

波による円柱の抗力係数および質量係数について

土 屋 義 人*・山 口 正 隆**

1. 緒 言

近年海洋開発に伴って、各地に海中構造物が建設されようとしているが、こうした構造物を海中に建設する場合、構造物に強大な波力が働くので、この波力をできるだけ正確に推定し、それに耐える合理的な設計を行なう必要がある。

柱状構造物に作用する波力に対しては、Morison 以来多くの人びとによって実験的研究が行なわれてきたが、この波力に関係する要素が多いため、多くの実験は断片的なものに限られ、またその結果もたがいに異なっており、十分な整理やその機構の解明もなされていないと考えられる。現在のところこれらの理論的解析は非常に少なく、実験あるいは現地観測に依存するところが多い。そして、現実の複雑な条件に対する設計に供しうる波力公式を確立するためには、種々の条件のもとで系統的な実験を行なうことが必要である。

一般に、海中構造物の築造に用いられる構造物はほとんど円柱状のものであり、したがって、基本的な問題として直円柱に作用する波力の推定が重要となる。そこで本研究では、円柱に作用する波力を究明するため、広範囲に波の特性を変化させて実験を行ない、Morison らによる波力算定式に Stokes 波やクノイド波理論を導入して、著者らの実験結果および従来の結果から抗力係数および質量係数を算出し、その特性を詳細に検討する。

2. 実験装置および方法

実験は京大防災研究所宇治川水理実験所にある 図-1 に示す長さ 78 m、幅 1 m、深さ 1.5 m の水槽の一端に 1/100 の斜面をもつ波浪実験長水槽を用いて行なった。実験装置は造波機側の水槽端より約 53 m の位置に鋼製の枠を組み、そこに波力測定装置ならびに試験円柱を取りつけたものである。この波力測定装置は、下端が自由

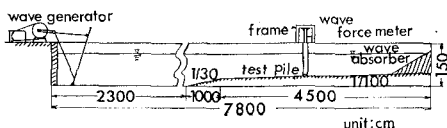


図-1 実験装置の概略図

端である片もちばり構造として、長さ約 50 cm の円柱に 120 Ω 、ゲージファクター 2.2 のストレインゲージ 8 枚を 図-2 に示すように接着し、ブリッジ回路を構成して、波の作用で生じた円柱のひずみ量から波力のモーメント、波力および作用点を求めるものである。実験に際しては、10 cm のチャンネルで十分剛性をもたせた鋼製の枠に波力測定装置および試験円柱を円柱と底面の距離ができるだけ小さくなるように (5~

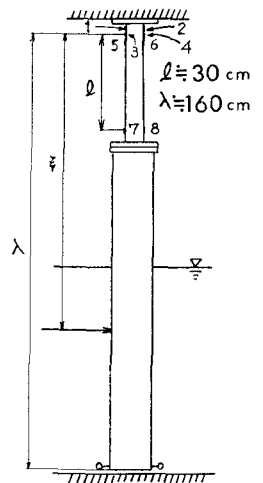


図-2 波力測定装置

10 mm 程度) ボルト結合して取り付けた。円柱を自由振動させて波力測定系の空中および水中固有振動数を測定した結果、水中固有振動数は 5~6 cps であった。ついで、滑車を通じておもりを順次つりさげることにより静的な検定を行ない、ひずみ量と外力の関係を求めた。実験は周期 T および水深 h を一定にして碎波にいたるまで波高 H を広範囲に変化させて行ない、円柱に作用する波力と一様水深部および円柱の設置位置での波高を測定した。実験条件および実験波の特性は、表-1 に示す

表-1 実験条件および実験波の特性
(H_u : 一様水深部での波高)

T (sec)	h (cm)	$T\sqrt{g/h}$	D (cm)	H (cm)	H_u (cm)
1.5	55.6	6.30	14	9.3~37.5	11.0~34.5
1.5	55.6	6.30	28	12.4~34.2	10.8~33.2
2.0	55.6	8.40	14	7.8~40.9	7.5~36.0
2.0	55.6	8.40	28	6.9~40.7	7.2~37.0
2.5	55.6	10.50	14	5.4~43.2	6.6~34.0
2.5	55.6	10.50	28	7.7~47.6	6.7~34.4
3.0	55.6	12.59	7	4.9~44.2	4.6~35.6
3.0	55.6	12.59	14	4.7~44.0	4.4~36.1
3.0	55.6	12.59	28	4.7~46.9	4.1~32.6
2.5	27.8	14.84	7	5.3~23.6	4.3~19.0
2.5	27.8	14.84	14	4.9~23.6	4.4~20.6
3.0	27.8	17.81	7	4.2~21.2	2.7~15.5
2.6	41.7	12.60	7	5.5~31.6	5.3~23.6
1.75	14.0	12.60	7	5.0~12.7	5.1~13.3

* 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所

** 正会員 工修 京都大学助手 防災研究所

とおりである。なお、実験に使用した円柱はアルミニウム製で、直径 7cm, 14cm および 28cm の 3 種類である。

3. 有限振幅波理論を用いた波力算定式の検討

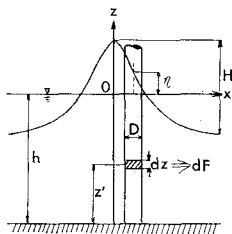


図-3 座標系

図-3 のように座標系をとると、直径 D 、長さ dz の直円柱に作用する波力 dF は、Morison¹⁾ に従えば、次式で表わされる。

$$dF = C_D D (\rho/2) u |u| dz + C_M \rho (\pi/4) D^3 (du/dt) dz \quad (1)$$

ここに、 C_D : 抗力係数、 C_M : 質量係数、 u : 波の水平水粒子速度および du/dt : 水平水粒子加速度、である。抗力係数および質量係数が、時間および水深方向に変化しないという仮定のもとで、水平水粒子速度および加速度として微小振幅波理論による関係を用いると、波力 F は式(1)の水深方向にわたる積分として次式で与えられる。

$$F = \int_{-h}^{\eta} dF = (1/8) \rho g C_D D H^2 k h \cos \sigma t |\cos \sigma t| \times \{ \sinh 2kh(1+\eta/h)/2kh + (1+\eta/h) / \sinh 2kh - (1/8) \rho g C_M \pi D^3 H \sin \sigma t \times \{ \sinh kh(1+\eta/h)/\cosh kh \} \} \quad (2)$$

ここに、 η : 静水面よりの水位変動、である。式(2)でそれぞれ $\sigma t = 0$ および $\pm \pi/2$ とおけば、第2項および第1項が0になるので、それらの式から C_D と C_M が求められる。

次に、Stokes 波の第4次近似解²⁾を用いると、水平水粒子加速度は次式のようになる。

$$\begin{aligned} du/dt = & \partial u / \partial t + u(\partial u / \partial x) + v(\partial u / \partial z) \\ = & -c\omega[\lambda A_{11} \cosh k(h+z) \sin \sigma t + (1/2)\lambda^2 \\ & \times \{ 8A_{22} \cosh 2k(h+z) - A_{11}^2 \} \sin 2\sigma t \\ & + \lambda^3 \{ \{ A_{13} \cosh k(h+z) \\ & - A_{11}A_{22} \cosh 3k(h+z) \} \sin \sigma t \\ & + \{ 9A_{33} \cosh 3k(h+z) \\ & - 3A_{11}A_{22} \cosh k(h+z) \} \sin 3\sigma t \\ & + (1/2)\lambda^4 \{ \{ 8A_{24} \cosh 2k(h+z) - A_{11}A_{13} \\ & - 6A_{11}A_{33} \cosh 4k(h+z) \} \sin 2\sigma t \\ & + 4\{ 8A_{44} \cosh 4k(h+z) - 2A_{22}^2 \\ & - 3A_{11}A_{33} \cosh 2k(h+z) \} \sin 4\sigma t \}] \end{aligned} \quad (3)$$

そして、質量力 F_I は、底面から水面までの積分として次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} F_I = & (\rho \pi D^2 C_M / 4) \int_0^{h+\eta} (du/dt) dz' \\ = & -(\rho \pi D^2 c^2 C_M / 4) \{ \lambda A_{11} \sinh k(h+\eta) \sin \sigma t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + (1/2)\lambda^2 \{ 4A_{22} \sinh 2k(h+\eta) - k(h+\eta)A_{11}^2 \} \\ & \times \sin 2\sigma t + \lambda^3 \{ \{ A_{13} \sinh k(h+\eta) \\ & - (1/3)A_{11}A_{22} \sinh 3k(h+\eta) \} \sin \sigma t \\ & + \{ 3A_{33} \sinh 3k(h+\eta) \\ & - 3A_{11}A_{22} \sinh k(h+\eta) \} \sin 3\sigma t \\ & + (1/2) \{ \{ 4A_{24} \sinh 2k(h+\eta) \\ & - A_{11}A_{13}k(h+\eta) - 3A_{11}A_{33} \sinh 4k(h+\eta) \} \\ & \times \sin 2\sigma t + 2 \{ 4A_{44} \sinh 4k(h+\eta) \\ & - 4A_{22}^2k(h+\eta) - 3A_{11}A_{33} \sinh 2k(h+\eta) \} \\ & \times \sin 4\sigma t \} \} \quad (4) \end{aligned}$$

ここに、 c : 波速、 λ : 波形勾配を表わすパラメーター、 $\sigma = 2\pi/T$ 、 $k = 2\pi/L$ 、 L : 波長、 v : 鉛直水粒子速度、 A_{ij} : kh のみの関数、 z' : 底面より鉛直上方にとった座標、である。

抗力については、解析解を得ることができないが、Simpson 則によって数値積分を行なって求めることができる。すなわち、

$$F_D = (C_D \rho D/2) \int_0^{h+\eta} u(z') |u(z')| dz' \quad (5)$$

抗力係数 C_D は波の峯での実測の F_{η_0} より次式を用いて算出される。

$$C_D = F_{\eta_0} / \left\{ (\rho D/2) \int_0^{h+\eta_0} u(z') |u(z')| dz' \right\} \quad (6)$$

ここに、 η_0 : 静水面上の波の峯高、である。

また、有限振幅波理論では水位の0点と流速の0点が一致せず、しかも流速のそれは鉛直方向に若干ずれるので、微小振幅波理論による場合のように質量力だけを分離できない。そこで、ここでは η の0点での $F_{\eta=0}$ を用いて次式から質量係数 C_M を求めることにする。

$$\begin{aligned} C_M = & \left\{ F_{\eta=0} - (C_D \rho D/2) \int_0^h u(z') |u(z')| dz' \right. \\ & \left. / \left\{ (\rho \pi D^2/4) \int_0^h (du/dt) dz' \right\} \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

さらに、これら両係数は Reynolds 数や Keulegan-Carpenter 数の関係として表示されることが多い。この場合、流速としてどここの位置での水粒子速度を採用するかは問題であるが、本研究では、次式で表わされる流速の自乗平均根を用いることにした。

$$\sqrt{\overline{u^2}} = \sqrt{\int_0^{h+\eta_0} u^2 dz' / (h+\eta_0)} \quad (8)$$

一方、平均水深を用いた Laitone のクノイド波第2近似解³⁾を用いると、質量力は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} F_I = & -(\pi D^2/4) C_M (2K/T) \sqrt{g h} \operatorname{cn}(2Kt/T) \\ & \times \operatorname{sn}(2Kt/T) \operatorname{dn}(2Kt/T) [2(H/h)(h+\eta) \\ & - (H/h)^2 \{ -N_1(h+\eta) + 2[(7\kappa^2-2)(h+\eta)/4\kappa^2 \\ & + (3/2)(2-1/\kappa^2)\{(\eta+h)(\eta-h+2\delta)/h \\ & + (\eta+h)(\eta^2-\eta h+3\delta\eta-3\delta h+3\delta^2)/3h^2 \} \\ & - [5(h+\eta)+9\{(\eta+h)(\eta-h+2\delta)/h \\ & + (\eta+h)(\eta^2-\eta h+h^2+3\delta\eta-3\delta h+3\delta^2)/3h^2 \}] \end{aligned}$$

$$\times \text{cn}^2(2Kt/T) + 2(h+\eta) \\ \times [C_1 - 1 + 1/2k^2 + \text{cn}^2(2Kt/T)] \dots (9)$$

ここに、 δ : 波の谷と静水面との距離、 κ : だ円関数の母数、 K : 第1種完全だ円積分、 N_1 , C_1 : κ のみの関数、 E : 第2種完全だ円積分、 cn , sn , dn : Jacobi のだ円関数、であり、これらの諸式を用いると、Stokes 波の場合と同様 C_D , C_M および F を求めることができる。

これらの諸式は、波速および水位変動に対しては、さらに近似を進めなければならないという点で若干問題があるが、ここではこれを無視することにした。なお、波力のモーメントも同様に計算される。

さて、有限振幅波理

論の適合性を検討する意味で、静水面上の波の峯高 η_0 の実験値と理論曲線を比較したのが図-4である。図中の記号 2, 3, 4 および 5 は Stokes 波理論の

それぞれの近似解の次数であり、 c はクノイド波の第2近似解である。これらの図によれば資料のばらつきが比較的

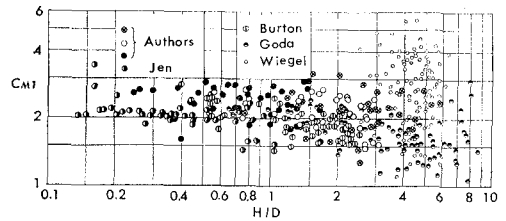
大きいとき高次近似解の優劣は論じがたいが、水深波長の比較的大きいときには図-4 η_0/H と h/H との関係 Stokes 波の第3次、第4次および第5次近似解、水深波長比の小さいときにはクノイド波の第2近似解の適合性がよくなること、および Stokes 波の第2近似解は水深波長比が小さくなるとかなり過大な値を与えることがわかる。したがって、円柱への波のはいあがりの効果は無視すれば、円柱に作用する波力を計算する場合の静水面上の波の峯高として、これら有限振幅波理論の高次解によるものが適切といえよう。

図-4 η_0/H と h/H との関係 Stokes 波の第3次、第4次および第5次近似解、水深波長比の小さいときにはクノイド波の第2近似解の適合性がよくなること、および Stokes 波の第2近似解は水深波長比が小さくなるとかなり過大な値を与えることがわかる。したがって、円柱への波のはいあがりの効果は無視すれば、円柱に作用する波力を計算する場合の静水面上の波の峯高として、これら有限振幅波理論の高次解によるものが適切といえよう。

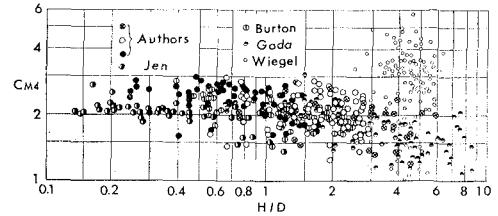
4. 質量係数および抗力係数に関する考察

(1) 質量係数

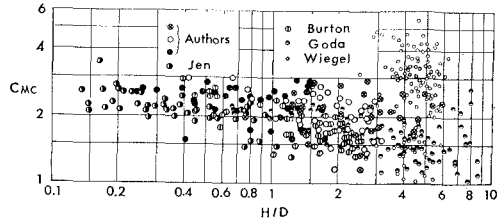
図-5は Stokes 波の第1次および第4次近似解とクノイド波の第2近似解を用いて求めた質量係数 C_{M1} , C_{M4} および C_{MC} の H/D による変化を示すものであり、図中には、著者らの実験結果に加えて、合田⁴⁾, Jen⁵⁾ および Burton⁶⁾ らの実験結果や Wiegel⁷⁾ の現地観測の結果も示してある。これらの図より明らかなように、実験値や観測値のばらつきは大きい、質量係数はいずれの理論によっても H/D の値の増加とともに若干減少する。 H/D の値の増加は、全波力に占める抗力の割合の増加



(a)



(b)



(c)

図-5 質量係数の H/D による変化 (1)

を意味しており、抗力が支配的な領域では、うずの発生や消散のために、質量係数が若干減少することが予想される。ただし、以上の考察では、Wiegel のものは現地観測であるため、質量係数を求める際、かなりの誤差が入るのを避けられないと考えられるので、無視している。

また、Stokes 波理論による場合は、いずれの近似解を用いても、 C_M の値はそれほど差がないが、それらに比べ、クノイド波理論を適用すると、若干小さくなる。従来の実験結果では、一般にポテンシャル理論で与えられる $C_M=2.0$ よりも小さくなることが多いのに対し、著者らの結果では平均値として $C_M=2.3\sim 2.4$ にも及んでおり、これが本質的なものか実験上の誤差かは不明である。しかし、全波力における質量力の占める割合が大きい場合には、樋口、Jen および Paape らの実験結果のように、質量係数が 2 より大きくなる傾向がうかがえる。

図-6 は、質量力が卓越する場合の質量係数と H/D の関係を示すものであって、質量係数はポテンシャル理論で与えられる $C_M=2.0$ より明らかに大きくなっている。

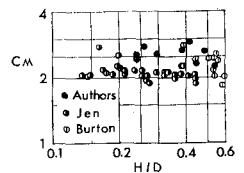
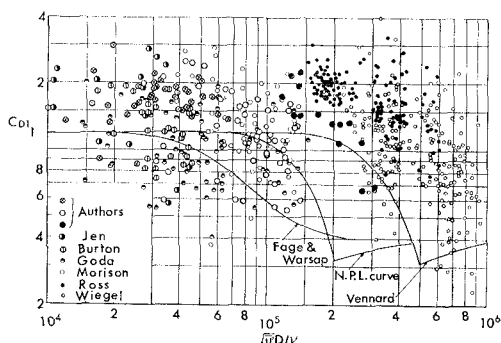


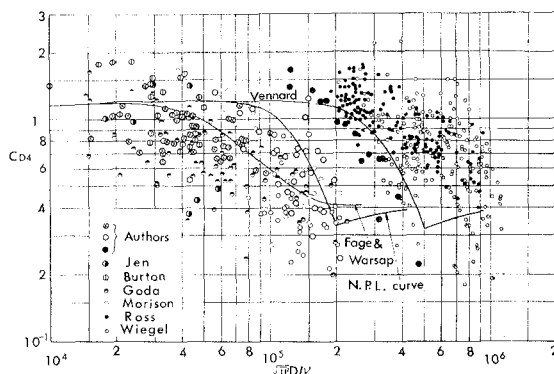
図-6 質量係数の H/D による変化 (2)

(2) 抗力係数

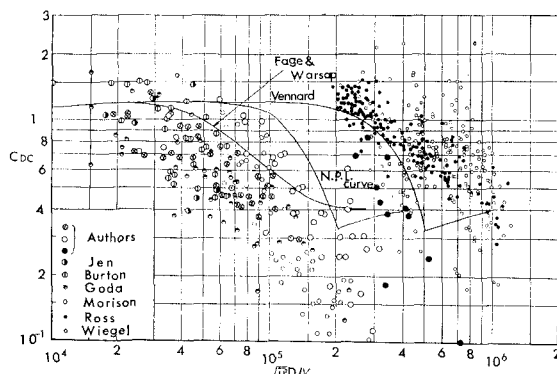
図-7 は微小振幅波, Stokes 波およびクノイド波の各理論解を用いて求めた抗力係数 C_{D1} , C_{D4} および C_{Dc} の Reynolds 数による変化を示すものであり, 図中には著者らの実験結果のほか, 合田, Burton, Jen, Ross⁹⁾らの実験結果および Morison, Wiegel らの現地観測結果をも図示してある。これらの結果のうち, Ross および Morison によるものは最大値が与えられているだけであるが, 波の特性から抗力が卓越していると考えられるので, 波力の最大値より抗力係数を計算した。したがって,



(a)



(b)

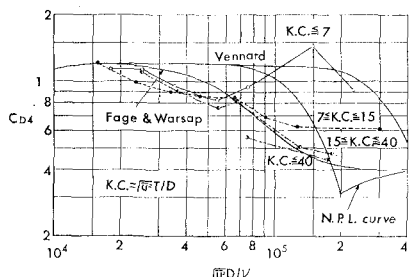


(c)

図-7 質量係数の Reynolds 数による変化(1)

円柱の径の小さい Morison の結果はあまり問題がないが, 比較的径の大きい Ross の実験結果から計算された抗力係数は実際の値より過大に与えられ, Reynolds 数の小さいものほど, この傾向が著しいものと思われる。また, 解析精度の点から考えて, 著者ら, Jen および Burton らの実験結果では, 抗力が波力の最大値の約 15% 以上のもののみを選んで図示している。さらに, 図中の曲線はそれぞれ Fage および Warsap, Goldstein (N.P.L. 曲線), Vennard による定常流中の抗力係数の実験曲線であり, $Re \approx 10^5$ 近傍の臨界 Reynolds 数付近では, 実験に用いた風洞水槽の乱れの特性に応じて抗力係数が変化し, たがいにかかなりの差異を示している。これらの図によれば, 微小振幅波理論によるものは, 静水面上の波の峰高や水粒子速度の算定が適切でないため, かなり実験値や観測値のばらつきが大きく, Reynolds 数との相関関係はほとんど見出せないのに対して, Stokes 波やクノイド波理論によるものは一般にその変動幅が小さくなり, Reynolds 数との関係において 2 つの傾向が現われているのがわかる。すなわち, Stokes 波の第 4 次近似解による結果では, $Re < 2 \times 10^5$ の領域に対し, 相互の結果が比較的良好一致しており, 平均的には Fage および Warsap による定常流の曲線に近く, また上限値としては N.P.L. 曲線で表わされる。とくに, 合田は水粒子速度の実験結果から抗力係数を算出しているが, この結果をみても, 著者らの計算方法によるものとそれほど差は見出せない。しかし, 一方, $Re > 10^5$ の領域では, 著者らによる $D=28$ cm の場合の実験結果や Ross のそれに見られるように, 抗力係数は Vennard により与えられた定常流の曲線を下限とするような値をとり, 同一の Reynolds 数に対して抗力係数はかなり異なる値を示す。この傾向は Wilson らによって整理された現地観測の結果⁹⁾にも現われている。ただし, 著者らの $D=28$ cm の実験では, 水槽幅が円柱の直径に比べてそれほど大きくないため, 波高の増加とともに円柱による回折波および側壁の反射波により, 波動場の変形がかなり著しいので, これらの実験値には若干問題がある。また, クノイド波理論による抗力係数は, 波高が大きくなると, 流速分布が過大に評価される傾向があるので, かなり小さな値となり, しかもその変動幅が Stokes 波理論に比べて大きい。したがって浅海域においても, 波高の大きい場合クノイド波の第 2 近似解は抗力係数の算出には必ずしも有効ではないようである。

一般に, 波による円柱の抗力係数は, Reynolds 数ばかりでなく, Keulegan-Carpenter 数の関数とも考えられる。そこで, 図-7(b) の Stokes 波の第 4 次近似解によって算出した抗力係数の実験値を Keulegan-Carpenter 数の大小に応じて再整理し, 適当な平均化を行なったのが 図-8 である。この図より明らかなように, $Re < 7 \times$



図—8 抗力係数の Reynolds 数による変化 (2)

10^4 の領域では、いずれの Keulegan-Carpenter 数に対しても抗力係数の値はほとんど変化しないのに対して、 $Re > 7 \times 10^4$ の領域では、Keulegan-Carpenter 数が大きいものほど、小さな値をとって、Fage および Warsap の定常流による実験曲線に近づく傾向を示している。Keulegan-Carpenter や Bidde によれば、Keulegan-Carpenter 数はうずの発生過程と密接な関連があることが示されている。これらの研究を参考にすると、Keulegan-Carpenter 数が小さいとき、うずの発散が若干ある程度で、流れの場はそれほど乱されておらず、抗力係数は乱れの強さの小さい場合の定常流による値、すなわち Vennard による抗力係数の実験曲線との対応が比較的よい。一方 Keulegan-Carpenter 数が大きくなるにつれ、流れの場の乱れが非常に激しくなって、抗力係数は乱れの強さの大きい場合の Fage および Warsap の実験曲線に近づくと考えられる。しかし、 $10^5 < Re < 3 \times 10^5$ の領域での実験値の中には、波高がかなり大きいとき、Stokes 波の第 4 次近似解の適用限界と関連して、十分な解析精度が得られていないものも含まれているので、実験上の制約とあいまってこの傾向が必ずしも一般的であるとは断定しがたく、今後、実験結果を追加するとともに、より高次の解を用いて検討を行いたい。

5. 結 語

以上、著者らは円柱に作用する波力を解明するための基礎実験を行ない、また波力に関する従来の実験および観測結果をも解析して、抗力係数および質量係数について検討したが、得られた結論は次のように要約される。すなわち、Morison らによる波力算定式に有限振幅波理論を導入して抗力係数および質量係数を求め、波の特性との関連を検討した結果、抗力係数は、 $Re < 10^5$ の領域では大局的には Reynolds 数の関数として与えられ、Fage および Warsap の定常流中の実験値と比較的よく

一致するが、 $Re > 10^5$ の領域ではかなり問題があり、さらに詳細に検討すると、抗力係数は $Re < 7 \times 10^4$ の領域ではほぼ Reynolds 数の関数と考えられるが、 $7 \times 10^4 < Re < 3 \times 10^5$ の領域では Reynolds 数および Keulegan-Carpenter 数の関数とみなされ、同一の Reynolds 数に対して、Keulegan-Carpenter 数の小さいものほど大きな値をとる傾向があること、および質量係数は、有限振幅波理論を用いても、微小振幅波理論によるものとそれほど変わらず、また H/D の値の増加とともに若干減少の傾向を示し、その値は著者の実験ではポテンシャル理論で与えられる 2.0 よりかなり大きく、平均値として 2.3 ~ 2.4 程度になり、とくに質量力が卓越する場合には明らかに 2.0 より大きくなることがわかった。

最後に、本研究の一部は文部省科学研究費によるものであり、また実験的研究は川崎重工業株式会社の委託によるもので、本研究の実施にあたりご配慮いただいた野村襄課長はじめ関係者各位に謝意を表わすとともに、実験、資料解析および図面の作成に助力いただいた海岸災害研究室の諸氏に深く感謝する次第である。

参 考 文 献

- 1) Morison, J.R., Johnson, J.W. and O'Brien, M.P.: Experimental Studies of Forces on Piles, Proc. 4th Conf. on Coastal Eng., 1953, pp. 340~370.
- 2) Skjelbreia, L. and Hendrickson, J.A.: Fifth Order Gravity Wave Theory, Proc. 7th Conf. on Coastal Eng., 1964, pp. 184~197.
- 3) Laitone, E.V.: Series Solutions for Shallow Water Waves, Jour. Geophys. Res., Vol. 70, No. 4, 1965, pp. 995~998.
- 4) Goda, Y.: Wave Forces on a Vertical Circular Cylinder: Experiments and a Proposed Method of Wave Force Computation, Report of Port and Harbour Tech. Res. Inst., No. 8, 1964, pp. 1~74.
- 5) Jen, Y.: Wave Forces on a Vertical Circular Cylindrical Piles Used in Coastal Structures, Univ. of California, Berkeley, Hydraulic Eng. Laboratory, Technical Report, HEL 9-11, 1967, pp. 1~94.
- 6) Burton, W.J. and Sorensen, R.M.: The Effects of Surface Roughness on the Wave Forces on a Circular Cylindrical Pile, Texas A & M Univ., COE Report No. 121, 1970, pp. 1~137.
- 7) Wiegel, R.L., Beebe, K.E. and Moon, J.: Ocean Wave Forces on Circular Cylindrical Piles, Proc. ASCE, HY2, Vol. 83, No. 1199, 1957, pp. 89~119.
- 8) Ross, C.W.: Large-Scale Tests of Wave Forces on Piling, BEB Tech. Memo., No. 111, 1959, pp. 1~9.
- 9) Wilson, B.W. and Reid, R.O.: A Discussion of "Wave Force Coefficients for Offshore Pipelines," Proc. ASCE, WW1, 1963, pp. 61~65.