

波動解析への有限要素法の適用

坂井 藤一*・河合 三四郎*

1. ま え が き

近年海洋開発がさかんになり、種々の海域に海洋構造物が建設されようとしている。海洋構造物の設計において重要な役割を果たす波浪は、その構造物自身の存在、あるいは海底地形や海岸線形状によって反射・屈折・回折などの複雑な挙動を示す。従来このような波動の数値解析は、主として差分法によって行なわれて来た^{1),2)}。

一方、最近急速な発展を示している数値解析法として有限要素法がある。これはもともと構造解析のために考え出されたものであるが、現在では流体を含む連続体解析あるいはさらに一般数値解析の手法としての位置を確立しつつある。このような有限要素法を波浪解析に適用した例は未だないようである。わずかに Zienkiewicz が港湾固有振動の問題に応用した例が報告されている³⁾。

有限要素法と差分法ではそれぞれ特質があるが、本質的には両者は等価であり、一つの離散化手法の体系に包含され得るものと考えられる⁴⁾ (補遺参照)。実際に取扱う上で有限要素法の特徴は、メッシュ分割の任意性と境界条件の処理の容易さにあると考えられる。したがって、任意の地形・構造物形状などに応じて数値実験を行なおうとする場合、差分法に比し有限要素法はフレキシビリティがあり、汎用プログラムの作成に便利である。

本報告は、有限要素法のこの方面への応用について考察したものである。取扱った対象は、微小振幅表面波の二次元伝播問題である。

2. 基礎方程式

ここで取扱うのは非圧縮性完全流体の無限小振幅表面波動で、渦無しの条件が仮定され、表面張力は無視されている。伊藤・谷本 (1971)⁵⁾ が示したように、運動方程式、連続条件および表面と底面での境界条件より、表面での未知関数 η, u, v のみを含む基礎方程式 (1) が誘導される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

記号の内容については図-1に示した。ただし、 g は重力の加速度である。また H は水深の大きさによって次の3種類の関係のいずれかをとる。

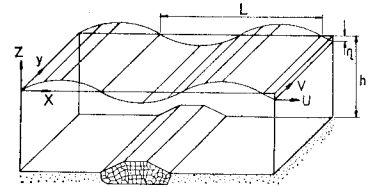


図-1

$$\left. \begin{aligned} H=h & \quad \text{長波} \left(\frac{h}{L} < \frac{1}{25} \text{程度} \right) \\ H=\frac{1}{k} \tanh kh & \quad \text{浅水波} \left(\frac{1}{25} < \frac{h}{L} < \frac{1}{2} \text{程度} \right) \\ H=\frac{1}{k} & \quad \text{深水波} \left(\frac{1}{2} < \frac{h}{L} \text{程度} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 k は波数で $k=2\pi/L$ であり、波動が単一角振動数 σ をもつ場合次の関係が成立する。

$$\sigma^2 = kg \tanh kh \dots\dots\dots (3)$$

式 (2) からわかるように、長波の場合には解析領域の幾何学的形状を与えれば、式 (1) は係数がすべて決定して解き得るのに対し、浅水波および深水波の場合には式 (1) の係数 H が入射波に依存するため、任意波形の入射波を考えるとときには、入射波を成分波分解し、各成分波に対して式 (3) を考慮して数値計算し、その上でその結果を合成する必要がある。

3. 有限要素法による定式化

基礎方程式から有限要素法に定式化するに際し、通常のエネルギ型変分原理によらず、新たに最小二乗変分原理^{6),7)}を導入した。紙面の都合でマトリックスの誘導過程については文献⁷⁾を参照されたい。

図-2のような三角形要素に対し、基礎方程式 (1) から最小二乗変分原理によって、式 (4) のような要素マトリックスが

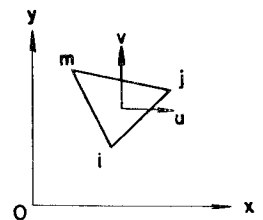


図-2

得られる。

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & [B'] & [C'] \\ [B'] & 0 & 0 \\ [C'] & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_t \\ u_t \\ v_t \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} g([B]+[C]) & \text{Sym.} & \\ 0 & H[B] & \\ 0 & H[D^T] & H[C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta \\ u \\ v \end{Bmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

ただし,

$$\begin{aligned} [B] &= \{b\} \{b^T\}, & [B'] &= \{b\} \{I^T\}, \\ [C] &= \{c\} \{c^T\}, & [C'] &= \{c\} \{I^T\}, & \dots\dots\dots(5) \\ [D] &= \{b\} \{c^T\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{b\} &= \frac{1}{2\Delta} \begin{Bmatrix} y_j - y_m \\ y_m - y_i \\ y_i - y_j \end{Bmatrix}, & \{c\} &= \frac{1}{2\Delta} \begin{Bmatrix} x_m - x_j \\ x_i - x_m \\ x_j - x_i \end{Bmatrix}, \\ \{I\} &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

$$\eta = \begin{Bmatrix} \eta_i \\ \eta_j \\ \eta_m \end{Bmatrix}, \quad u = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix}, \quad v = \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(7)$$

上式で、添字 i は時間に関する微分を示す。また Δ は要素の面積、添字 i, j, m は図-2 における節点番号を示す。

式(4)を時間に関して時間間隔 Δt で離散化すると、最終的に次の式を得る。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{g\Delta t}{2}([B]+[C]) & \frac{1}{3}[B'] & \frac{1}{3}[C'] \\ \frac{1}{3}[B'] & \frac{H\Delta t}{2}[B] & \frac{H\Delta t}{2}[D] \\ \frac{1}{3}[C'] & \frac{H\Delta t}{2}[D^T] & \frac{H\Delta t}{2}[C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta \\ u \\ v \end{Bmatrix}_{n+1} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{g\Delta t}{2}([B]+[C]) & \frac{1}{3}[B'] & \frac{1}{3}[C'] \\ \frac{1}{3}[B'] & -\frac{H\Delta t}{2}[B] & -\frac{H\Delta t}{2}[D] \\ \frac{1}{3}[C'] & -\frac{H\Delta t}{2}[D^T] & -\frac{H\Delta t}{2}[C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta \\ u \\ v \end{Bmatrix}_n \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(8)$$

ここで、 $n, n+1$ は相隣る時間ステップ番号を示す。これより、 $n=0$ を初期値とし、step-by-step に連立方程式を解いていけばよい。

4. 解析精度の検討

以上述べてきた方法の解析精度を調べるため、矩形水路の一端から入射する単一正弦波の伝播の問題を解析した。水路の水深は5mで入射波の波長は120mである。水路延長は1波長分120mとし、これを1/20, 1/16, 1/12, 1/8の4種類の分割で計算した。水路幅は水路延長方向の3メッシュ分とし、これを2分割した。20分割

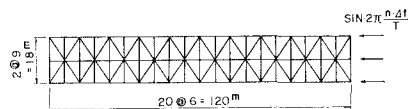


図-3

の場合の要素分割を図-3に示す。差分時間間隔は入射波の周期の1/25から1/6まで7種類の分割数を用いた。メッシュ分割と時間分割の組み合わせケース数は10種類あり、表-1に示した。 $(\Delta t/\Delta x)C$ の値を書いている組み合わせが計算を実行したケースである。

表-1

$\Delta x/L$	$\Delta t/T$						
	1/25	1/20	1/16	1/15	1/12	1/8	1/6
1/20	0.80	1.00	-	1.33	-	-	-
1/16	-	0.80	1.00	-	1.33	-	2.67
1/12	-	-	0.75	-	1.00	-	-
1/8	-	-	-	-	-	1.00	-

計算は静水面を初期条件として始める。図-4には、 $\Delta t=T/25$, $\Delta x=L/20$ の場合の波の進行状態を $t=15\Delta t$, $31\Delta t$, $38\Delta t$ について示している。静水面と正弦波との接合部を除いて理論曲線によく合っており、 $\Delta t=T/25$, $\Delta x=L/20$ の組み合わせによる計算結果は十分な精度を

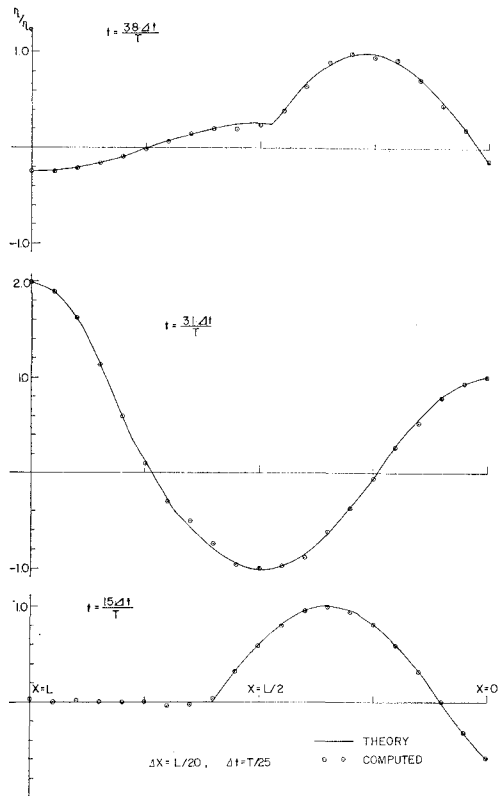
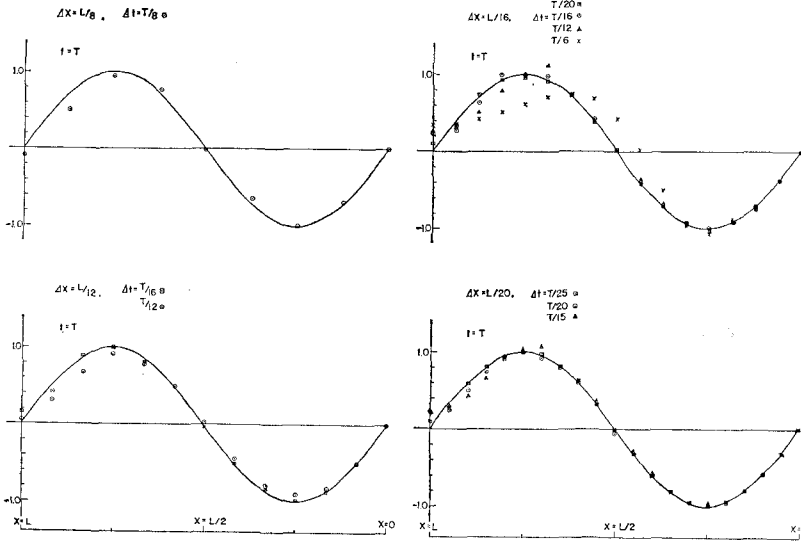


図-4

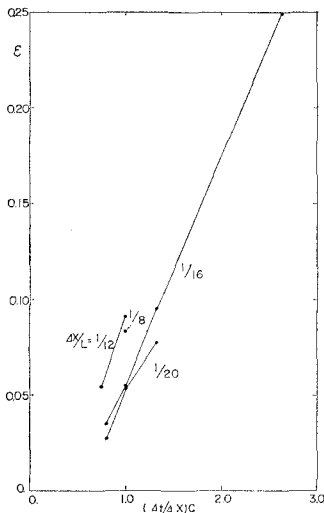


図—5

もっていると判断される。この分割をもっと粗くしたときの状況を図—5に示す。いずれも計算をはじめて1周期目の状態である。一見してわかるように、分割が粗くなるほど精度が悪くなっている。特に $(\Delta t/\Delta x)C$ が1より大きい時には極端に悪くなるようである。この様子を定量的に見るために、解析誤差の指標として次の値 ϵ をとる。

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - x_i)^2}{n}} / X_{\max} \dots \dots \dots (9)$$

ここに、 X_i は理論値、 x_i は計算値であり、 $X_{\max}$ は理論値の最大値(振幅)を表す。この指標を用いて図—5の状態における精度を比較した結果が図—6に示されている。計算点数は少ないが、この図から次のことが結



図—6

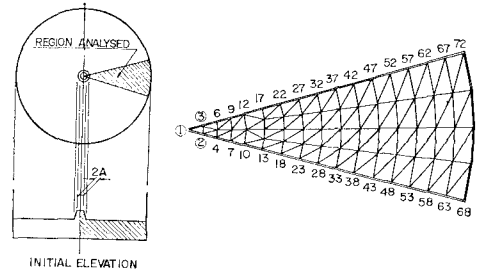
論される。

- $\Delta x/L$ を一定にしたとき、計算精度はほぼ $(\Delta t/\Delta x)C$ に比例して悪くなる。
- $(\Delta t/\Delta x)C$ を一定にしたまま $\Delta x/L$ を小さくしても、ある程度以上は精度は良くなりにくい。
- 以上のことより、 $\Delta x/L=1/16 \sim 1/20$ 程度にとり、 $(\Delta x/\Delta t)C$ を1以下に押えておけば、実用上は十分の精度をもった解が得られるものと考えられる。

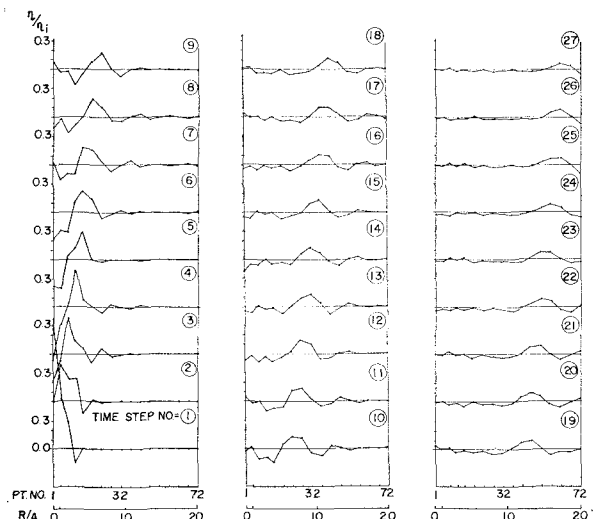
5. 数値解析例

本数値解析法の簡単な適用例として、水面じょう乱の伝播の問題を解析した。

図—7に示すように、円形水域の中央部で与えられた



図—7



図—8

じょう乱がどのように伝播していくか追跡する。現象が中心軸に関して軸対称であるので、図のような扇形領域についてのみ解析する。図-8 に1~72断面での波高分布の推移を示す。横軸は R/A で、 R は中心からの距離、 A は初期におけるじょう乱の半径である。孤立波の様相の波が波高を落しながら伝播していく様子が表われている。

図-9 には中心からの距離に対する最大波高の分布を示した。波の伝播に伴う波高の減衰と、波源からの距離との間に興味ある関係が得られた。今から約20年前、ピキ

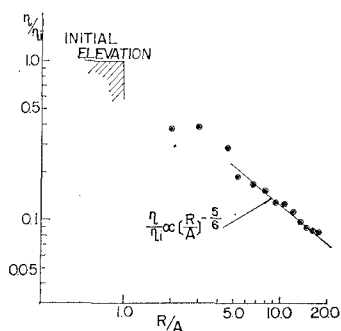


図-9

ニ環礁で行なわれた海中核爆発により発生した津波の観測記録によれば、水深の35倍より遠方では波高が $R^{-5/6}$ 則で減衰したことが報告されている⁹⁾。今回の計算結果はこの観測結果に良い一致を見た。海中爆発と今回の数値実験の初期条件との差異等、検討を要する問題を残しているが、この数値実験から示唆されるように、本数値解析法は差分法では扱い難い扇形水域等、特異な形状をした領域における波動解析に特に威力を発揮するものと考えられる。

6. あとがき

以上、有限要素法の波浪伝播解析への応用について述べた。

Δt と Δx の採り方によっては、差分法と同じく数値的不安定現象が生ずると予想される。解析精度の検討からは、 $\Delta t/\Delta x \leq 1/c$ および $\Delta x/L \leq 1/20$ 程度が必要なようである。有限要素法は、メッシュと境界条件の任意性によって例題のような任意形状の領域を一つの汎用プログラムで解析し得るが、その反面大次元のマトリックスを解く必要があり、この点は今後解決しなければならない問題である。

【補 遺】 波動方程式における有限要素法と差分法⁹⁾

従来変分原理に基づく有限要素法と微分方程式の直接近似たる差分法とは、それぞれ物理的近似と数学的近似として異質のものとされて来た。最近筆者はこの両者の間に等価性を認め、本質的には等価なものとして離散化手法の体系化を試みている。双曲型偏微分方程式たる波動方程式においても、Lax-Wendroff 法などいくつかの著名な差分スキームが実は有限要素法の観点から得られ

ることを示す。

簡単な次の波動方程式を考えよう。

$$\frac{\partial w}{\partial t} \pm c \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{または} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

ただし、 w は従属変数であり、 c は波速である。

図-10 (a) のような任意の三角形要素 klm を考え、要素内において w を面積座標 $L_i (i=k, l, m)$ の線形結合で表示する。

$$w = L_i w_i \quad (\text{総和規約})$$

このように仮定された w を用い、かつ変分原理に基づけば、節点変位 w_i の連立一次式を得る。

この場合要素の形状として特定のものを考えて見る。実際、図-10(b), (c), (d), (e), (f) のよう

な要素を考

えるならば、その結果は従来得られている各差分スキームとまったく一致する。

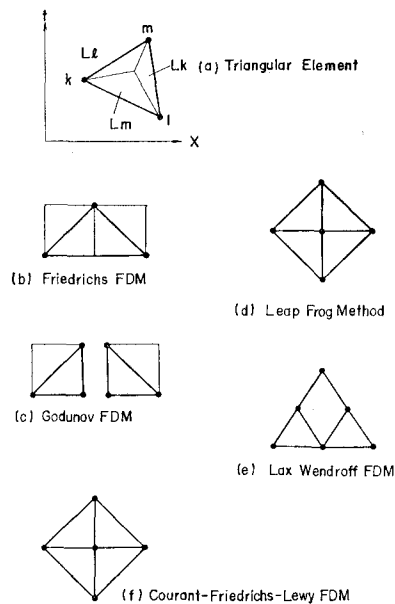


図-10

参考文献

- 運輸省港湾局調査設計事務所：長周期波に対する防波堤の効果に関する計算，pp. 47, 1962.
- 伊藤剛・日野幹雄・渡辺二郎・日野和子：数値模型による東京湾横断堤の防潮効果に関する研究，第11回海岸工学講演会講演集，p. 108~117, 1964.
- Zienkiewicz, O. C.: The finite element method in engineering science, McGraw-Hill, 1971.
- 坂井藤一：有限要素法に関する基礎的考察（第1報），マトリックス構造解析シンポジウム論文集，JSSC, 1973.
- 伊藤喜行・谷本勝利：数値波動解析法とその応用—構造物周辺の波—，第18回海岸工学講演会論文集，p. 67~70, 1971.
- 坂井藤一：有限要素法に関する基礎的考察（第2報—最小二乗変分原理の導入—），日本鋼構造協会 STAN 資料，1973.
- 坂井藤一・河合三四郎：有限要素法による表面波の数値解析，マトリックス構造解析シンポジウム論文集，JSSC, 1973.
- 石原藤次郎編：水工水理学，pp. 768, 丸善，1972.
- 坂井藤一：有限要素法と差分法の等価性およびある離散化手法，土木学会論文報告集 第220号，1973.