大潟海岸の海底断面と初期条件



図—10 浅海における波浪の変形の
実測結果との比較

計算における海底断面としてはこの図のものを用い、波浪は第1人工島に沿って侵入するものを取りあげ、水深6.6mでの地点での記録を初期条件として与えて数値計算した。図—10は計算および実測の結果との比較の一例であるが、波速および波長の計算には、初期条件として与えた測点での波速を記録から推定して用いた。現地海岸の場合には、うねりといえども方向スペクトルを持ち、また必ずしも long crested waves ではないので、その波浪の変形は微妙である。この図からわかることは、約1波長の進行に伴う波浪の変形についての両者の比較であるが、大体の傾向の一致をみることができる。また、 $t/T=0.36$ の波形から $t/T=0.8$ の場合への移行において、波高の小さい波を大きいものが追いついていく現象をある程度説明できるようにみうけられるし、さらに波高の比較においては一般に計算値の方が大きく現われているのは、前述した波浪の steepening 効果などのほか局所的な碎波や海底摩擦の影響も考えられる。以上のように、波浪の変形に対してこの比較で十分とはいえないが、さらに多くの比較検討を行えば、少なくともうねりの場合の波浪の変形の究明に対して、かなり有益な結果がえられるように思われる。

4. 結 語

以上、浅海における波浪の変形を主としてK-dV方程式の数値実験と実験または実測の結果と比較することによって考察した若干の結果を述べた。一樣水深における soliton の発生についてはなお詳細な計算を追加すべきであるし、また傾斜海岸の場合についても実験結果などとの比較も十分とはいえないが、浅海における波の変形が前述したような steepening および smoothing 効果の相互関係によって規定されることがある程度わかったよう

に思われるし、また傾斜海岸での波の変形特に波形変化に対してかなり興味ある比較検討ができた。また、計算方法そのものについても、さらに改良すべき点が少なくないと思われるので、今後かような数値実験に基づいて波の変形特性の究明につとめていきたいと考えている。最後に、波の変形に関する実験結果との比較を行なうにあたり、快よく貴重な実験資料を貸与していただいた工学部の酒井助教授に厚く謝意を表明するとともに、図面の整理などに熱心にご協力いただいた海岸災害研究部門の芝野、山口両助手および大学院学生河田君の労に心から感謝する次第である。

参 考 文 献

- 1) 岩垣雄一：クノイド波理論の実用化，水工学シリーズ，72-B-10，1972，p. 15.
- 2) Zabusky, N.J. and C.J. Galvin: Shallow-water waves, the Korteweg-de Vries equation and solitons, Jour. Fluid Mech., Vol. 47, Part 4, 1971, pp. 811~824.
- 3) 角谷典彦：分散性媒質中の非線型波動—Korteweg-de Vries 方程式を中心として—, Nagare, Vol. 3, No. 2, 1971, pp. 5~26.
- 4) Mei, C. C. and B. Le Méhauté: Note on the equation of long waves over an uneven bottom, Jour. Geophys. Res., Vol. 71, No. 2, 1966, pp. 393~400.
- 5) Madsen, O.S. and C.C. Mei: The transformation of a solitary wave over an uneven bottom, Jour. Fluid Mech., Vol. 39, Part 4, 1969, pp. 781~791.
- 6) Kakutani, T.: Effect of an uneven bottom on gravity waves, Jour. Phys. Soc. Japan, Vol. 30, No. 1, 1971, pp. 272~276.
- 7) Zabusky, N. J. and M. D. Kruskal: Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, Phys. Rev. Letters, Vol. 15, No. 6, 1965, pp. 240~243.
- 8) 岩垣雄一・酒井哲郎：一樣勾配斜面上の有限振幅長波について，土木学会論文報告集，第196号，1971，pp. 65~74.
- 9) Galvin, C. J.: Finite-amplitude, shallow water-waves of periodically recurring form, Proc. Symp. on Long Waves, 1970, p. 32.
- 10) Galvin, C. J.: Wave breaking in shallow water, Waves on Beaches and Resulting Sediment Transport, edited by R. E. Meyer, Academic Press, 1972, pp. 413~456.

付記 高次近似における波速の修正を考慮すれば，式(4)および(7)は変わる。図—2において，縦軸および横軸を ζ および ξ とする。