

数値モデルによる有限振幅波の研究

和田 明*

要 旨 浅海領域における波の運動はその有限振幅性のために必然的に非線形現象である。波の挙動を検討するために従来より、水理実験や簡単な数値モデルによる理論解析が行われてきた。本文は、浅海における有限振幅波の非定常運動について図-1に示す傾斜面へ遡上する孤立波の問題を Marker & Cell 法によって検討したものである。

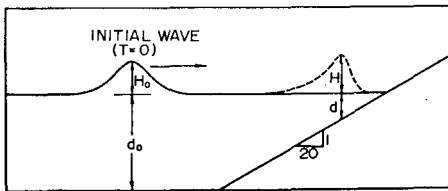


図-1 波のはい上りのモデル

1. まえがき

浅海における波の挙動を記述する非線形理論が数多く出ているにもかかわらず、実際の問題に対する応用性はこれらの理論における固有の制限や仮定によってかなりの制約を受ける。また多くの非線形解析理論は定常状態の解を論じている。しかし、浅海領域においては必然的に波の非定常過程の解明が必要とされる。現在のところ、浅海における波を計算するために、数値計算の手法が用いられ、非線形項もある程度含まれている。たとえば、よく知られている Stoker の“浅海波理論”においては、水深が変化する水域での2次元波の伝播状況は特性曲線法により計算できる¹⁾。この方法による計算は、静水圧分布ならびに任意の鉛直断面で水粒子が一様な速度をもつことが仮定される。海底地形の変化が孤立波の形状に及ぼす影響については、岸 (1962)²⁾、Mei & Le Méhauté (1966)³⁾、Peregrine (1967)⁴⁾、Madsen & Mei (1969)⁵⁾ らによって展開、検討されている。

Peregrine の方法の要点は、パラメーター ϵ (振幅と水深との比)、 σ (深さと波長との比) の冪の項で流体変数を展開し、これらの展開式を波動を支配する基本式である Euler の運動方程式へ代入し、連続方程式に境界条件を含ませるように変換することによってその解が求められる。この方程式の系は有限差分式によって解くことができる。Madsen & Mei は初期に設定する孤立波につ

いて Peregrine の方法を改良した初期条件を与え、Mei & Le Méhauté の基本式に基づいて特性曲線法を用いて傾斜面を遡上する孤立波の変形状態を解析している。

上述の方法はすべて基本式内の鉛直方向の現象変化をいわゆる積分効果として表現している。しかしながら、有限振幅波の挙動を検討するためには、圧力や速度の内部分布について考慮しなければならない。Chan & Street (1970) は、浅海における有限振幅波の非定常運動を解析するための計算手法を提示している⁶⁾。

本文においては、Chan らの計算手法を基本として、二、三の改良を加えて斜面上を遡上する波、特に孤立波の変形問題を数値解析し、既往の研究成果と対比比較して波の挙動について検討を加えたものである。

2. 基礎方程式と解法

波動を記述する基本式は、式 (1)、(2)、(3) から成り立っている。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + g_x + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} + g_y + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 x, y : 直交座標軸、 u, v : x, y 方向の流速成分、 ϕ : 圧力と密度との比 ($\phi \equiv p/\rho$)、 g_x, g_y : 物体加速度の x, y 成分、 ν : 動粘性係数。

これまで、非圧縮性流体の非定常運動を計算するために多くの手法が展開されてきた。一般には、流れの関数と渦度を用いて解く方法が用いられる。この方法には2つの利点がある。それはただ2つの従属変数だけが必要となることであり、質量が容易に保存されることである。しかし、流れの関数・渦度を用いるこの方法は3次元ならびに有限振幅波のような自由表面の変形が問題となる現象などへの適用がむずかしいことに欠点がある。

最近では上述の解法のほかに、流速成分 u, v と圧力 ϕ のまま計算をすすめ、同時に格子内に粒子を配置し、計算された u, v に従って粒子を移動させる Marker and

Cell 法(略して MAC 法)が考えられている。この MAC 法は Harlow と Welch により、自由表面のある流体や2種の流体の境界面の非定常運動の解析のために考慮された方法である。流れの場を格子網でおおい、各格子内に数多くの Marker particles を配置する。流れの場を表わす従属変数は圧力と流速成分の3個である。一般に行なわれる流れ関数と渦度方程式による方法より従属変数は多くなるが、より直接的な解法である。これらの Marker は流体の存在、2種の流体面の形状、流れの状況を示すために用いられる。

有限振幅波の運動を計算するのに、従来の MAC 法ではいろいろ問題点があることが、Chan & Street により指摘された。Chan らは、MAC 法によって計算不安定解が起こる原因は数値解のための安定理論が不十分なためではなく、振幅の大きい自由表面での境界条件の与え方によるとの結論を与えている。

MAC 法における流速(u, v)および圧力(ϕ)は、図-2 に示す位置で定義されている。式(1),(2)より u, v の新しい値を求めるためには、 ϕ の値が必要となる。圧力を算定するには

$$D \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \dots\dots\dots (4)$$

を定義するとき、連続条件より

$$D=0 \dots\dots\dots (5)$$

でなければならない。また式(1),(2)より、圧力に対する方程式は次式のように求められる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -R \dots\dots\dots (6)$$

ここに、

$$R \equiv \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 uv}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v^2}{\partial y^2} + \frac{\partial D}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (7)$$

式(1),(2),(6)および式(7)は MAC 法における基本方程式である。境界条件としては、(1) 壁のところでは、“free slip” 条件を用いる。すなわち、 $u^N, \partial u^T / \partial N = 0$ (u^N, u^T : それぞれ壁に垂直、平行な方向の流速成分)、(2) 自由表面での境界条件として、 $\phi = \phi_a$ を用いる。

上記の偏微分方程式を差分近似により解くための計算領域は、矩形状のセル群に分割される。各セルは流体で充ちたセル、流体を含まないセル、自由表面が存在するセル、壁のセルなどの名称をつけて区別されている。計

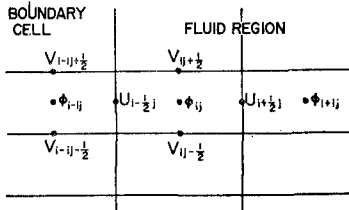


図-2 場の変数の配置

算手法については文献 7) に紹介してあるので、ここでは要点のみふれることにする。

本数値実験において、運動方程式(1),(2)の非線形項の差分における数値分散をなくすために Fromm (1968) が提唱した2次の upstream 差分方式⁸⁾を用いた。この Fromm の差分 scheme は速度分布の非物理的なひずみをなくし、また時間積分の過程における数値安定度を保証することが確認されている。

式(6)の数値反復解において、導入される誤差や差分近似に伴う固有の誤差および計算機による round off のために、式(7)における D 項は一般的にはゼロとされない。一方、連続関係式(5)より、 $D=0$ が必要なので差分式の $(n+1)$ 次項で $D_{ij}=0$ とする操作がこの MAC 法において行なわれる。本計算においては、自由水面の変化が問題となるので、一連のマーカー粒子を水面上に配置させた。

計算方法としては、最初に流速(u, v)の初期値を与える。自由表面の位置はわかっているのので、式(6)より圧力場が加速 Liebmann 法などの方法によって求められる。次にこの圧力を用いて u, v の新しい分布が式(1),(2)より求まる。同時にマーカー粒子を新しい位置へ移動させることによって新しい自由表面の形状が定まる。すなわち、

$$x_k^{n+1} = x_k^n + u_k \cdot \delta t, \quad y_k^{n+1} = y_k^n + v_k \cdot \delta t$$

ここに、 u_k, v_k は k 番目の粒子の流速成分、 u_k, v_k の値はそれぞれ u および v の

場から内挿することによって求まる。特に粒子が流速の最大(あるいは最小)付近にあるとき線形内挿式では誤差が大きくなる。図-3 の粒子 k の u_k の2次内挿流速成分 u_k は0点について Taylor 級数の展開することにより求められる。

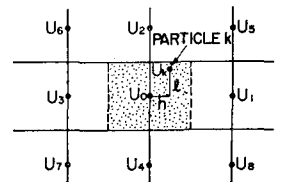
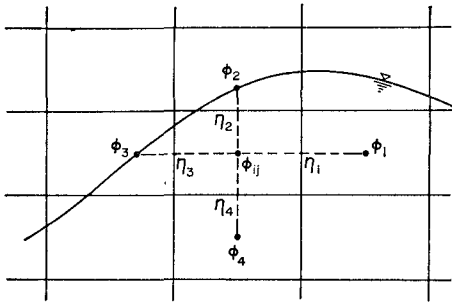


図-3 u_k の2次内挿流速成分 u_k は0点について Taylor 級数の展開することにより求められる。

$$\begin{aligned} u_k \approx & u_0 + \left(\frac{h}{\delta x} \right) \left(\frac{u_1 - u_3}{2} \right) + \left(\frac{l}{\delta y} \right) \left(\frac{u_2 - u_4}{2} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{h}{\delta x} \right)^2 (u_1 + u_3 - 2u_0) \right. \\ & + \left(\frac{l}{\delta y} \right)^2 (u_2 + u_4 - 2u_0) \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{\delta x} \right) \left(\frac{l}{\delta y} \right) (u_5 - u_6 + u_7 - u_8) \right] \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

また、自由表面近傍での圧力の計算方式としては、セルの中心とは一致していない自由表面境界上で $\phi = \phi_a$ と設定することが望ましい。そのために、図-4 の点 (i, j) に関して Taylor 級数展開し、点 (i, j) での圧力を式(9)のように精度よく求める方法を採用している。



図—4 曲線状境界面付近の圧力の算定

$$\phi_{ij} = \frac{\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4}{2(\eta_2 \eta_4 + \eta_1 \eta_3)} \left[\frac{\eta_3 \phi_1 + \eta_1 \phi_3}{\eta_1 \eta_3 (\eta_1 + \eta_3)/2} + \frac{\eta_4 \phi_2 + \eta_2 \phi_4}{\eta_2 \eta_4 (\eta_2 + \eta_4)/2} + R_{ij} \right] \dots\dots\dots (9)$$

この計算手法によって 図—1 の傾斜面を考えると、その取扱いがむずかしくなる。この問題については、一定勾配の斜面とセルの対角線が一致するような浜形状を設定することによって解決できる^{6),9)}。傾斜面上の流速成分および圧力は、それぞれセル内の運動量束の収支および質量保存関係を考慮することにより求められる。

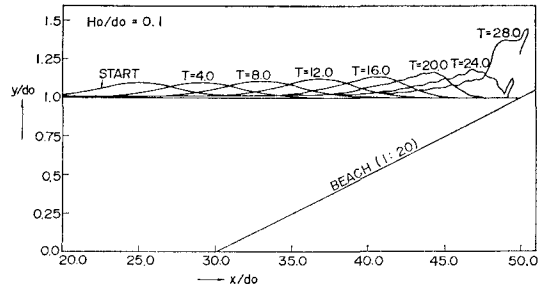
3. 計算結果とその考察

一定水深を有する海域から、傾斜面へ遡上する孤立波の場合を例として考えた(図—1 参照)。波の振幅の増幅率は傾斜面の勾配と同様に、初期の振幅にも依存すると考えられる。したがって、傾斜面の勾配としては $S=1$ (1:1) および 0.05 (1:20) の2通りの場合が考えられている。各セルの大きさは、前者の場合で $\delta x = \delta y = 0.2$ (計算時間間隔 $\delta t = 0.05$)、後者の場合で $\delta x = 1.0$, $\delta y = 0.05$ (計算時間間隔 $\delta t = 0.1$) である。初期の波の振幅としては、前者の場合 $H_0/d_0 = 0.48, 0.59$ の2ケース、後者の場合 $H_0/d_0 = 0.1, 0.2$ および 0.3 の3つのケースを考える。ここに、 H_0 は静水面上の孤立波の最大波高、 d_0 は海底が水平状態にある水域の静水深である。孤立波のクレストの初期の位置は 図—1 の左側の壁および右側の傾斜面の影響を受けないように設定してある。初期の波形として次式で表わされる Boussinesq の式を採用している。

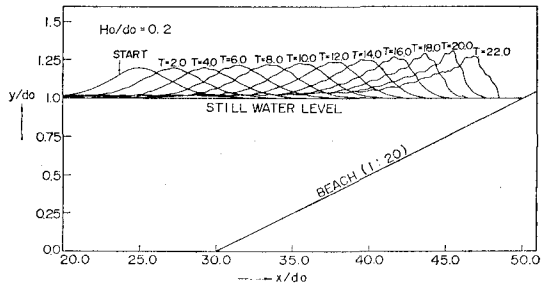
$$y_s(x) = d_0 + H_0 \cdot \text{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{3 \left(\frac{H_0}{d_0} \right)} \cdot \frac{x - x_0}{d_0} \right] \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 x_0 は波頂の座標を表わす。

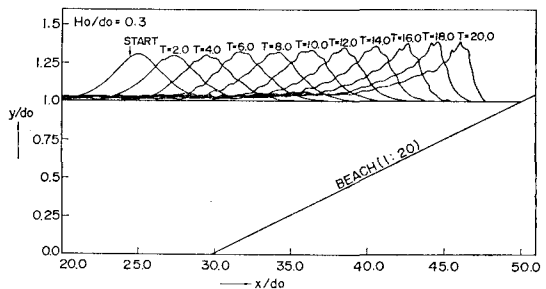
波が斜面上を遡上する各位置での波の形状が、 $H_0/d_0 = 0.1, 0.2$ および 0.3 の場合に対して、図—5 (a), (b) および (c) に示してある。これらの図から、波形が傾斜面上で徐々に対称性を失うことがわかる。すなわち、波のフロントはその背後部より大きな勾配を有している。波が斜面を遡上して汀線に接近するとき、波頂が急にと



(a) $H_0/d_0 = 0.1$



(b) $H_0/d_0 = 0.2$



(c) $H_0/d_0 = 0.3$

図—5 波 の 変 形

がり、前方へ巻き込む様相を呈する。この現象を計算不安定の面からみると、 $H_0/d_0 = 0.1, 0.2$ および 0.3 の場合、上述の現象が現われる地点は $x/d_0 = 46.9, 45.6$ および 44.6 の位置で H/d の値はそれぞれ 1.20, 1.40 および 1.44 となる。

図—6 は波頂下の流速成分 (u, v) および圧力 (p) に対する等値線の時間経過を示す。 u の最も外側の値は 0.05 である。 u の値は波のクレストに向かって 0.05 だけ増加させて描いてある。波頂下の u は 図—7 に示すように鉛直方向に一様に分布している。波が斜面上を遡上するとき、 u は一様に増加し、特に波が砕波点間近の $x/d_0 = 45.6$ 付近にあるとき、自由表面付近における u の著しい増加が観察される。図—8 は水路内各位置での静水圧分布を示したものであるが、斜面上の砕波点付近においてもほぼ静水圧に近い状態が認められる。

図—9 (a), (b) は斜面上の2つの断面における質量輸送現象を示したものである。すなわち、鉛直線上に流体粒子を3個配置させ、初期の位置 $x/d_0 = 30.0$ および

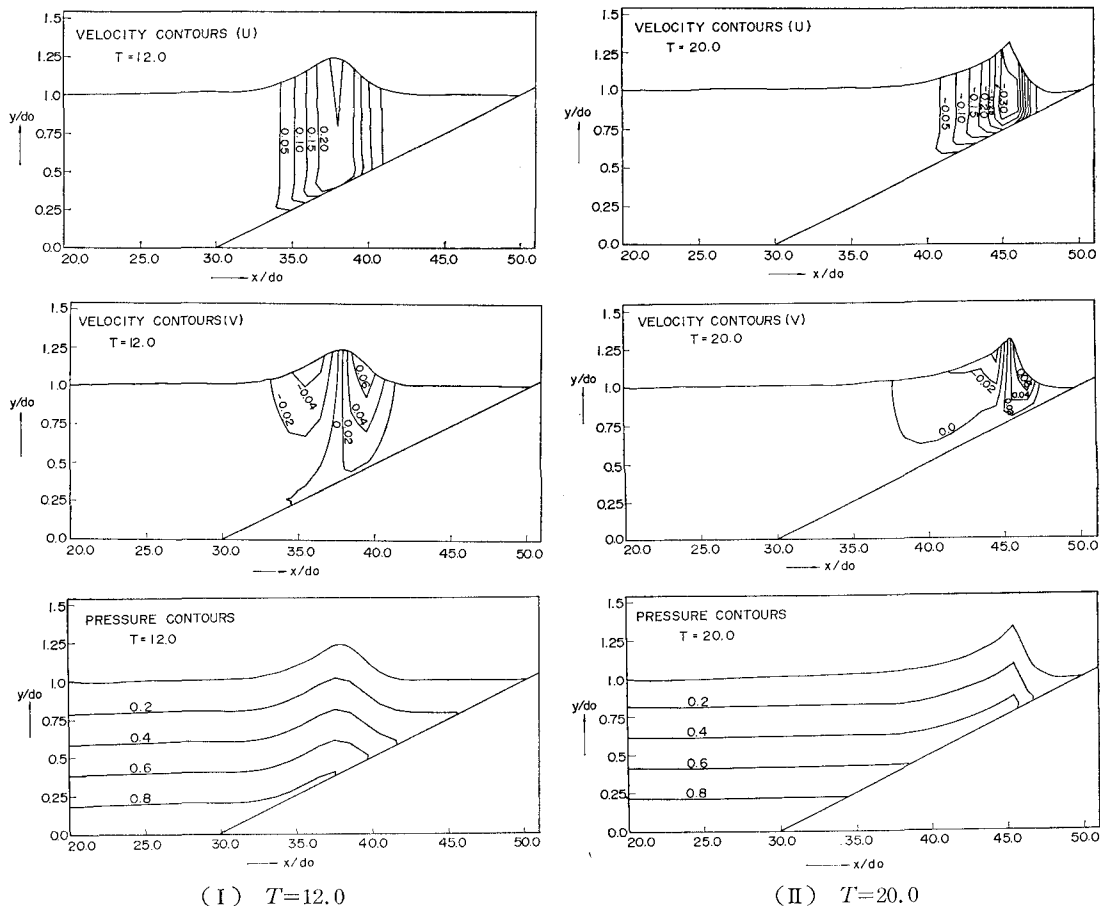


図-6 流速および圧力の分布

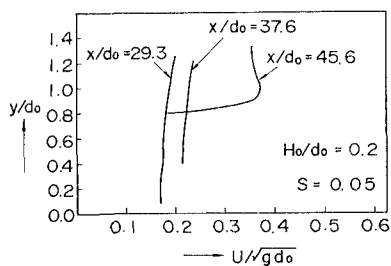
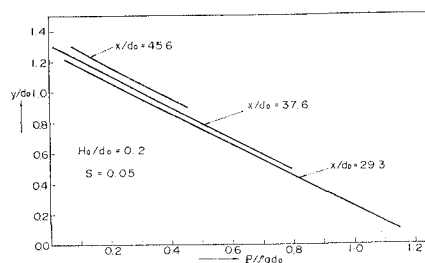
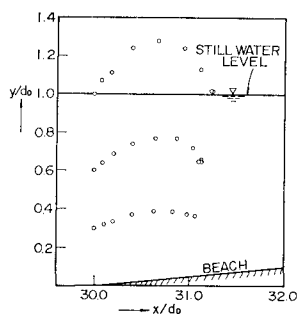
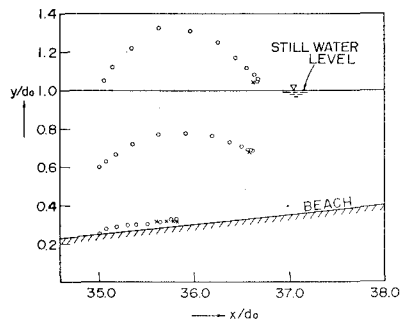
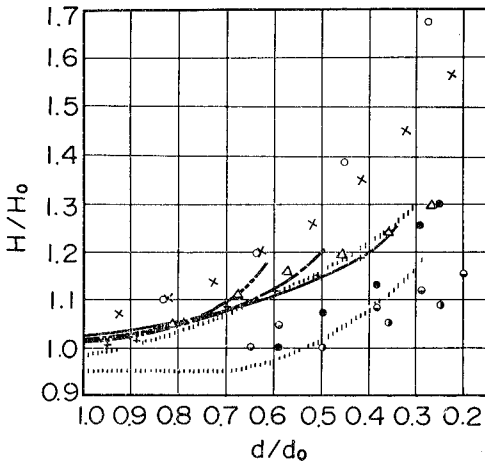
図-7 波頂下の u の分布

図-8 波頂下の圧力分布

(a) $x/d_0=30.0$ を始点とした場合(b) $x/d_0=35.0$ を始点とした場合図-9 1/20 勾配斜面上における水粒子の移動 ($H_0/d_0=0.30$)



図—10 浜勾配 1/20 の斜面を遡上する孤立波の変形特性

本数値実験 ($H_0/d_0=0.1$ (○印), 0.2 (×印), 0.3 (△印))
 Madsen & Mei の解析 ($H_0/d_0=0.1$ (—), 0.15 (---), 0.2 (- - - -))
 Peregrine の解析 ($H_0/d_0=0.1$ (+印))
 Ippen & Kulin による実験 ($H_0/d_0=0.25\sim0.68$)
 Kishi & Saeki による実験 ($H_0/d_0=0.043$ (●), 0.12 (●), 0.305 (●))

35.0 の 2 箇所から波の通過に伴う水粒子の移動状況がわかる。流体の質量輸送は周期波のような振動型におけるそれとは異なり、移流型の性質を有している。

浜勾配 1/20 の斜面を遡上する孤立波の変形について、水深の減少に伴う波高の増大状況を既往の研究結果とあわせて 図—10 に示す。数値実験においては、初期の波高・水深比を $H_0/d_0=0.1, 0.2$ および 0.3 の 3 ケースが考慮されている。数値実験の結果から、波が傾斜面に到達するとき、フロントの部分がけわしくなると同時に、振幅がわずかず増加し、斜面を遡上するにつれて振幅は H/d とともに増大すること、初期の振幅が小さいほど、水深の減少による波高の増大率が高いこと、従って孤立波の変形は初期振幅に依存することが確認された。

図には、本解析結果のほかに、Ippen & Kulin (1954)¹⁰⁾ および Kishi & Saeki (1966)¹¹⁾ の実験結果、Peregrine (1967) や Madsen & Mei (1969) の解析結果とあわせて示してある。ただ、Ippen & Kulin は各データについて H_0/d_0 の値を明示していない。従って図にはハッチでその範囲を記入してある。Peregrine の結果は、1/20 の浜勾配について、幾つかの初期振幅 ($H_0/d_0=0.05, 0.1, 0.15, 0.2$) に対する波高の変化を検討したものである。

この Peregrine の解析結果や Ippen & Kulin の実験によれば、初期振幅の違いによる波高増大に関する系統的变化はなく、また浜勾配が変化しても波高の変化を生じないことが結論されている。しかし Kishi & Saeki の実験結果から判断すると、初期の振幅・水深比 (H_0/d_0)

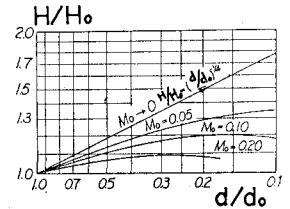
が大きくなるにつれて、振幅が増大する傾向がある程度認められる。もっとも、この実験は水路底部を粗面にした状態を対象としているので、摩擦の影響が卓越していてその振幅増大率は他の実験ならびに解析結果に比して小さくでている。

Madsen & Mei は初期振幅として $H_0/d_0=0.1, 0.15$ および 0.2 の 3 種類の孤立波の変形を計算しているが、図—10 に示すように、初期の波高・水深比が大きくなるにつれて斜面上の最大波高・水深比が大きくなる結果を得ている。これに反して、本数値実験より求めた結果は上述の傾向とは全く逆の結果を与えている。すなわち、波高増大率は 図—10 に示した既往の研究結果と比して大きめにでているばかりでなく、初期の波高・水深比が増大するにつれて、波高増大率が逆に小さくなる傾向を示している。

一方、Kishi (1962) は水深が変化する場合の長波の変形について検討した結果、本解析結果の傾向が生じることを確認している²⁾。Kishi は特性曲線法を適用して、水深が浅くなる場合の有限振幅長波の変形式を次のように与えている。

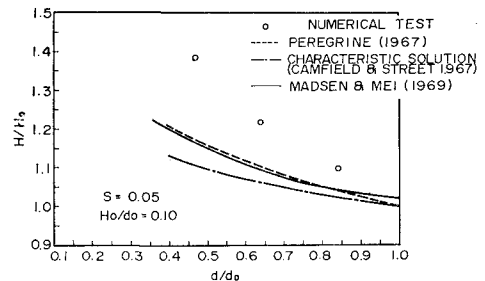
$$d = \left(\frac{\sqrt{1+M_0}-1}{\sqrt{1+M}-1} \right)^{4/5} \cdot \left(\frac{6\sqrt{1+M_0}-1}{6\sqrt{1+M}-1} \right)^{6/5} \dots (11)$$

ここに、 $M=H/d$, Suffix の 0 は初期波を表す。上式から求めた (H/H_0) と (d/d_0) の関係は 図—11 に示す。図によれば初期の波高水深比 M_0 が大きくなるに従って水深減少による波高の増大は少なくなる傾向にある。



図—11 海浜における長波の (H/H_0) と (d/d_0) との関係 (Kishi, 1962)

図—12 は斜面勾配が 1/20 の場合、初期の波高・水深比を $H_0/d_0=0.1$ と固定したときの (H/H_0) と (d/d_0) の関係を示す。Peregrine と Madsen & Mei の解析結果が比較的よく一致している。Street & Camfield (1966)¹²⁾ の特性曲線による解は、上記の 2 つ結果より小さくなっている。また本数値実験の結果は他の 3 つの解に比して非常に大きい波高増大率を示している。



図—12 $H_0/d_0=0.1$ に対する (H/H_0) と (d/d_0) との関係

傾斜面が 45° の勾配をもつとき、数値実験の結果から砕波が起こらないこと、ならびに孤立波の斜面上の最大上昇比が $R/d_0 \approx 1.2$ となることが確認された。ここに、 R は静水面から斜面上のはいり高さ、 d_0 は静水面より海底までの深さである。図-13 (a), (b), (c) および (d) はそれぞれ波の変形状態、流速の u, v 成分、圧力の分布を示したものである。この数値実験と水理実験との直接的な比較は実施しなかったが、Camfield et al の実験によれば $R/d_0 = 1.27$ の値が得られており、両者の結果はほぼ一致している。

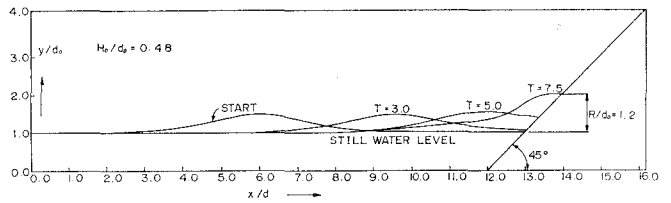
4. あとがき

本研究は、沿岸海域における密度躍層の内部波の挙動等を検討する目的で検討したものである。MAC 法の数値実験手法をこの種の問題へ適用する第一段階として表面波への適用を試みたものである。

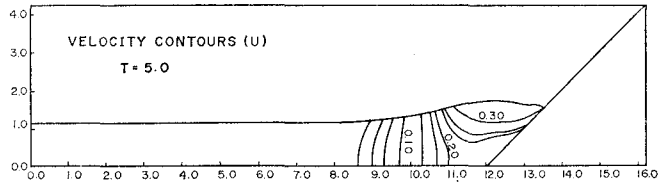
以上の結果によれば、本計算手法は一連の波の研究に対して適用可能であることを示すものである。この手法による計算結果は、必然的に Cathod Ray Tube スクリーン上に図を描いてこれを写真にとることができる¹³⁾。このようなディスプレイを用いたコンピューター・シミュレーションは、物理過程を追求する解析研究への根拠を提供することが期待できよう。最後に、本計算にご協力いただいた IBM Scientific Laboratory の方々に感謝の意を表します。

参 考 文 献

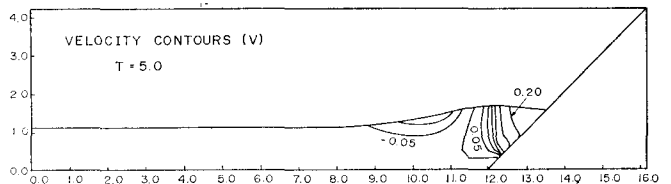
- 1) Stoker, J. J.: Water Waves, Interscience Publishers, Inc., New York.
- 2) Kishi, T.: Transformation, Breaking and Run-Up of a Long Wave of Finite Height, Proc. 8th Conf. on Coastal Eng., 1962.
- 3) Mei, C. C. & Le Méhauté, B.: Note on the equations of Long Waves over an Uneven Bottom, Jour. of Geophysical Research, Vol. 71, No. 2, 1966.
- 4) Peregrine, D. H.: Long Waves on a Beach, Jour. of Fluid Mechanics, Vol. 27, No. 4, Mar 1967.
- 5) Madsen, O. S. & Mei, C. C.: The Transformation of a Solitary Wave over an Uneven Bottom, Jour. of Fluid Mechanics, Vol. 39, No. 4, 1969.
- 6) Chan, R. K. C., Street, R. L. & Strelkoff, T.: Computer Studies of Finite-Amplitude Water Waves, Technical Report No. 104, Stanford University, 1969.
- 7) 和田 明: 沿岸海洋現象における 2, 3 のシミュレーション手法, 海洋科学, Vol. 5, 1972.
- 8) Fromm, J. E.: Practical Investigation of Convective Difference Approximation of Reduced Dispersion, IBM Research Report, RJ 531, 1968.
- 9) Viacelli, J. A.: A Method for Including Arbitrary External Boundaries in the MAC Incompressible Fluid Computing Technique, Jour. of Computational Physics, 4, 1969.
- 10) Ippen, A. T. & Kulin, G.: The Shoaling and Breaking of the Solitary Wave, Proc. of 5th Conference Coastal Eng., 1954.
- 11) Kishi, T. & Saeki, H.: The Shoaling, Breaking & Run-up of the Solitary Wave on Impermeable Rough Slopes, Proc. of 10th Conference Coastal Eng., 1966.
- 12) Street, R. L. & Camfield, F. E.: Observations and Experiments on Solitary Wave Deformation, Proc. of 10th Conference on Coastal Eng., 1966.
- 13) Fromm, J. E. & Schreiber, D. E.: System Aspects of Large Scale Problem Computation and Display, IBM System Journal, 1972.



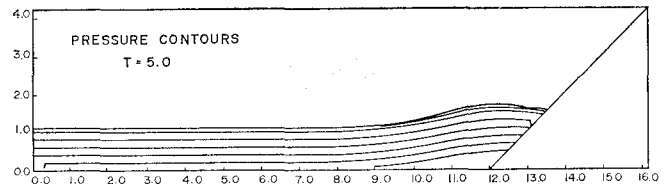
(a)



(b)



(c)



(d)

図-13