

固定された海上構造物による波の反射と透過

—Green 関数による理論解—

日 野 幹 雄*・藤 崎 治 男**

要 旨 海面上に設置された平板による、進行波の反射と透過の問題を 2 次元の問題として Green 関数を用いて解いた。すなわち、Green 関数 G と散乱波の速度ポテンシャル ϕ_{sc} とに関する 1 個の積分方程式を導き、 ϕ_{sc} を級数展開して Galerkin 法により係数を定めて、波の反射率と透過率を計算した。終りに、この方法が 3 次元問題にも応用できることを簡単に示した。

1. 結 言

海上あるいは海中に設けられた種々の構造物により進行してきた波は、エネルギーの一部は反射され、一部は透過し、同時に構造物に波力を及ぼす。

このような問題は速度ポテンシャルを仮定して、ラプラス方程式の境界値問題として古くから種々の方法によって解かれている。

それらの方法として、(i) 水中物体により分けられた領域間の接界面での流速分布関数を仮定して、積分方程式を導く方法、(ii) 各領域の速度ポテンシャルを固有関数の級数に展開して、係数を求める方法、(iii) Wave guide theory と変分法を応用する方法、(iv) Reduced potential の導入による Riemann-Hilbert 問題として解く方法、(v) Green 関数を利用する方法、などがある¹⁾。

本論文では(v)の方法を用いて、海面上に平板を浮かべた場合の進行波の反射率 $R=H_r/H_i$ 、透過率 $T=H_t/H_i$ を 2 次元の場合について求めてみた。

まず、海中の点 (ξ, η) に吹出しをもち、平板がないときの速度ポテンシャルを Green 関数 $G(x, y; \xi, \eta)$ とし、この Green 関数と、散乱波の速度ポテンシャル $\phi_{sc}(x, y)$ の間に、Green の定理を用いて積分方程式を導いた。次にこの ϕ_{sc} を Fourier 級数に展開して、Galerkin 法により係数を定めた。こうして最後に、 $x \rightarrow \pm \infty$ の ϕ_{sc} を求めて、 R, T を計算した。

筆者の解法の特徴は Green 関数を用いることにより、 ϕ_{sc} に関する 1 個の積分方程式を導き、 ϕ_{sc} を 1 個の級数に展開して、Galerkin 法を用いることによって、反射率と透過率を計算したことである。さらに、この方法は

3 次元への拡張が比較的容易であることが大きな特徴であって、終りのほうで 3 次元問題の解法を簡単に示しておいた。なお、これと同じ 2 次元の問題は、(ii)の方法を用いて井島がすでに解いている²⁾。

2. 基礎方程式

理論展開にあたっては、2 次元の非回転完全流体の微小振幅波理論が適用できるものとする。水深 h の海面上に、幅 $2l$ の剛体板が固定されているものとして図-1 のように x - y 座標軸をとる。このとき、 x の正方向から振幅 H_{in} の入射波がやってきて、平板の存在により反射波と透過波に分かれるものとする。入射波の速度ポテンシャルを $\bar{\phi}_{in}$ 、散乱波の速度ポテンシャルを ϕ_{sc} とすると、総ポテンシャルは $\bar{\phi}_{in} + \phi_{sc}$ となる。

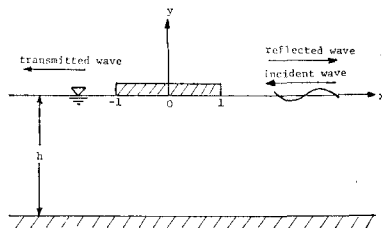


図-1

簡単のため、速度ポテンシャルを

$$\left. \begin{aligned} \phi_{sc}(x, y, t) &= \phi(x, y)e^{i\sigma t} \\ \bar{\phi}_{in}(x, y, t) &= \bar{\phi}(x, y)e^{i\sigma t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

として、時間要素を抜いた、 $\phi(x, y)$ 、 $\bar{\phi}(x, y)$ について考えるものとする。 σ は振動数である。

したがって、 $\phi(x, y)$ は Laplace の方程式を満足する。

$$\nabla^2 \phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$$

$$(-\infty < x < +\infty, -h \leq y \leq 0) \dots\dots\dots (2)$$

このとき、任意の点における総ポテンシャルは、 $\bar{\phi} + \phi$ となる。境界条件は次のようになる。

$$\phi_y = 0 \quad y = -h \dots\dots\dots (3)$$

$$\phi_y = -\bar{\phi}_y = -\lambda \bar{\phi} \quad y = 0, |x| < l \dots\dots\dots (4)$$

$$\phi_y = \lambda \phi \quad y = 0, |x| > l \dots\dots\dots (5)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - ik\phi \right) = 0 \quad (r = |x|) \dots\dots\dots (6)$$

ただし、 $\lambda = \sigma^2/g$ である。ここで式 (6) は、いわゆる

* 正 会 員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科

** 学生会員 東京工業大学大学院 工学研究科

Sommerfeld の Radiation Condition であって、無限遠方の ϕ の状態を規定するものである。また x の正方向からの入射波を次のように表わす。

$$\bar{\phi}(x, y)e^{i\sigma t} = \frac{igH_{in} \cosh k(y+h)}{\sigma \cosh kh} e^{i(kx+\sigma t)} \quad (7)$$

ただし、 k は波数を表わし、次の方程式から求まる実正数である。

$$k \tanh kh = \lambda \quad (k > 0) \quad (8)$$

式(7)は次の方程式を満足している。

$$\nabla^2 \bar{\phi} = \bar{\phi}_{xx} + \bar{\phi}_{yy} = 0 \quad (9)$$

$$\bar{\phi}_y = 0 \quad y = -h \quad (10)$$

$$\bar{\phi}_y = \lambda \bar{\phi} \quad y = 0 \quad (11)$$

3. Green 関数

Green 関数 $G(x, y; \xi, \eta)$ を以下のように定義する。

$$\nabla^2 G = G_{xx} + G_{yy} = \delta(x-\xi)\delta(y-\eta) \quad (-\infty < x, \xi < +\infty, -h \leq y, \eta \leq 0) \quad (12)$$

ここで、 $\delta(x-\xi)$ 、 $\delta(y-\eta)$ はそれぞれ $x=\xi$ 、 $y=\eta$ において特異性を示す Dirac の Delta 関数である。

境界条件は次のとおりである。

$$G_y = 0 \quad y = -h \quad (13)$$

$$G_y = \lambda G \quad y = 0 \quad (14)$$

$$G - \frac{1}{2\pi} \log R \text{ は } R=0 \text{ に対して正則} \quad (15)$$

$$(R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial G}{\partial r} - ikG \right) = 0 \quad (16)$$

$$(r = |x|)$$

これらの方程式を満足する Green 関数は、点 (ξ, η) に、source が存在する時の速度ポテンシャルに相当する。このような Green 関数は一意的に決まり、その解には種々の表示がある³⁾。ここでは、F. John, C. C. Mei らが導いた次のような無限級数の形を用いた⁴⁾。

$$\begin{aligned} G(x, y; \xi, \eta) &= ie^{-i k |x-\xi|} \frac{\tanh kh}{h\lambda + \sinh^2 kh} \cosh k(y+h) \\ &\quad \times \cosh k(\eta+h) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\nu_n |x-\xi|} \frac{\tan \nu_n h}{h\lambda - \sin^2 \nu_n h} \\ &\quad \times \cos \nu_n(y+h) \cos \nu_n(\eta+h) \quad (17) \end{aligned}$$

ただし、 k, ν_n は次の方程式から得られる実正根である。

$$\left. \begin{aligned} k \tanh kh &= \lambda \quad (k > 0) \\ \nu_n \tan \nu_n h &= -\lambda \quad (0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

4. 積分方程式の誘導

ここで、 $y=0$ 、 $y=-h$ 、 $x=r$ 、 $x=-r$ の4直線で囲まれた control volume において、散乱波の速度ポテン

シャル $\phi(x, y)$ と Green 関数 $G(x, y; \xi, \eta)$ とに2次元の Green の公式を適用する。 $r > l$ とする。

$$\iint_S (\phi \nabla^2 G - G \nabla^2 \phi) dS = \int_C (\phi G_n - G \phi_n) dC \quad (19)$$

点 (ξ, η) が control volume の内部にあるとすると、左辺は $\phi(\xi, \eta)$ となる。また、右辺は4直線上の線積分に分けられるので、式(19)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta) &= \phi_1(\xi, \eta) + \phi_2(\xi, \eta) + \phi_3(\xi, \eta) \\ &\quad + \phi_4(\xi, \eta) \quad (20) \end{aligned}$$

ただし、

$$\phi_1(\xi, \eta) = \int_{-r}^r [\phi G_y - G \phi_y]_{y=-h} dx = 0 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \phi_2(\xi, \eta) &= \int_{-r}^r [\phi G_y - G \phi_y]_{y=0} dx \\ &= \lambda \int_{-r}^r [(\phi + \bar{\phi}) G]_{y=0} dx \quad (22) \end{aligned}$$

$$\phi_3(\xi, \eta) = \int_{-h}^0 [\phi G_x - G \phi_x]_{x=r} dy \quad (23)$$

$$\phi_4(\xi, \eta) = \int_0^h [\phi G_x - G \phi_x]_{x=-r} dy \quad (24)$$

式(6)と(16)より $|x| \rightarrow +\infty$ のとき

$$\left. \begin{aligned} \phi_x &\simeq ik\phi \\ G_x &\simeq ikG \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

したがって、式(23)と(24)において

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} |\phi_3| = \lim_{r \rightarrow +\infty} |\phi_4| = 0 \quad (26)$$

以上より、 $r \rightarrow +\infty$ のとき式(20)は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta) &= -\lambda \int_{-l}^l \{ \phi(x, 0) + \bar{\phi}(x, 0) \} \\ &\quad \times G(x, 0; \xi, \eta) dx \quad (27) \end{aligned}$$

上式において、 $\bar{\phi}(x, 0)$ 、 $G(x, 0; \xi, \eta)$ は式(7)、(17)よりそれぞれ既知であるから、 $\phi(x, y)$ に関する積分方程式である。そこでまず $\eta=0$ とすると次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi(\xi, 0) &= -\lambda \int_{-l}^l \{ \phi(x, 0) + \bar{\phi}(x, 0) \} \\ &\quad \times G(x, 0; \xi, 0) dx \\ &\quad (-\infty < \xi < +\infty) \quad (28) \end{aligned}$$

式(28)において、適当な第1近似が求まれば、それを右辺に代入して、第2近似が求まる。原理的にはこの繰返しを続けることにより、任意の精度の $\phi(x, 0)$ 、 $(|x| < l)$ が求まる。このようにして求まった $\phi(x, 0)$ を式(27)の右辺に代入すれば、任意の点 (ξ, η) における速度ポテンシャル $\phi(\xi, \eta)$ 、 $(-\infty < \xi < +\infty, -h \leq \eta \leq 0)$ が求まる。

筆者らは式(28)の $\phi(x, 0)$ に Fourier 級数を仮定して、Galerkin 法により、 $\phi(x, 0)$ の近似解を求めた。さらに、この $\phi(x, 0)$ を式(28)の右辺に代入して、 $\xi \rightarrow \pm\infty$ におけるポテンシャル $\phi(\pm\infty)$ を計算して、 R 、

T を求めた。

5. 積分方程式の解法

式(28)を解くために、各値を次のように無次元化する。無次元量を $\tilde{x}$ 等と表示する。

$$\left. \begin{aligned} (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{h}, \tilde{l}) &= \lambda(x, y, \xi, \eta, h, l) \\ \tilde{t} &= \sigma t, \quad \tilde{\phi} = \frac{\sigma^3}{g^2} \phi, \quad \tilde{G} = G \\ \tilde{k} &= k/\lambda, \quad \tilde{\nu}_n = \nu_n/\lambda, \quad \tilde{\phi} = \frac{\sigma^3}{g^2} \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots(29)$$

ただし、 $\lambda = \sigma^2/g$ である。これらを使って書き直すと次のようになる。

$$\tilde{\phi}(\tilde{\xi}) + \int_{-1}^1 \{\tilde{\phi}(\tilde{x}) + \tilde{\phi}(\tilde{x})\} \tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{\xi}) d\tilde{x} = 0 \dots\dots(30)$$

ただし、両辺を H_{in} で割ってある。

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = i e^{i \tilde{k} \tilde{x}} \dots\dots\dots(31)$$

$$\tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_n e^{i \tilde{\nu}_n \tilde{x} - \tilde{\nu}_n \tilde{\xi}} \dots\dots\dots(32)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A}_n &= -\frac{1}{2} \frac{\sin 2 \tilde{\nu}_n \tilde{h}}{\tilde{h} - \sin^2 \tilde{\nu}_n \tilde{h}} \\ \tilde{d}_0 &= -i \tilde{k}, \quad \tilde{k} \tanh \tilde{k} \tilde{h} = 1 \\ \tilde{d}_n &= -\tilde{\nu}_n, \quad \tilde{\nu}_n \tan \tilde{\nu}_n \tilde{h} = -1 \\ \tilde{k}, \tilde{\nu}_n &\text{は実正数} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(33)$$

以下においては、簡単にするため $\tilde{x}$ 等を x 等と表わして、無次元量を意味するものとする。

式(30)の $\phi(\xi)$ を Galerkin 法により求める。そのために $\phi(\xi)$ を次のように Fourier 級数を仮定する。

$$\phi(\xi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m f_m(\xi) \dots\dots\dots(34)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} f_m(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{i \frac{2m\pi}{l} \xi} \\ C_m &\text{は } \xi \text{ に無関係な定数} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

ここにおいて、 $f_m(\xi)$ は区間 $[-l, l]$ で、次のように正規直交系をなしている。

$$\int_{-l}^l f_m(\xi) f_n(\xi) d\xi = \begin{cases} 1 & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \dots\dots\dots(36)$$

式(34)を式(30)に代入する。

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m f_m(\xi) + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_j \int_{-l}^l f_j(x) G(x, \xi) dx + \int_{-l}^l \bar{\phi}(x) G(x, \xi) dx = 0 \dots\dots\dots(37)$$

上式の両辺に $f_m(\xi)$ をかけて、区間 $[-l, l]$ において積分する。

$$C_{-m} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_j \varepsilon'_{jm} + \theta_m = 0 \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \dots\dots\dots(38)$$

ここにおいて、 ε'_{jm} , θ_m は次の積分で計算される定数である。

$$\varepsilon'_{jm} = \int_{-l}^l \int_{-l}^l f_m(\xi) f_j(x) G(x, \xi) dx d\xi \dots\dots\dots(39)$$

$$\theta_m = \int_{-l}^l \int_{-l}^l f_m(\xi) \bar{\phi}(x) G(x, \xi) dx d\xi \dots\dots\dots(40)$$

式(31), (32), (34)を代入して計算する。

$$\begin{aligned} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_j \varepsilon'_{jm} &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_j \int_{-l}^l \int_{-l}^l f_m(\xi) f_j(x) G(x, \xi) dx d\xi \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_j \int_{-l}^l f_j(x) (\alpha_m f_m(x) + \beta_m e^{-d_n x} + \gamma_m e^{d_n x}) dx \\ &= \alpha_m C_{-m} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{jm} C_j \dots\dots\dots(41) \end{aligned}$$

ただし、 α_m , β_m , γ_m , ε_{jm} は定数である。

したがって、 $1 + \alpha_m = \delta_m$ とおけば、式(38)は次のようになる。

$$\delta_m C_{-m} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{jm} C_j + \theta_m = 0 \dots\dots\dots(42)$$

$(m=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

δ_m , ε_{jm} , θ_m の値はおの次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta_m &= 1 - 2l^2 \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \frac{d_n}{4m^2\pi^2 + d_n^2 l^2} \\ \varepsilon_{jm} &= l \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \frac{(4mj\pi^2 + d_n^2 l^2)(e^{2d_n l} - 1)}{(4m^2\pi^2 + d_n^2 l^2)(4j^2\pi^2 + d_n^2 l^2)} \\ \theta_m &= i \sqrt{\frac{2l}{2m\pi + kl}} \sin kl (\delta_m - 1) + \sqrt{2l} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n e^{d_n l} E_n \\ &\dots\dots\dots(43) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{\sin 2kl}{2k(2m\pi - kl)} - \frac{l}{2m\pi + kl} \\ E_n &= -2i \{ (k\nu_n l - 2m\pi\nu_n) \sin kl \cosh \nu_n l \\ &\quad + (2m\pi k + \nu_n^2 l) \cos kl \sinh \nu_n l \} \\ &\quad / \{ (k^2 + \nu_n^2)(4m^2\pi^2 + \nu_n^2 l^2) \} \quad (n \geq 1) \dots\dots(44) \end{aligned}$$

以上より式(42)で、 m, j の値を同じ範囲の有限値にとどめれば、係数 C_m に関する連立1次方程式ができて C_m が求まる。こうして式(34)より、 $|\xi| < l$ における $\phi(\xi)$ が求まる。この $\phi(\xi)$ を式(30)の被積分関数に代入して、 $|\xi| > l$ における $\phi(\xi)$ が求まる。ここでは、 $\xi \rightarrow \pm\infty$ における $\phi(\pm\infty)$ を計算する。ただし、 $\xi \rightarrow \pm\infty$ においては、

$$G(x, \xi) \rightarrow A_0^{-ik|x-\xi|} \dots\dots\dots(45)$$

となることを利用する。

$\xi \rightarrow +\infty$ のとき

$$\begin{aligned} \phi(+\infty) &= \left[-A_0 \int_{-l}^l \{ \phi(x) + \bar{\phi}(x) \} e^{ikx} dx \right] e^{-ik\xi} \\ &= -A_0 \left\{ \sqrt{2l} \sin kl \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{C_m}{2m\pi + kl} \right. \\ &\quad \left. + i \frac{\sin 2kl}{k} \right\} e^{-ik\xi} \dots\dots\dots(46) \end{aligned}$$

$\xi \rightarrow -\infty$ のとき

$$\begin{aligned} \phi(-\infty) &= \left[-A_0 \int_{-l}^l \{ \phi(x) + \bar{\phi}(x) \} e^{-ikx} dx \right] e^{ik\xi} \\ &= -A_0 \left\{ -\sqrt{2l} \sin kl \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{C_m}{2m\pi - kl} \right. \end{aligned}$$

表-1 2 項の場合

l/h	$(\sigma^2/g) \cdot h$	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.5	2.0
0.1	R	0.034	0.051	0.081	0.113	0.147	0.185	0.227	0.295	0.409
	T	0.999	0.999	0.997	0.994	0.989	0.983	0.974	0.955	0.912
	R^2+T^2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.2	R	0.067	0.101	0.161	0.222	0.286	0.353	0.419	0.510	0.615
	T	0.998	0.995	0.987	0.975	0.958	0.936	0.908	0.861	0.791
	R^2+T^2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.001	1.004
0.5	R	0.163	0.235	0.343	0.434	0.481	0.515	0.527	0.507	0.437
	T	0.987	0.972	0.939	0.907	0.881	0.869	0.878	0.942	1.195
	R^2+T^2	1.000	1.000	1.000	1.002	1.008	1.021	1.049	1.144	1.619
1.0	R	0.285	0.360	0.398	0.361	0.301	0.302			
	T	0.959	0.934	0.932	0.991	1.111	1.300	*	*	*
	R^2+T^2	1.000	1.003	1.026	1.112	1.329	1.781			
1.5	R	0.347	0.361	0.255	0.269					
	T	0.939	0.946	1.079	1.328	*	*	*	*	*
	R^2+T^2	1.003	1.026	1.229	1.837					

表-2 5 項の場合

l/h	$(\sigma^2/g) \cdot h$	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.5	2.0
0.1	R	0.034	0.051	0.081	0.113	0.147	0.185	0.227	0.295	0.409
	T	0.999	0.997	0.993	0.987	0.978	0.965	0.948	0.912	0.829
	R^2+T^2	0.999	0.997	0.993	0.987	0.979	0.967	0.950	0.919	0.854
0.2	R	0.067	0.101	0.161	0.222	0.286	0.353	0.419	0.509	0.615
	T	0.995	0.990	0.974	0.950	0.916	0.872	0.817	0.727	0.614
	R^2+T^2	0.995	0.990	0.974	0.951	0.921	0.884	0.843	0.787	0.755
0.5	R	0.163	0.235	0.343	0.423	0.480	0.513	0.522	0.495	0.406
	T	0.974	0.943	0.873	0.801	0.739	0.701	0.697	0.743	0.843
	R^2+T^2	0.973	0.944	0.881	0.821	0.776	0.755	0.758	0.796	0.875
1.0	R	0.284	0.360	0.395	0.351	0.280	0.277	0.429	0.781	
	T	0.913	0.853	0.794	0.788	0.800	0.797	0.763	0.678	*
	R^2+T^2	0.916	0.857	0.786	0.744	0.719	0.712	0.765	1.070	
1.5	R	0.347	0.359	0.238	0.253	0.520	0.783			
	T	0.861	0.823	0.826	0.808	0.748	0.676	*	*	*
	R^2+T^2	0.863	0.805	0.739	0.717	0.830	1.070			

$+2li \} e^{ik\xi} \dots\dots\dots (47)$

$|\bar{\phi}|=1$ であるから、反射率 R と透過率 T は次のように計算される。

$$\left. \begin{aligned} R &= |\phi(+\infty)| \\ T &= |\phi(-\infty) + \bar{\phi}| \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (48)$$

6. 数値計算

無次元化した水深 $(\sigma^2/g) \cdot h$ が、0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.5, 2.0 の値をとり、板幅の半分と水深の比 l/h が、0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 1.5 の値をとる場合について、それぞれ反射率 R と透過率 T および $R^2 + T^2$ を求めてみた。

その際、 $\phi(\xi)$ の級数を、2 項 ($m=0, 1$)、5 項 ($m=-2 \sim 2$) の場合について計算した (表-1, 2)。

エネルギー損失を考えていないので、 $R^2 + T^2 = 1$ となるべきである。 l/h が小さい場合には、比較的これが満

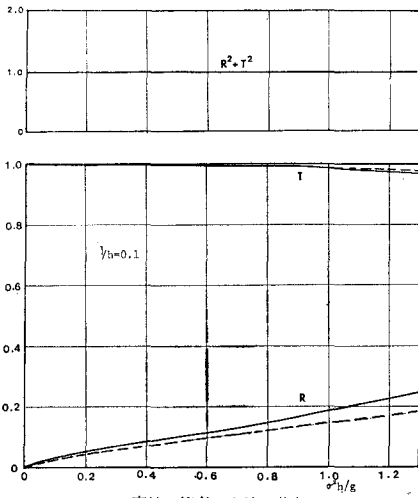
たされるが、 l/h および $(\sigma^2/g) \cdot h$ の増大につれて、 $R^2 + T^2$ が 1 からずれてきている。また項数の増加によっても計算結果があまり改善されない。

図-2 ～ 5 には 2 項で得られた結果が実線で示されている。井島の結果を点線で合わせ載せたが、 l/h が小さいときは近い曲線をなすが、 l/h が 1 以上になると、 $R^2 + T^2$ が 1 からずれている。これは式 (34) の級数展開が収束性の悪い Fourier 級数になっているためであり、他の級数を使うことにより、収束性をよくすることができる。

7. 3 次元問題への拡張

次に 3 次元の場合の解法を簡単に述べておく。これまでの方法に比べると、Green 関数を用いる筆者らの方法は比較的容易に 3 次元の問題を扱うのである。

(a) 水深 h の海面上に縦横がそれぞれ、 a, b の長方形の剛体板が固定されているものとする (図-6)。こ



実線：筆者 点線：井島
図-2

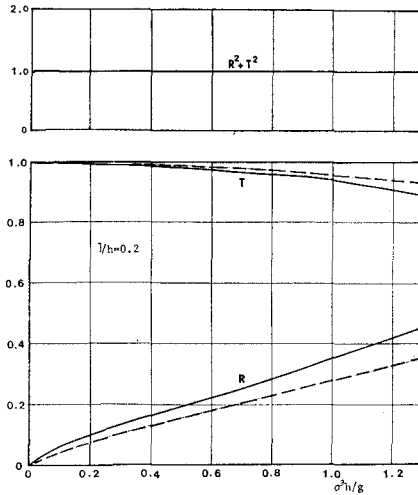


図-3

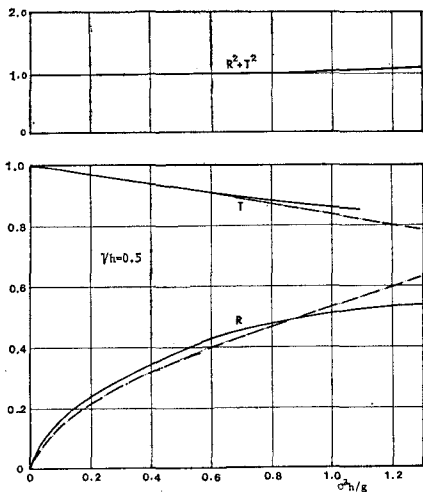


図-4

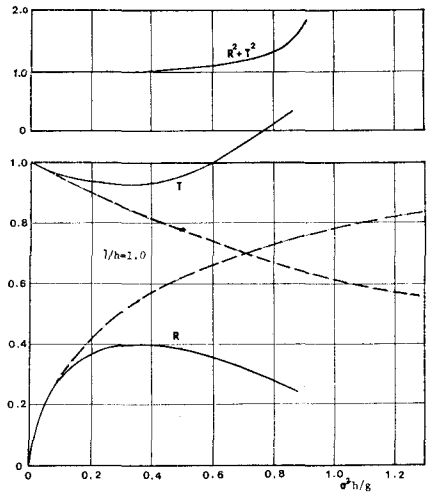


図-5

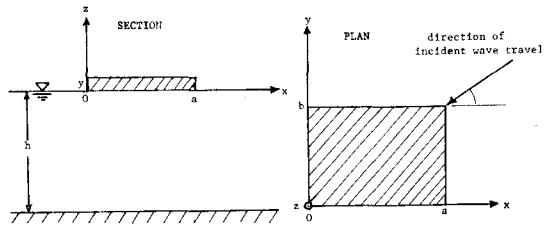


図-6

のとき x 軸の正方向と α の角をなす方向から、平面波 $\bar{\phi}_{in}(x, y, z, t) = \bar{\phi}(x, y, z)e^{i\sigma t}$ が入射してくると、平板の存在によって、入射波が散乱して、散乱波 $\phi_{sc}(x, y, z, t) = \phi(x, y, z)e^{i\sigma t}$ を生じる。総ポテンシャルは $\phi_{sc} + \bar{\phi}_{in}$ となる。このとき次の方程式が成り立つ。

$$\nabla^2 \phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0$$

$$(-\infty < x, y < +\infty, -h \leq z \leq 0) \dots\dots\dots (49)$$

境界条件は、次のようになる。

$$\phi_z = 0 \quad z = -h \dots\dots\dots (50)$$

$$\phi_z = -\bar{\phi}_z = -\frac{\sigma^2}{g}\bar{\phi} \quad z = 0, \text{ 平板内} \dots\dots\dots (51)$$

$$\phi_z = \frac{\sigma^2}{g}\phi \quad z = 0, \text{ 平板内} \dots\dots\dots (52)$$

$$\phi \propto e^{ikR} \quad R \rightarrow +\infty$$

$$(R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}) \dots\dots\dots (53)$$

また、 $\bar{\phi}(x, y, z)$ は次のように表わされる。

$$\bar{\phi}(x, y, z) = \frac{igH_{in}}{\sigma} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \times e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \dots\dots\dots (54)$$

(b) 3次元の場合の Green 関数 $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ は次のような方程式を満たす関数である。

$$\nabla^2 G = G_{xx} + G_{yy} + G_{zz} = \delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta)$$

$$(-\infty < x, y, \xi, \eta < +\infty, -h \leq z, \zeta \leq 0) \dots\dots\dots (55)$$

境界条件は次のとおりである。

$$G_z = 0 \quad z = -h \dots \dots \dots (56)$$

$$G_z = \frac{\sigma^2}{g} G \quad z = 0 \dots \dots \dots (57)$$

$$G - \frac{1}{4\pi r} \text{ は } -h \leq z \leq 0 \text{ のすべての領域で正則} \dots \dots \dots (58)$$

$$G \propto e^{ikR} \quad R \rightarrow +\infty \dots \dots \dots (59)$$

$$(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2})$$

$$(R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2})$$

これらを満たす Green 関数は一意的に決まり、その解の表示には種々のものがある³⁾。ここでは、F. John が導いた次のような無限級数の形を用いた⁴⁾。

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{i}{2} \frac{k^2 - \lambda^2}{h(k^2 - \lambda^2) + \lambda} H_0^{(1)}(kR) \cosh k(z+h) \times \cosh k(\zeta+h) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n^2 + \lambda^2}{h(\nu_n^2 + \lambda^2) - \lambda} K_0(\nu_n R) \times \cos \nu_n(z+h) \cos \nu_n(\zeta+h) \dots \dots \dots (60)$$

ここで、 $H_0^{(1)}(kR)$ 、 $K_0(\nu_n R)$ はそれぞれ、第1種 Hankel 関数、Modified Hankel 関数である。また、 k 、 ν_n はそれぞれ次の方程式の実正根である。

$$\left. \begin{aligned} k \tanh kh &= \lambda \\ \nu_n \tan \nu_n &= -\lambda \quad (0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (61)$$

ただし、 $\lambda = \frac{\sigma^2}{g}$ である。

(c) 水面 $z=0$ 、水底 $z=-h$ 、および z 軸を中心として、半径 R_0 の円筒側面とで囲まれる円筒を考える。散乱波の速度ポテンシャル $\phi(x, y, z)$ と、Green 関数 $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ との間に、この円筒内において、3次元の Green の公式を適用する。

$$\iiint_V (\phi \nabla^2 G - G \nabla^2 \phi) dV = \iint_S (\phi G_n - G \phi_n) dS \dots \dots \dots (62)$$

点 (ξ, η, ζ) が円筒内部にあるとすると、左辺は $\phi(\xi, \eta, \zeta)$ となる。また、 ϕ と G に課せられた境界条件を使い、 $R_0 \rightarrow +\infty$ とすることにより、右辺も簡単化し

て結局式(62)は次のようになる。

$$\phi(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{\sigma^2}{g} \iint_0^a \{ \phi(x, y, 0) + \bar{\phi}(x, y, 0) \} \times G(x, y, 0; \xi, \eta, \zeta) dx dy \dots \dots (63)$$

ここで、 $\zeta=0$ とおくと

$$\phi(\xi, \eta, 0) = -\frac{\sigma^2}{g} \iint_0^a \{ \phi(x, y, 0) + \bar{\phi}(x, y, 0) \} \times G(x, y, 0; \xi, \eta, 0) dx dy \dots \dots (64)$$

これは散乱波の速度ポテンシャル $\phi(x, y, 0)$ に関する積分方程式であり、これを解くことによって、海面上における総ポテンシャル $\phi(x, y, 0) + \bar{\phi}(x, y, 0)$ を求めることができる。

筆者らは、 $\phi(x, y, 0)$ を級数に展開して、Galerkin 法によって $\phi(x, y, 0)$ を求めてから、板周辺の波高分布を調べようとしている。

一般的には、この方法では長方形平板に限らず、任意の形の平板に対しても積分方程式を導くことができる。

8. 結 語

海面上の平板による反射と透過の問題を、Green 関数を用いることにより1個の積分方程式に帰着させ、Galerkin 法を用いてこの方程式を解いてみた。さらにこの方法が3次元の問題にも適用できることを簡単に示しておいた。

参 考 文 献

- 1) 浮防波堤調査研究グループ：浮防波堤に関する調査報告書第1編第1章，建設省・土木研究所，pp. 5-10, 1973.
- 2) 井島武士・他：水平板による防波堤と岸壁に関する理論的研究(2)，第17回海岸工学講演会論文集，PP. 97-106, 1970.
- 3) Wehausen, J. V. and Laitone, E. V.: Surface waves §13, Encyclopedia of Physics, Vol. 9, Fluid Dynamics III, pp. 475-479, 1960.
- 4) John, F.: On the Motion of Floating Bodies (II), Comm. Pure Appl. Math., Vol. 3, pp. 45-101, 1950.