

# 任意形状の透過および不透過防波堤による波の散乱と波力

井島武士\*・周宗仁\*\*・湯村やす\*\*\*・田淵幹修\*\*\*\*

## 1. はしがき

防波堤による波の散乱の問題は、直線防波堤としての Sommerfeld の解<sup>1)</sup>、橢円型島堤に対する合田の解<sup>2)</sup>、あるいは一般的な配置に対する伊藤の数値計算による解法<sup>3)</sup>などによって取扱われているが、いずれも複雑な関数表現あるいは数値計算を必要とするものであり、またすべて不透過堤体を対象とするもので、透過堤体に対する理論的取扱いはいまだ研究されていない。

本論文は Hwang & Tuck (1970)<sup>4)</sup> および Lee-Jiin Jen (1970)<sup>5)</sup> による Green 関数を用いた任意形状の港湾水域における波の分布に関する解析法を一般化し、堤体内の流体運動に対する抵抗が流速に比例すると仮定した場合の透過堤体による波の散乱を解析する方法を示し、不透過堤体の場合と比較して、堤体の透過性が波の回折を防止するにどのような効果があるかを調べたものである。ここでは簡単のため円形、橢円形および矩形の独立島堤の場合を例に示すが、この方法は任意形状の防波堤や港湾水域あるいはそれらの組合せに対しても拡張せられ、特に不透過堤体の場合については、従来のいずれの解法に比べても計算は著しく簡単であるという特徴をもっているのである。

## 2. 解析（透過堤体の場合）

水深一定  $h$  の海域に鉛直側面をもつ任意形状の堤体があり、角周波数  $\sigma (=2\pi/T, T$  は周期) の正弦波の入射を受けるとする。図-1 に示すように、静水面に座標原点  $0$ 、水平面内に  $x, y$  軸、鉛直上方に  $z$  軸を取り、堤体は  $x, y$  面内の閉曲線  $D$  によって示されるとする。流体域を堤外域 I と内域 II に分け、外域の流体運動は自由表面をもつ完全流体の微小振幅波運動、内域の運動は空げき率  $V$ 、単位質量の流体に対する抵抗は流速に比例しその係数が  $\mu$  であるような Darcy の流れであるとする、いずれの運動も  $\Phi(x, y, z) \cdot e^{-i\sigma t}$  の形の速度ポテンシャルをもち、 $\Phi$  は次の Laplace の方程式を満足する。

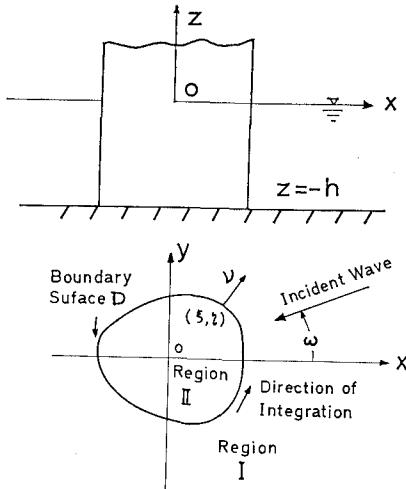


図-1 Definition Sketch

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots \quad (2.1)$$

(1) 外域 I の速度ポテンシャル  $\Phi_1(x, y, z)$

自由表面と水底条件（不透過水底）および radiation condition を満足する式 (2.1) の一般解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y, z) = & \frac{g\zeta_0}{\sigma} \left[ \left\{ f_0(x, y) + f_1(x, y) \right\} \cdot \right. \\ & \left. \cdot \frac{\cosh kh(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} f_2^{(n)}(x, y) \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \right] \end{aligned} \quad \dots \quad (2.2)$$

上式で  $g$  は重力の加速度、 $\zeta_0$  は入射波の振幅、 $k$  および  $k_n$  は次式で決まる固有値である。

$$kh \tanh kh = -k_n h \tan k_n h = \sigma^2 h / g, \quad$$

$$(n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots \quad (2.3)$$

また  $f_0(x, y)$ ,  $f_1(x, y)$ ,  $f_2^{(n)}(x, y)$  はそれぞれ入射波、反射波および散乱波を表わし、入射波を  $x$  軸と角度  $\omega$  をなして接近する余弦波形とすると波形は振幅を  $\zeta_0$  として

$$\zeta_I = \zeta_0 \cos\{k(x \cos \omega + y \sin \omega) + \sigma t\} \quad \dots \quad (2.4)$$

で表わされ、これに対する速度ポテンシャルとして  $f_0(x, y)$  は次のようにになる。

$$f_0(x, y) = -ie^{-ik(x \cos \omega + y \sin \omega)} \quad \dots \quad (2.5)$$

また  $f_1(x, y)$ ,  $f_2^{(n)}(x, y)$  は式 (2.1) により次の

\* 正会員 工博 九州大学教授 工学部水工土木学教室

\*\* 学生会員 九州大学大学院修士課程

\*\*\* 九州大学助手 工学部水工土木学教室

\*\*\*\* 正会員 熊本大学講師 工学部土木工学科

Helmholtz の方程式を満足すべき関数である。

(2) 内域IIの速度ポテンシャル  $\phi_2(x, y, z)$

堤体内域で自由表面と水底条件を満足する式(2.1)の一般解は次のように表わされる<sup>6)</sup>。

$$\varPhi_2(x, y, z) = \frac{g\zeta_0}{\sigma} \sum_{s=1}^{\infty} f_3^{(s)}(x, y) \frac{\cosh \tilde{k}_s(z+h)}{\cosh \tilde{k}_s h} \quad \dots \quad (2.7)$$

上式で  $s$  は整数,  $\tilde{k}_s$  は次式で決まる固有値である。

$f_3(s)(x, y)$  は式 (2.1) により次の方程式を満足すべき関数である。

(3)  $f_1, f_2^{(n)}$  および  $f_3^{(s)}$  の間の関係式

外域 I と内域 II の境界線 D 上の点を  $(\xi, \eta)$  で表わし、外域の任意点  $(x, y)$  との距離  $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$  を用い、 $r \rightarrow 0$ において  $\log r$  の order の特異性をもち、radiation condition を満足する式(2.6)の特解を、 $f_1$  に対して  $-\frac{i}{2}H_0^{(1)}(kr)$ 、 $f_2^{(n)}$  に対して  $-\frac{K_0(k_nr)}{\pi}$  と取ると、Green の定理によって、点  $(x, y)$  における  $f_1$  および  $f_2^{(n)}$  は、D 上の値  $f_1(\xi, \eta)$ 、 $f_2^{(n)}(\xi, \eta)$  と D に対する法線方向の勾配  $\partial f_1(\xi, \eta) / \partial \nu$ 、 $\partial f_2^{(n)}(\xi, \eta) / \partial \nu$  により次のように与えられる。

$$f_1(x, y) = -\frac{1}{2} \int_D \left[ f_1(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} \left( -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(kr) \right) - \left( -\frac{i}{2} k H_0^{(1)}(kr) \right) \cdot \frac{\partial f_1(\xi, \eta)}{\partial \nu} \right] ds \quad \dots \dots \dots \quad (2.10)$$

ここで  $H_0^{(1)}(kr)$  は 0 次の第 1 種ハンケル関数,  $K_0(kr)$  は 0 次の変形ペッセル関数である。 $\nu$  は境界面  $D$  における外向きの法線, また積分は  $D$  に沿って反時計回りに行なうものとする。

式 (2.10), (2.11)において、点  $(x, y)$  が  $D$  上の点  $(\xi', \eta')$  に接近する極限を考えると、 $H_0^{(1)}$  および  $K_0(k_nr)$  の特性異性から次の関係式が得られる。

$$f_1(\xi', \eta') = - \int_{\mathbb{R}} \left[ f_1(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left( -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(kR) \right) - \left( -\frac{i}{2} k H_0^{(1)}(kR) \right) \frac{\partial f_1(\xi, \eta)}{\partial \nu} \right] ds \quad \dots \dots \dots \quad (2.12)$$

$$f_2^{(n)}(\xi', \eta') = - \int_{\Omega} \left[ f_2^{(n)}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left( -\frac{K_0(k_n R)}{\pi} \right) - \left( -\frac{k K_0(k_n R)}{\pi} \right) \frac{\partial f_2^{(n)}(\xi, \eta)}{\partial \nu} \right] ds \dots \dots \dots \quad (2.13)$$

$$\text{よって } R = \sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2}$$

同様にして内域IIの任意点  $(x, y)$  における  $f_3^{(s)}$  の値は、 $D$  上の  $f_3^{(s)}(\xi, \eta)$  および  $\partial f_3^{(s)}(\xi, \eta) / \partial \nu$  により次のように与えられる。

$$f_3^{(s)}(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[ f_3^{(s)}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left( -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(\bar{k}_s r) \right) - \left( -\frac{i}{2} k H_0^{(1)}(\bar{k}_s r) \right) \frac{\partial f_3^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \nu} \right] ds \quad \dots \quad (2.14)$$

また式 (2.12), (2.13) に対応して次の関係式が得られる。

$$f_3^{(s)}(\xi', \eta') = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ f_3^{(s)}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left( -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(\bar{k}_s R) \right) - \left( -\frac{i}{2} k H_0^{(1)}(\bar{k}_s R) \right) \frac{\partial f_3^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right] ds \quad \dots \quad (2.15)$$

(4) 境界  $D$  における力学的連続性

境界面  $D$  上の任意点  $(\xi, \eta)$  においては、外域 I と内域 II の流体運動による mass flux と energy flux の連続性が成り立たねばならない。前者に対しては  $D$  に対する垂直流速の連続、後者は  $D$  上における流体圧力強度の連続性により満たされる。

外域および内域の流体圧力  $p_1$  および  $p_2$  はそれぞれ次式で与えられる。

したがって上記の連続条件は次のように表わされる。

上式に式 (2.2), (2.7) を代入すると次の関係式を得る。

$$\left[ \frac{\partial f_0(\xi, \eta)}{\partial \nu} + \frac{\partial f_1(\xi, \eta)}{\partial \nu} \right] \cosh \frac{k(z+h)}{kh} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial f_2^{(n)}(\xi, \eta)}{\partial \nu} \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\partial f_3^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \nu} \frac{\cosh \bar{k}_s(z+h)}{\cosh \bar{k}_s h} \dots (3.3)$$

$$\left[ f_0(\xi, \eta) + f_1(\xi, \eta) \right] \cosh \frac{(z+h)}{kh} + \sum_{n=1}^{\infty} f_2^{(n)}(\xi, \eta) \cdot \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} = \frac{1+i\mu V/\sigma}{V} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} f_3^{(s)}(\xi, \eta) \frac{\cosh \bar{k}_s(z+h)}{\cosh \bar{k}_s h} \dots (3.4)$$

$\cosh k(z+h), \cos k_n(z+h) (n=1, 2, 3\dots)$  が  $0 \geq z \geq -h$  で完全直交函数系であることにより、上式の各項に  $\cosh k(z+h)$  または  $\cos k_n(z+h)$  を乗じて積分すると、次の関係式を得る。

$$\left. \begin{aligned} f_1(\xi, \eta) &= - \left[ f_0(\xi, \eta) + \frac{\alpha}{N_0} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{f_3^{(s)}(\xi, \eta)}{1 - (\lambda_s/\lambda_0)^2} \right], & f_2^{(n)}(\xi, \eta) &= -\frac{\alpha}{N_n} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{f_3^{(s)}(\xi, \eta)}{1 + (\lambda_s/\lambda_n)^2} \\ \frac{\partial f_1(\xi, \eta)}{\partial \nu} &= - \left[ \frac{\partial f_0(\xi, \eta)}{\partial \nu} + \frac{\beta}{N_0} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\partial f_3^{(s)}(\xi, \eta)/k \partial \nu}{1 - (\lambda_s/\lambda_0)^2} \right], & \frac{\partial f_2^{(n)}(\xi, \eta)}{\partial \nu} &= -\frac{\beta}{N_n} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\partial f_3^{(s)}(\xi, \eta)/k \partial \nu}{1 + (\lambda_s/\lambda_n)^2} \end{aligned} \right\} \dots (3.5)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= i \frac{\mu}{\sigma} \left( 1 + i \frac{\mu V}{\sigma} \right), & \beta &= i \frac{\mu V}{\sigma}, & \lambda_0 &= kh, & \lambda_n &= k_n h, & \lambda_s &= \bar{k}_s h \\ N_0 &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2\lambda_0}{\sinh 2\lambda_0} \right), & N_n &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2\lambda_n}{\sin 2\lambda_n} \right) \end{aligned} \right\} \dots (3.6)$$

式 (3.5) を式 (2.12), (2.13) に代入すると  $f_3^{(s)}$  と  $\partial f_3^{(s)}/\partial \nu$  に関する次の方程式を得る。

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{1 - (\lambda_s/\lambda_0)^2} \left[ \alpha f_3^{(s)}(\xi', \eta') + \int_D \left\{ \alpha f_3^{(s)}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left( -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(kR) \right) - \beta \frac{\partial f_3^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \nu} \left( -\frac{i}{2} k H_0^{(1)}(kR) \right) \right\} ds \right] \\ = -N_0 \left[ f_0(\xi', \eta') + \int_D f_0(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left( -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(kR) \right) - \frac{\partial f_0(\xi, \eta)}{\partial \nu} \left( -\frac{i}{2} k H_0^{(1)}(kR) \right) \right] \dots (3.7)$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (\lambda_s/\lambda_n)^2} \left[ \alpha f_3^{(s)}(\xi', \eta') + \int_D \left\{ \alpha f_3^{(s)}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left( -\frac{1}{\pi} K_0(k_n R) \right) - \beta \frac{\partial f_3^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \nu} \left( -\frac{k}{\pi} K_0(k_n R) \right) \right\} ds \right] \\ = 0 \quad (n=1, 2, 3\dots) \dots (3.8)$$

式 (3.7), (3.8) は式 (2.15) とともに境界面上の  $f_3^{(s)}$  と  $\partial f_3^{(s)}/k \partial \nu$  の値を決定すべき積分方程式である。

### (5) 積分方程式の数値計算

任意の形の境界面  $D$  に対しては積分方程式 (2.15), (3.7), (3.8) を数値的に解かねばならない。そこで境界  $D$  を  $N$  個の点によって  $N$  個の短い要素  $\Delta s$  に分け、おのおの中点の座標  $(\xi_j, \eta_j)$  ( $j=1, 2, 3\dots, N$ ) をもって要素  $\Delta s_j$  上の  $f_3^{(s)}$  および  $\partial f_3^{(s)}/k \partial \nu$  の値を代表することができるようとする。するとたとえば

$$\int_D f_3^{(s)}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left( -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(kR) \right) ds = \sum_{j=1}^N f_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j) \cdot \int_{\Delta s_j} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(kR) \right) ds$$

とおくことができ、式 (2.15), (3.7), (3.8) はそれぞれ次のように和の形で表わすことができる。

$$f_3^{(s)}(\xi_i, \eta_i) - \sum_{j=1}^N \left\{ \bar{A}_{ij} f_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j) - A_{ij} \bar{f}_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j) \right\} = 0, \quad (s=1, 2, 3\dots) \dots (4.1)$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{1 - (\lambda_s/\lambda_0)^2} \left[ \alpha f_3^{(s)}(\xi_i, \eta_i) + \sum_{j=1}^N \left\{ \alpha \bar{A}_{ij} f_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j) - \beta A_{ij} \bar{f}_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j) \right\} \right] \\ = -N_0 \left[ f_0(\xi_j, \eta_j) + \sum_{j=1}^N \left\{ \bar{A}_{ij} f_0(\xi_j, \eta_j) - A_{ij} \bar{f}_0(\xi_j, \eta_j) \right\} \right] \dots (4.2)$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (\lambda_s/\lambda_n)^2} \left[ \alpha f_3^{(s)}(\xi_i, \eta_i) + \sum_{j=1}^N \left\{ \alpha \bar{C}_{ij} f_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j) - \beta C_{ij} \bar{f}_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j) \right\} \right] = 0, \quad (n=1, 2, 3\dots) \dots (4.3)$$

ここで  $\bar{f}_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j) = \partial f_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j)/k \partial \nu$ ,  $\bar{f}_0(\xi_j, \eta_j) = \partial f_0(\xi_j, \eta_j)/k \partial \nu$  ..... (4.4)

また  $\gamma = 0.577216$  (Euler の定数) として

$$\left. \begin{aligned} A_{ij} &= \int_{\Delta s_j} \left( -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(kR) \right) k ds = -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(kR) \cdot k \Delta s_j, & (i \neq j); \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \gamma - 1 + \log \frac{k \Delta s_i}{4} - i \frac{\pi}{2} \right) \cdot k \Delta s_i, & (i=j) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_{ij} &= \int_{\Delta s_j} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(kR) \right) ds = \frac{i}{2} H_1^{(1)}(kR) \cdot \left( \frac{\xi_j - \xi_i}{R} \cdot k \Delta \eta_j - \frac{\eta_j - \eta_i}{R} \cdot k \Delta \xi_j \right), & (i \neq j) \\ &= \frac{1}{2\pi} (\xi_s \eta_{ss} - \xi_{ss} \eta_s) \cdot \Delta s_i & (i=j) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 C_{ij}^{(n)} &= \int_{\Delta s_j} \left( -\frac{1}{\pi} K_0(k_n R) \right) k ds = -\frac{1}{\pi} K_0(k_n R) \cdot k \Delta s_j, & (i \neq j) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \gamma - 1 + \log \frac{k_n \Delta s_i}{4} \right) \cdot k \Delta s_i, & (i = j) \\
 C_{ij}^{(n)} &= \int_{\Delta s_j} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( -\frac{1}{\pi} K_0(k_n R) \right) ds = \frac{1}{\pi} K_1(k_n R) \cdot \left( \frac{\xi_j - \xi_i}{R} \cdot k_n \Delta \eta_j - \frac{\eta_j - \eta_i}{R} \cdot k_n \Delta \xi_j \right), & (i \neq j) \\
 &= \frac{1}{2\pi} (\xi_s \eta_{ss} - \xi_{ss} \eta_s) i \Delta s_i & (i = j) \\
 A_{ij}^{(s)} &= \int_{\Delta s_j} \left( -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(\bar{k}_s R) \right) k ds = -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(\bar{k}_s R) \cdot k \Delta s_j, & (i \neq j) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \gamma - 1 + \log \frac{\bar{k}_s \Delta s_t}{4} - i \frac{\pi}{2} \right) \cdot k \Delta s_i, & (i = j) \\
 \bar{A}_{ij}^{(s)} &= \int_{\Delta s_j} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(\bar{k}_s R) \right) ds = \frac{i}{2} H_1^{(1)}(\bar{k}_s R) \cdot \left( \frac{\xi_j - \xi_i}{R} \bar{k}_s \Delta \eta_j - \frac{\eta_j - \eta_i}{R} \bar{k}_s \Delta \xi_j \right), & (j \neq i) \\
 &= \frac{1}{2\pi} (\xi_s \eta_{ss} - \xi_{ss} \eta_s) i \Delta s_i & (i = j)
 \end{aligned} \right\} \dots \quad (4.5)$$

$R = \sqrt{(\xi_j - \xi_i)^2 + (\eta_j - \eta_i)^2}, \quad \Delta \xi_j = \frac{1}{2} (\xi_{j+1} - \xi_{j-1}), \quad \Delta \eta_j = \frac{1}{2} (\eta_{j+1} - \eta_{j-1})$   
 $\Delta s_j = \sqrt{(\Delta \xi_j)^2 + (\Delta \eta_j)^2}, \quad \Delta s_i = \sqrt{(\Delta \xi_i)^2 + (\Delta \eta_i)^2}, \quad \xi_s = (\xi_{i+1} - \xi_{i-1}) / 2 \Delta s_i$   
 $\eta_s = (\eta_{i+1} - \eta_{i-1}) / 2 \Delta s_i, \quad \xi_{ss} = \frac{6}{\Delta s_{i+1} + \Delta s_i + \Delta s_{i-1}} \cdot \left( \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\Delta s_{i+1} + \Delta s_i} - \frac{\xi_i - \xi_{i-1}}{\Delta s_i + \Delta s_{i-1}} \right)$   
 $\eta_{ss} = \frac{6}{\Delta s_{i+1} + \Delta s_i + \Delta s_{i-1}} \cdot \left( \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{\Delta s_{i+1} + \Delta s_i} - \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{\Delta s_i + \Delta s_{i-1}} \right)$

さらに式 (2.5) により

$$\left. \begin{aligned}
 f_0(\xi_j, \eta_j) &= -i e^{-i(k \xi_j \cos \omega + k \eta_j \sin \omega)} \\
 \bar{f}_0(\xi_j, \eta_j) &= \frac{\Delta \xi_j \sin \omega - \Delta \eta_j \cos \omega}{\Delta s_j} e^{-i(k \xi_j \cos \omega + k \eta_j \sin \omega)}
 \end{aligned} \right\} \dots \quad (4.6)$$

式 (4.1)～(4.2) は  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  のおのおのについて成立する。 $f_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j)$  および  $\bar{f}_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j)$  に関する連立方程式で、 $n$  および  $s$  をそれぞれ第  $n$  項および第  $s$  項まで取るとときは未知数は  $2sN$  個、方程式は  $(n+s+1)N$  個であるから、 $s=n+1$  とすれば、 $j=1, 2, 3, \dots$

…  $N$  に対するすべての  $f_3^{(s)}$  および  $\bar{f}_3^{(s)}$  が確定することになる。そして式 (3.5) により  $f_1, \bar{f}_1$  および  $f_2^{(n)}, \bar{f}_2^{(n)}$  が決まり、式 (2.10), (2.11) および (2.14) から外域 I および内域 II の任意点に対する  $f_1(x, y), f_2^{(n)}(x, y)$  および  $f_3^{(s)}(x, y)$  は次のように決まる。

$$\left. \begin{aligned}
 f_1(x, y) &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[ \bar{A}_{xj} f_1(\xi_j, \eta_j) - A_{xj} \bar{f}_1(\xi_j, \eta_j) \right] \\
 f_2^{(n)}(x, y) &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[ \bar{C}_{xj} f_2^{(n)}(\xi_j, \eta_j) - C_{xj} \bar{f}_2^{(n)}(\xi_j, \eta_j) \right] \\
 f_3^{(s)}(x, y) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[ \bar{A}_{xj} f_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j) - A_{xj} \bar{f}_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j) \right]
 \end{aligned} \right\} \dots \quad (4.7)$$

ここで  $A_{xj}, \bar{A}_{xj}, \dots$  は、 $A_{ij}, \bar{A}_{ij}, \dots$  における  $\xi_j, \eta_j$  の代りに  $x$  および  $y$  とおいた値を示す。

このようにして、各領域の任意点における速度ポテンシャルが確定する。

#### (6) 波高の分布および堤体に対する波力

外域および内域の任意点での水面波形はそれぞれ

$$\zeta_1 = i \zeta_0 \Phi_1(x, y, o) e^{-i \omega t}, \quad \zeta_2 = i \zeta_0 \frac{1 + i \mu V / \sigma}{V} \Phi_2(x, y, o) e^{-i \omega t} \dots \quad (5.1)$$

で与えられるから、各点での回折係数  $K_d$  は次のように式 (4.7) を用いて表わされる。

$$K_d^{(1)} = \left| f_0(x, y) + f_1(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} f_2^{(n)}(x, y) \right|, \quad K_d^{(2)} = \left| \frac{1 + i \mu V / \sigma}{V} \sum_{s=1}^{\infty} f_3^{(s)}(x, y) \right| \dots \quad (5.2)$$

また堤体に作用する  $x$  および  $y$  の正方向への流体圧力の合力  $F_x, F_y$  は次式によって求められる。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{F_x}{\rho g \zeta_0 h^2} &= -i e^{-i \omega t} \cdot \frac{\sigma^2 h}{g} \cdot \frac{(1 + i \mu V / \sigma)^2}{V} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N \frac{f_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j)}{\lambda_0(\lambda_s)^2} \cdot k \Delta \eta_j \\
 \frac{F_y}{\rho g \zeta_0 h^2} &= i e^{-i \omega t} \cdot \frac{\sigma^2 h}{g} \cdot \frac{(1 + i \mu V / \sigma)^2}{V} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N \frac{f_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j)}{\lambda_0(\lambda_s)^2} \cdot k \Delta \xi_j
 \end{aligned} \right\} \dots \quad (5.3)$$

### 3. 解析（不透過堤体の場合）

不透過堤体の場合は、流体域は外域 I のみで、その速

$$\Phi(x, y, z) = \frac{g\zeta_0}{\sigma} \left\{ f_0(x, y) + f_1(x, y) \right\} \cdot \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad \dots \dots \dots \quad (2.2')$$

境界線 D では法線方向の流速が零の条件から

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{したがって} \quad \frac{\partial f_1(\xi, \eta)}{\partial \nu} = -\frac{\partial f_0(\xi, \eta)}{\partial \nu} \quad \dots \dots \dots \quad (6.1)$$

この関係を式 (2.12) に代入し

$$f_1(\xi', \eta') + \int_D f_1(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left( -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(kR) \right) ds = - \int_D \left( -\frac{i}{2} k H_0^{(1)}(kR) \right) \frac{\partial f_0(\xi, \eta)}{\partial \nu} ds \quad \dots \dots \dots \quad (6.2)$$

の関係を得る。これが  $f_1$  に対する積分方程式である。

式 (4.5) の  $A_{ij}$  と  $\bar{A}_{ij}$ 、および式 (4.6) を用いて和の形に直すと、 $f_1$  に関する次の連立方程式となる。

$$f_1(\xi_i, \eta_j) + \sum_{j=1}^N \bar{A}_{ij} f_1(\xi_j, \eta_j) = \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{d\eta_j \cos \omega - d\xi_j \sin \omega}{ds_j} e^{-i(k\xi_i \cos \omega + k\eta_j \sin \omega)} \quad \dots \dots \dots \quad (6.3)$$

これを解いて  $f_1(\xi_j, \eta_j)$  が求まるとき、式 (2.10) により、任意点  $(x, y)$  における  $f_1(x, y)$  は次のように決まる。

$$f_1(x, y) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[ \bar{A}_{xj} f_1(\xi_j, \eta_j) + A_{xj} \bar{f}_0(\xi_j, \eta_j) \right] \quad \dots \dots \dots \quad (6.4)$$

点  $(x, y)$  における回折係数  $K_d$  は次のようにある。

$$K_d = |f_0(x, y) + f_1(x, y)| \quad \dots \dots \dots \quad (6.5)$$

また堤体に対する流体圧力の合力は式 (5.3) に対応して次のようにある。

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_x}{\rho g \zeta_0 h^2} &= -ie^{-i\omega t} \cdot \frac{\sigma^2 h}{g} \cdot \frac{1}{\lambda_0^3} \sum_{j=1}^N \left[ f_0(\xi_j, \eta_j) + f_1(\xi_j, \eta_j) \right] k d\eta_j \\ \frac{F_y}{\rho g \zeta_0 h^2} &= ie^{-i\omega t} \cdot \frac{\sigma^2 h}{g} \cdot \frac{1}{\lambda_0^3} \sum_{j=1}^N \left[ f_0(\xi_j, \eta_j) + f_1(\xi_j, \eta_j) \right] k d\xi_j \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (6.6)$$

### 4. 数値計算

例として半径  $b$  の円柱状堤体と  $y$  軸半径は  $b$  のままで  $x$  軸半径が  $0.5b$  の椭円形に変わった場合および一辺の長さが  $2b$  の正方形と  $x, y$  方向の辺長が  $2a$  および  $2b$  で  $a=0.5b$  の矩形に変わった場合について、 $\sigma^2 h/g = 0.25$  ( $kh = 0.522$ )、 $b/h = 1.0$ 、入射角  $\omega = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$

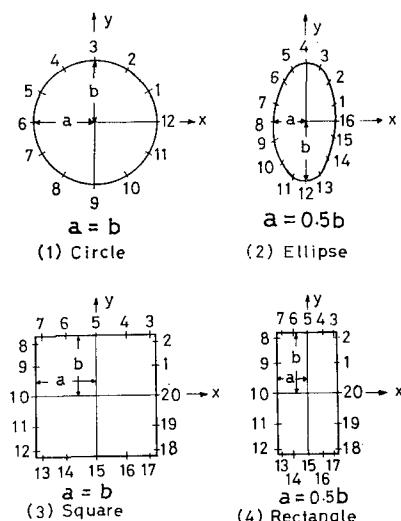


図-2 Distribution of Calculation Points

度ポテンシャルは式 (2.2) の散乱波の項  $f_2^{(n)}(x, y)$  が消えて、簡単に次のようになる。

$$\theta^2 h/g = 0.25, kH = 0.522, b/h = 1.0, a/b = 1.0$$

Distribution of  $K_d$  for Circle

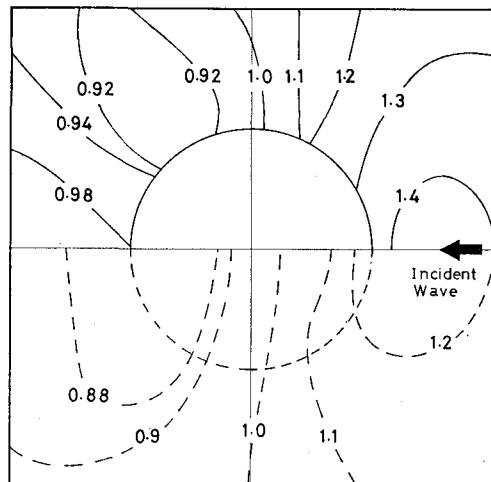


図-3

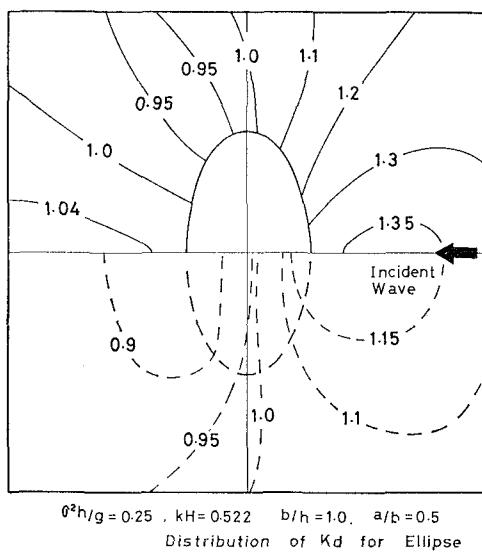


図-4 (a)

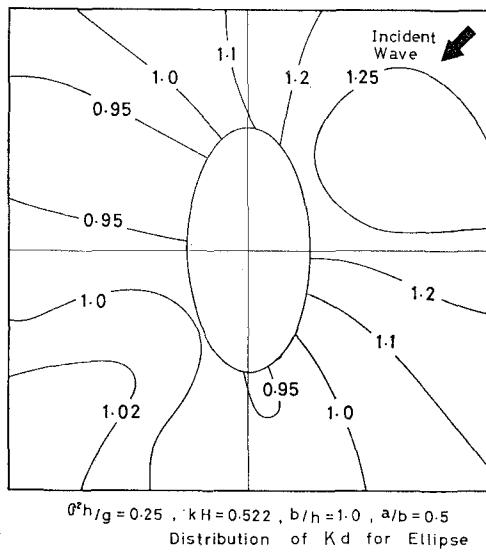


図-4 (b)

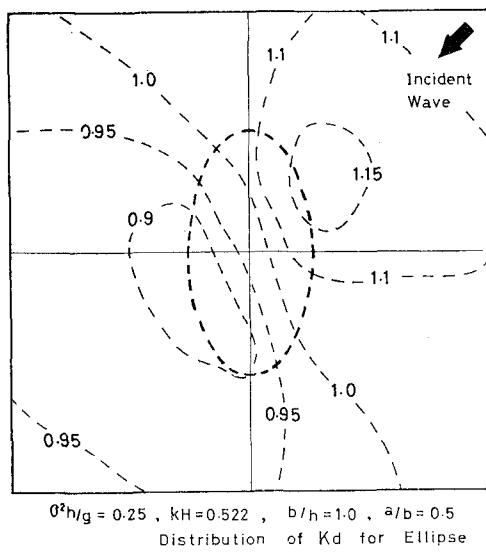


図-4 (b')

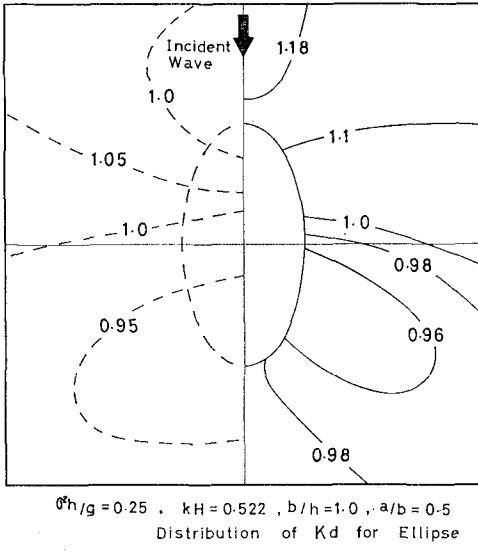


図-4 (c)

合計20個の点を境界上に配置している。

かくして透過堤の場合は  $V=0.5$ ,  $V\mu/\sigma=1.0$  とし,  $n=1$ ,  $s=2$  として式 (4.1) ~ (4.3) を解き, また不透過の場合には式 (6.3) を解き, 回折係数  $K_d$  の分布を式 (5.2) および (6.5) により算出プロットし等  $K_d$  線を引いたものが図-3~6である。各図で実線は不透過堤, 破線は透過堤の場合を示し, 後者では堤体内部の  $K_d$  も示している。表-1は梢円 ( $\omega=0^\circ$ ) の場合の透過堤に対する  $f_3^{(S)}$ ,  $f'_3^{(S)}$  ( $=\bar{f}_3^{(S)}$ ),  $f_1$ ,  $f_2^{(1)}$ ,  $f'_1$  ( $=\bar{f}_1$ ),  $f'_2^{(1)}$  ( $=\bar{f}_2^{(1)}$ ) と不透過堤に対する  $f_1$  の数値例を各計算点について示したものである (この場合  $\bar{k}_1 h = 0.561804 + 0.262050i$ ,  $\bar{k}_2 h = 0.083479 + 3.061839i$  である。)

また堤体に作用する水平力  $F_x, F_y$  を式 (5.3) および (6.6) により計算し、 $F_x/\rho g \zeta_0 A$ ,  $F_y/\rho g \zeta_0 A$  として ( $A$  は堤体断面積) 表わすと表-2 のようである。ここでは参考のため、不透過堤体に対して質量力係数  $C_{Mx}$ ,  $C_{My}$  を微小振幅波としての次の関係式で計算した結果を併記しておいた。

$$C_M = F / \rho g \zeta_0 A \tanh kh \quad \dots \dots \dots \quad (6.6)$$

ここで、 $F$  は水面波形と  $180^\circ$  位相を異なる  $F_x$  または  $F_y$  の波压力成分である。

## 5. 計算結果に対する考察

上に示した結果は防波堤の長さに比べて波長がかなり

表-1 Example of Numerical Calculation

*	0.25 *	KH = 0.522	B/H = 1.0	A/B = 0.50	OMEGA = 0	V = 0.5	V*MU = 1.0	ELLIPSE
J	F3(1)	F3(2)	F3'(1)	F3'(2)				
1	-0.3723 R -0.1923 I 0.42171	-0.0098 R 0.0159 I 0.01866	-0.6319 R 0.3121 I 0.70477	-0.0429 R 0.0943 I 0.10359				
2	-0.3159 R -0.2095 I 0.3144	-0.0109 R 0.0249 I 0.01284	-0.5667 R 0.2998 I 0.65886	-0.0494 R 0.0858 I 0.09480				
3	-0.3023 R -0.2095 I 0.31794	-0.0117 R 0.0233 I 0.01172	-0.5624 R 0.2998 I 0.65491	-0.0537 R 0.0871 I 0.0956				
4	-0.2257 R -0.2542 I 0.34045	-0.0136 R 0.0069 I 0.01628	-0.1558 R 0.1577 I 0.22168	-0.0255 R 0.0438 I 0.06538				
5	-0.1528 R -0.2744 I 0.31424	-0.0138 R 0.0058 I 0.01495	0.3983 R -0.0910 I 0.44859	-0.0353 R 0.0105 I 0.0526				
6	-0.1043 R -0.2812 I 0.29958	-0.0138 R 0.0029 I 0.01409	0.5818 R -0.0710 I 0.58611	-0.0651 R -0.0024 I 0.06512				
7	-0.0662 R -0.2832 I 0.29086	-0.0136 R 0.0007 I 0.01357	0.6128 R -0.0786 I 0.61778	-0.0701 R -0.0084 I 0.07056				
8	-0.0589 R -0.2853 I 0.29129	-0.0136 R 0.0003 I 0.01361	0.5843 R -0.0307 I 0.58509	-0.0641 R -0.0094 I 0.06478				
9	-0.0662 R -0.2853 I 0.29086	-0.0136 R 0.0007 I 0.01357	0.6128 R -0.0786 I 0.61778	-0.0701 R -0.0084 I 0.07056				
10	-0.1043 R -0.2612 I 0.29998	-0.0138 R 0.0029 I 0.01409	0.5818 R -0.0710 I 0.58611	-0.0651 R -0.0024 I 0.06512				
11	-0.1528 R -0.2744 I 0.31424	-0.0138 R 0.0058 I 0.01495	0.3983 R -0.0910 I 0.44859	-0.0353 R 0.0105 I 0.0526				
12	-0.2257 R -0.2549 I 0.34045	-0.0130 R 0.0099 I 0.01628	-0.1558 R 0.1577 I 0.22168	-0.0255 R 0.0438 I 0.06538				
13	-0.3023 R -0.2095 I 0.31441	-0.0117 R 0.0333 I 0.01772	-0.4964 R 0.1893 I 0.49218	-0.0377 R 0.0868 I 0.07776				
14	-0.1528 R -0.2282 I 0.31794	-0.0106 R 0.0106 I 0.01834	-0.5867 R 0.1598 I 0.65886	-0.0494 R 0.0858 I 0.09480				
15	-0.3723 R -0.1923 I 0.42171	-0.0098 R 0.0159 I 0.01866	0.8319 R 0.3121 I 0.70477	-0.0429 R 0.0943 I 0.10359				
16	-0.3831 R -0.1874 I 0.42648	-0.0096 R 0.0162 I 0.01880	-0.9307 R 0.3584 I 0.64038	-0.0368 R 0.0873 I 0.09474				

J	F1	F2(1)	F1'	F2'(1)	
1	-0.2147 R -0.1314 I 0.25169	0.0085 R -0.0087 I 0.01212	0.3512 R 0.1234 I 0.37223	-0.0597 R 0.0614 I 0.08566	
2	-0.2147 R -0.1314 I 0.28033	0.0075 R -0.0087 I 0.01045	0.3512 R 0.1234 I 0.37223	-0.0565 R 0.0553 I 0.07905	
3	-0.1140 R -0.1314 I 0.28034	0.0055 R -0.0087 I 0.00930	0.3512 R 0.1234 I 0.37223	-0.0537 R 0.0522 I 0.0694	
4	-0.0245 R -0.0369 I 0.04431	0.0055 R -0.0043 I 0.00599	-0.1679 R -0.1423 I 0.20007	-0.0440 R 0.0356 I 0.05657	
5	0.0462 R 0.1194 I 0.12800	0.0065 R -0.0040 I 0.00767	-0.2794 R -0.2063 I 0.34728	-0.0496 R 0.0319 I 0.05897	
6	0.0903 R 0.1814 I 0.20259	0.0080 R -0.0039 I 0.00868	-0.3346 R -0.3005 I 0.44976	-0.0603 R 0.0288 I 0.06681	
7	0.1294 R 0.2347 I 0.26558	0.0092 R -0.0036 I 0.00987	-0.3478 R -0.3728 I 0.50985	-0.0648 R 0.0245 I 0.06930	
8	0.1340 R 0.2409 I 0.27571	0.0094 R -0.0035 I 0.01002	-0.3859 R -0.3369 I 0.51227	-0.0635 R 0.0221 I 0.05531	
9	0.1244 R 0.2347 I 0.26558	0.0092 R -0.0036 I 0.00987	-0.3977 R -0.3728 I 0.50985	-0.0648 R 0.0245 I 0.06930	
10	0.0903 R 0.1814 I 0.20259	0.0080 R -0.0039 I 0.00888	-0.3344 R -0.3005 I 0.44976	-0.0603 R 0.0288 I 0.06681	
11	0.0462 R 0.1194 I 0.12800	0.0065 R -0.0040 I 0.00767	-0.2794 R -0.2063 I 0.34728	-0.0496 R 0.0319 I 0.05897	
12	-0.0245 R 0.0369 I 0.04431	0.0055 R -0.0043 I 0.00679	-0.1679 R -0.1423 I 0.20007	-0.0440 R 0.0356 I 0.05657	
13	-0.0140 R -0.0590 I 0.12634	0.0065 R -0.0057 I 0.00850	-0.2317 R 0.1415 I 0.27148	-0.0477 R 0.0442 I 0.06504	
14	-0.1717 R -0.1032 I 0.20253	0.0075 R -0.0067 I 0.01045	0.3512 R 0.1650 I 0.39042	-0.0565 R 0.0253 I 0.07903	
15	-0.2147 R -0.1314 I 0.3134	0.0085 R -0.0087 I 0.01212	0.3512 R 0.1234 I 0.37223	-0.0597 R 0.0614 I 0.08566	
16	-0.2304 R -0.1377 I 0.26836	0.0086 R -0.0090 I 0.01243	0.4698 R 0.1467 I 0.49215	-0.0559 R 0.0599 I 0.08190	

\* 0.25 \* KH = 0.522 B/H = 1.0 A/B = 0.5 OMEGA = 0

I	F1
1	-0.61002 R -0.02874 I 0.610644
2	-0.49136 R -0.02631 I 0.492062
3	-0.33304 R -0.01237 I 0.333267
4	-0.08743 R 0.03553 I 0.093640
5	0.16036 R 0.10614 I 0.195904
6	0.32295 R 0.21298 I 0.363135
7	0.43777 R 0.21298 I 0.489622
8	0.46045 R 0.22598 I 0.514018
9	0.43777 R 0.21298 I 0.489622
10	0.32298 R 0.16675 I 0.363135
11	0.16466 R 0.10614 I 0.195904
12	-0.08743 R 0.03553 I 0.093640
13	-0.33304 R -0.01237 I 0.333267
14	-0.49136 R -0.02631 I 0.492062
15	-0.61002 R -0.02874 I 0.610644
16	-0.63066 R -0.02677 I 0.631228

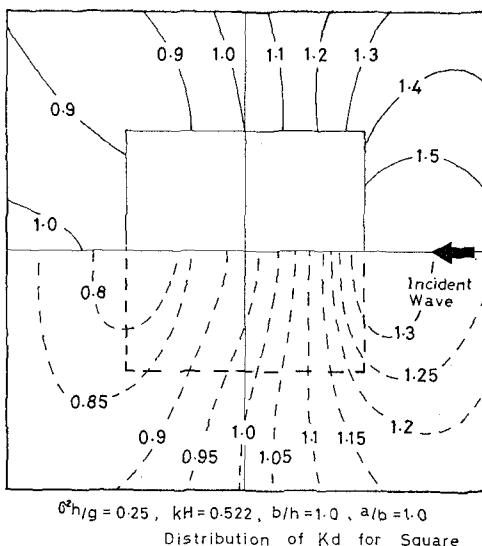


図-5 (a)

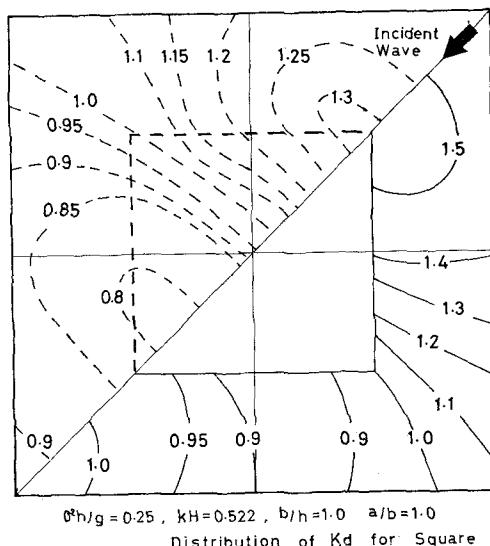
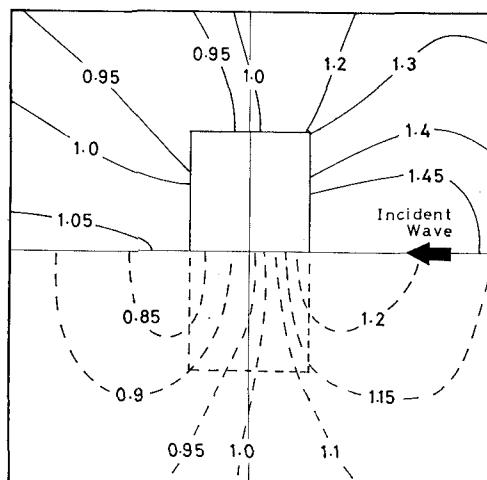
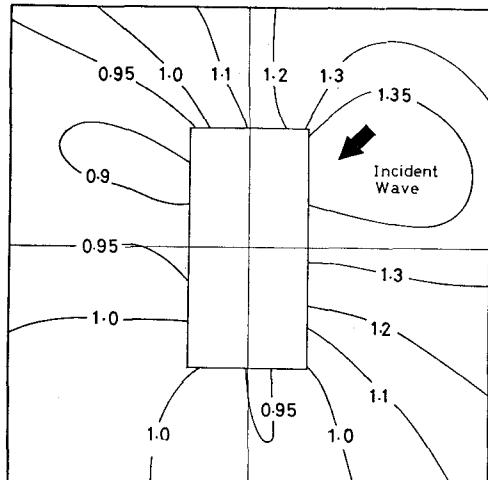


図-5 (b)



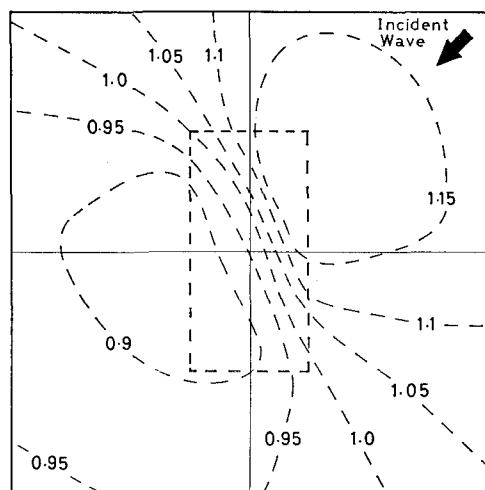
$\theta^h/g = 0.25$ ,  $kH = 0.522$ ,  $b/h = 1.0$ ,  $a/b = 0.5$



$\theta^2 h/g = 0.25$ ,  $KH = 0.522$ ,  $b/h = 1.0$ ,  $a/b = 0.5$   
 Distribution of  $K_d$  for Rectangle

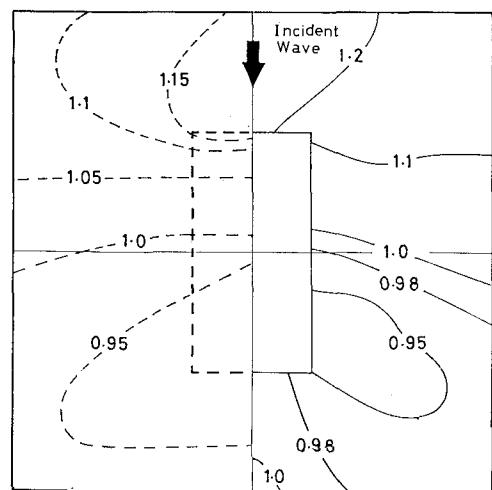
図-6 (a)

図-6 (b)



$$0^2 h/g = 0.25, \quad kH = 0.522, \quad b/h = 1.0, \quad a/b = 0.5$$

Distribution of  $K_d$  for Rectangle



$\theta^2 h/g = 0.25$ ,  $KH = 0.522$ ,  $b/h = 1.0$ ,  $a/b = 0.5$

図-6 (b')

表—2 Fluid Forces to Breakwater

( $\sigma^2 h/g = 0.25$ ,  $kh = 0.522$ ,  $b/h = 1.0$ ,  $a/b = 1.0, 0.5$ ,  $V = 0.5$ ,  $V\mu/\sigma = 1.0$ )

Impermeable						Permeable		
Shape	Area A	Incident Angle $\omega^\circ$	$Fx/\rho g \zeta_0 A$	$Fy/\rho g \zeta_0 A$	$C_{Mx}$	$C_{My}$	$Fx/\rho g \zeta_0 A$	$Fx/\rho g \zeta_0 A$
Circle	$\pi a^2$	0	0.8813	0	1.88	0	0.653	0
Ellipse	$\pi ab$	0	0.446	0	2.98	0	0.845	0
		45	1.010	0.488	2.09	1.01	0.591	0.419
		90	0	0.682	0	1.42	0	0.585
Square	$4a^2$	0	0.951	0	1.93	0	0.669	0
		45	0.680	0.680	1.38	1.38	0.474	0.447
Rectangle	$4ab$	0	1.579	0	3.22	0	0.835	0
		45	1.102	0.510	2.24	1.06	0.581	0.444
		90	0	0.703	0	1.46	0	0.616

長い場合の一例であるが、これによると次のことがわかる。

### (1) 波高分布

不透過堤でも透過堤でも円と橢円では  $\omega=0^\circ$  のときは、前面波高は円の方が大きく、背面では反対である。正方形と矩形でも同じ傾向にある。すなわち波の進行方向に厚い堤体は反射効果は大きいが、遮蔽効果も大きい。 $\omega=90^\circ$  のときは勿論反射効果、遮蔽効果はともに  $\omega=0^\circ$  のときより小さいが、橢円の場合が矩形の場合より波高は小さく、また両者共堤体に沿う波高は背面に向って減少する。

円と正方形または橢円と矩形を、同じ入射波方向について比べると、いずれも前者が反射効果が小さく、遮蔽効果が大きい傾向にある。すなわち隅角の尖鋭度は波の散乱にかなりの影響があることがわかる。

透過堤体は不透過の場合に比べて、全体的に反射効果は小さく、遮蔽効果は大きくなる。前者は当然のことと考えられるが、後者の現象は注目に値するもので、透過堤体は波長の長い波に対しては透過性が大きいにもかかわらず、背後の波の回折を低減する効果が著しいことを示すものと見ることができる。 $(\sigma^2 h/g = 0.25, V = 0.5, Vu/\sigma = 1.0)$  の条件で  $B/h = 1.0$  及び  $2.0$  で与えられる幅  $B$  の無限に長い透過堤体に波が垂直に入射するときの反射率はそれぞれ  $0.39$  および  $0.51$ 、通過率は  $0.64$  および  $0.52$  と計算される<sup>6)</sup>。

### (2) 波 力

不透過堤体においては、単位入射波高に対する単位断面積についての波力 ( $\omega=0^\circ$  のとき) は円の場合が最も小さく、次いで正方形、橢円、矩形の順に大きい。すなわち波の進行方向に対する投影面積が等しいときは、奥行きの深い堤体に対して、また隅角部が滑かなものに対して波力は小さい。質量力係数は一般に示されている円柱に対する  $2.0$ 、正角柱に対する  $2.19$ <sup>7)</sup> よりも幾分小さい。これはここで対象とする堤体の直徑または辺長が水深と同程度に大きいことによると解釈される。

透過堤体に対する波力は条件により異なるが、不透過堤体の  $60\sim70\%$  程度となる。面白いのは円と正方形では後者の方が大きい値を示すが ( $\omega=0^\circ$  のとき)、橢円と矩形では反対となっている。

## 6. む す び

ここに述べた計算方法は、円、橢円あるいは矩形などに限らず、一般に任意の形の防波堤配置に対してそのまま適用され、また防波堤に限らず、透過性護岸についても、また不透過護岸との組合せに対しても用いることができる。不透過堤としての円柱に対する計算結果は Garrett (1971)<sup>8)</sup> の計算と良く一致し、また透過堤の場合には比較すべき理論値はないが、 $n=1, s=2$  とした本文の計算値は有効数字 4 桁まで式 (3.3) (3.4) の条件を満足することが確かめられる。本計算は  $V=0.50$ ,  $Vu/\sigma=1.0$  を仮定したが、この値は著者の透過性堤体に関する種々の研究<sup>9)</sup>においてほぼ妥当と見られる値である。なお実験値との比較については次の機会に述べることとする。

### 参 考 文 献

- 1) Penny, W. G. and A. T. Price (1952) : "The diffraction theory of sea waves and the shelter afforded by breakwater", Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., Ser. A, Vol. 244.
- 2) 合田良実、吉村知司 (1971) : "島堤による波の反射および回折に関する研究", 港湾技術研究所報告, 第10巻第2号。
- 3) 伊藤喜行、谷本勝利 (1971) : "新しい方法による波動の数値解析" 同上。
- 4) Hwang, Li-San and E. O. T. Tuck (1970) : "On the oscillations of harbours of arbitrary shape", J. Fluid Mech. Vol. 42, Part 3.
- 5) Lee, Jiin-Jen (1970) : "Wave induced oscillations in harbors of arbitrary shape", Calif. Inst. for Tech.
- 6) 井島武士・江口泰彦・小林彰 (1971) : "透過性防波堤と岸壁に関する研究", 土木学会第18回海岸工学講演会論文集。
- 7) 土木学会編: "水理公式集第5編, p.523" 昭和46年。
- 8) Garrett, C. J. R. (1971) : "Wave forces on a circular dock" J. Fluid Mech. Vol. 46, Part 1.
- 9) 例えは文献(6)及び  
井島武士・奥薗英明・湯村やす・坂井久雄(1972) : "遊水部をもつ直立消波防波堤と護岸", 土木学会第19回海岸工学講演会論文集。