

波向線交差領域での波の屈折

—数値波動解析法の応用 (2)—

伊藤 喜行*・谷本 勝利**

1. まえがき

防波堤法線前面に浅瀬がある場合、波はその影響を受けて到達する。通常、その到達波高は屈折計算を行なって求められるが、その際地形条件によっては、波向線交差の問題が生じる。現行屈折理論では、その取り扱いに難点がある。

すなわち、屈折係数 K_r は波向線間隔 b の関数として

$$K_r = \sqrt{b_0/b} \quad (b_0 \text{ は深海での波向線間隔}) \quad (1)$$

で与えられるから、交差点で無限大となる。したがって、それを乗じて求められる波高も数値上無限大となり、機械的に解釈すればその付近で必ず碎波が生ずることになる。また、こうした交差点より岸側の領域については、現行屈折理論では合理的に取り扱うことができない。

一方、実際現象では、波向線交差が生じる場合でも、碎波が起こるほど波高が大きくなるとは限らない。こうした事実はすでに指摘されているところであり、今回行った筆者らの実験においてもそうである。

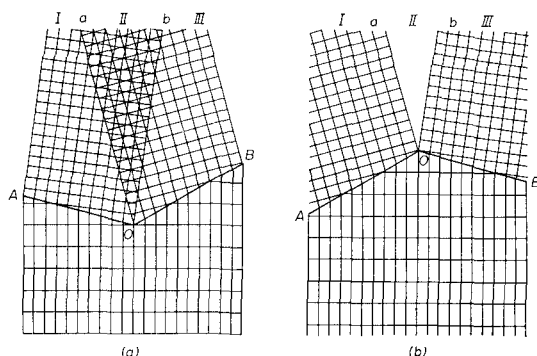
現行屈折理論のこのような実際現象からの逸脱は、それが幾何光学的近似に基づいていることによる。すなわちそこでは、各波向線を互いに独立なものとして扱っており、それを横切るエネルギー輸送はないと仮定している。通常、こうした扱いで十分であるが、波向線交差を生ずるような場合には、波向線を横切るエネルギー輸送すなわち屈折における回折効果が無視できなくなり、その結果必ずしも碎波にまで至らないわけである。

本論文は、このような現行屈折理論の難点を克服した計算を、前に報告した数値波動解析法¹⁾を応用して、行ない得ることを示すものである。ここでは、その応用例として一定水深領域中の球面浅瀬をとりあげ、数値波動解析法による計算を実施するとともに、水理模型実験による検証を行なった。この方法は、水深変化が著しくなければ、任意の地形にも応用できる。

2. 幾何光学的屈折理論の限界

(1) 屈折における回折効果

数値波動解析法による屈折問題の解法について述べるまえに、まず現行屈折理論の限界について簡単に解説し



図—1 幾何光学的波の屈折

ておく。まえがきでも述べたように現行屈折理論は、おのおのの波向線を独立なものとして求める幾何光学的扱いによるものである。フェルマの原理やスネルの法則は、こうした幾何光学的屈折の法則である。

現行屈折理論の実際現象からの逸脱は、比較的簡単な場合にも生ずる。図—1 はその例を示すものである。これは、おのおの水深の異なる領域が屈曲線状に接している海域を、水深大なる方から小なる方へ波が進行している場合のスネルの法則より求めた波向線と波峰線を示している。(a) は屈曲線が波の入射側に凸状、(b) は凹状の場合である。

屈折後の領域は、いずれも3つに分けられる。すなわち (a) では、 $\overline{AO}$ からの屈折波のみが存在する領域 I、 $\overline{BO}$ からの屈折波のみが存在する領域 III、および両方からのものが交差する領域 II である。(b) の場合には、領域 II は波がない空白部分となる。

このように幾何光学的屈折の扱いでは、この場合 $\overline{aO}$ 、 $\overline{bO}$ で波峰線に切れ目が生じる。実際には、そうした不連続部が生ずることはなく、ならされた状態になるはずである。こうした幾何光学的波との違いを生ぜしめる効果を、ここでは屈折における回折効果と呼ぶことにする。

なお、(a) の場合の波向線交差は、幾何光学的扱いにおいても波高無限大を意味するものではなく、単に二方向に進行する波の交差領域にほかならない。

(2) 焦線を生ずる場合

次に、あとで扱う球面浅瀬 (図—6) に幾何光学的屈折

* 正会員 工博 運輸省港湾技術研究所 水工部長

** 正会員 運輸省港湾技術研究所 水工部

理論を適用した例を示す。一般的屈折計算は、屈折作図法あるいはフェルマの原理から出発して導かれる基礎方程式を直接電子計算機によって解いていく方法によって行なわれる。ここでは、後者の方法を適用した。

これは、Griswold (1963)²⁾が行なったように、次の基礎方程式を差分法によって解いていくものである。

$$\frac{D\alpha}{Ds} = (\sin \alpha) \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} - (\cos \alpha) \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} \quad \dots\dots (2)$$

$$\frac{D^2\beta}{Ds^2} + p(s) \frac{D\beta}{Ds} + q(s)\beta = 0 \quad \dots\dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} p(s) &= -(\cos \alpha) \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} - (\sin \alpha) \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} \\ q(s) &= (\sin^2 \alpha) \frac{1}{c} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - 2(\sin \alpha \cdot \cos \alpha) \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} \\ &\quad + (\cos^2 \alpha) \frac{1}{c} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (4)$$

ここに、 s は波向線であり、 α は x 軸と波向線方向とのなす角 (図-2 参照)、 β は次式で定義される波向線間隔係数 (ray separation factor) である。

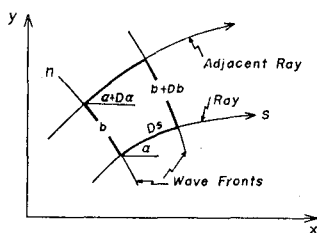


図-2 波向線と座標系

$$\beta = \frac{b}{b_0} = K r^{-2} \quad \dots\dots (5)$$

式 (2) は波向線方程式 (ray equation)、式 (3) は波向線間隔方程式 (equation of ray separation factor) あるいは波の集中度方程式 (equation of wave intensity) と呼ばれており、後者は Munk と Arthur (1952)³⁾ が導いたものである。

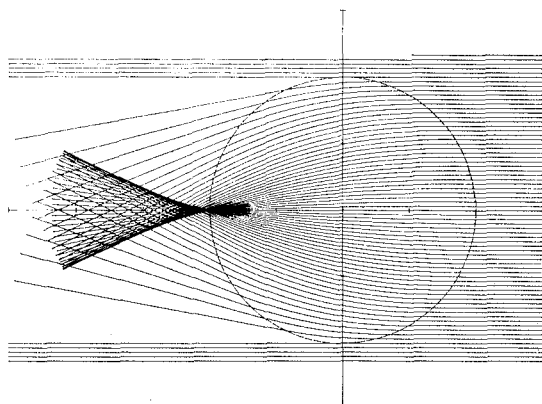


図-3 焦線の形成

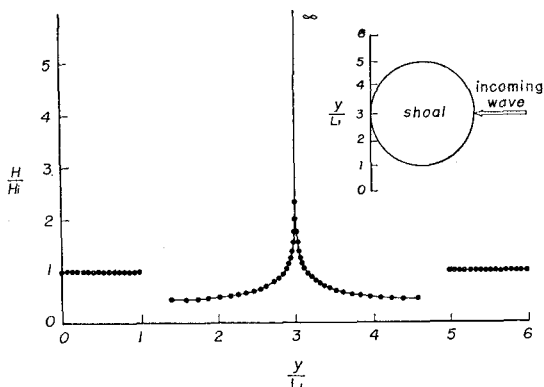


図-4 幾何光学的屈折理論による波高分布

図-3 は、式 (2) を数値計算で解いて求めた球面浅瀬付近の波向線を図化して示したものである。この場合、浅瀬背後で波向線は互いに交差し、図中太線に見えるいわゆる焦線* (caustic) を形成する。幾何光学的屈折の解釈ではこうした焦線上で波高無限となることになる。

図-4 に、式 (3) より求めた波高比分布の一例を示している。このように中央付近で波高無限大となってしまうが、あとで示す数値波動解析や水理模型実験の結果では、この最大波高比は約 2.1 となるにすぎない。

3. 基礎方程式

前報において、一定水深領域での波の変形を求める基礎方程式として、次の波動方程式を導いた。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\frac{1}{k} \tanh kh \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (6)$$

ここに、 u_0, v_0 は表面における粒子速度成分、 η は水位である。

これは、任意水深領域においても、水深変化がゆるやかな場合、そのまま近似式として成り立つ。ここでは、そうした領域での屈折問題に限定し、式 (6) を基礎方程式とする。この際、周期 $T (= 2\pi/\sigma)$ と波長 $L (= 2\pi/k)$ には、周知の関係

$$\sigma^2 = kg \tanh kh \quad \dots\dots (7)$$

が成り立ち、場所の関数で与えられる水深 $h(x, y)$ に対応して、これより $k(x, y)$ が求まる。

4. 浅水度に対する補正

(1) 波動方程式による近似

前章で示した基礎方程式は、波速変化に伴う波の屈折

* 焦線とは、光学の分野において光線がそれに接しているような曲線に与えられた名前である。

ばかりでなく、水深変化に伴う波高変化も同時に含んでいる。しかし、その波高変化は群速度の関数でなく、波速の関数となる。ここでは、まずこうした波動方程式による近似の意味について説明する。

水深変化による波の変形のわかりやすい例として、図-5

に示すように $x=0$

で水深 h_1 から h_2 に

階段状に変化する場合を考える。こうした場合の速度ポテンシャルの解は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= (A_0 e^{ikx} + Q_0 e^{-ikx}) \frac{\cosh k(z+h_1)}{\cosh kh_1} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-k_m x} \frac{\cos k_m(z+h_1)}{\cos k_m h_1} \quad x > 0 \\ \phi_2 &= P_0 e^{ik'x} \frac{\cosh k'_n(z+h_2)}{\cosh kh_2} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} P_n e^{k'_n x} \frac{\cos k'_n(z+h_2)}{\cos k'_n h_2} \quad x < 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(8)}$$

ただし、 $e^{i\omega t}$ を省略してあり、また

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 &= kg \tanh kh \\ &= -k_m g \tan k_m h \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(9)}$$

の関係がある。

各領域における係数値は $x=0$ における次の境界条件から求められる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \phi_2 \quad (\text{圧力の連続}) \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \quad (\text{流速の連続}) \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(10)}$$

このように、厳密解では無限級数項を含んでおり、そのため係数を決める際の手続きによって、群速度 c_g が現われる。ただし、級数項による波は、通常の一定水深領域中の波動のように波長を有した進行波でなく、1周期にわたるエネルギー輸送には関係ない。したがって、厳密解におけるエネルギー輸送の連続性は、次のようになる。

$$p^2 c_{g*} + q^2 = 1 \quad \text{.....(11)}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} p &= \left| \frac{P_0}{A_0} \right| \quad (\text{伝達率}) \\ q &= \left| \frac{Q_0}{A_0} \right| \quad (\text{反射率}) \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(12)}$$

$$c_{g*} = \frac{c_{g2}}{c_{g1}} \quad \text{.....(13)}$$

c_{g1} および c_{g2} は、それぞれ領域 1, 2 における群速度であり、添字を省いて次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} c_g &= nc \\ n &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(14)}$$

数値波動解析法で用いる基礎方程式は、式 (8) にお

ける第 1 項のみを対象としたものであり、級数項に相当するものは含んでいない。

(2) 浅水度補正係数

一方、図-5 を対象とした数値波動解析法の基礎方程式に対する解析解は、長周期波に対して水路幅員変化による解を求めたのと同様に扱って⁴⁾、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{2}{1+c_*} \\ q &= \left| \frac{1-c_*}{1+c_*} \right| = |p-1| \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(15)}$$

ここに、

$$c_* = \frac{c_2}{c_1} \quad \text{.....(16)}$$

これから、

$$p^2 c_* + q^2 = 1 \quad \text{.....(17)}$$

となり、反射が小さいとすれば、伝達率 p は波速比 c_* の $-1/2$ 乗に等しくなる。また、式 (11) と比較して、群速度 c_g の代りに波速 c となっていることがわかる。

一樣斜面の場合でも、反射が無視できるとすれば、当該地点で図-5 のように階段状に変化するとしたものと同じである。したがって、数値波動解析法におけるこうした水深変化による波高変化を、見掛け浅水度係数 K_s' と呼ぶことにすれば、次のように与えられる。

$$K_s' = c_*^{-1/2} \quad \text{.....(18)}$$

一方、通常の浅水度係数 K_s は、式 (11) から同様に反射を無視して、次のようになる。

$$K_s = c_{g*}^{-1/2} = (n_* c_*)^{-1/2} \quad \text{.....(19)}$$

これは、深海量を基準とすれば、通常の微小振幅波理論によるものと一致する。

したがって、浅水度について式 (19) のような関係を維持しようとするば、見掛け浅水度係数に次の補正値を乗じてやればよい。

$$f_s = n_*^{-1/2} = \left(\frac{1 + \frac{2kh_1}{\sinh 2kh_1}}{1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}} \right)^{1/2} \quad \text{.....(20)}$$

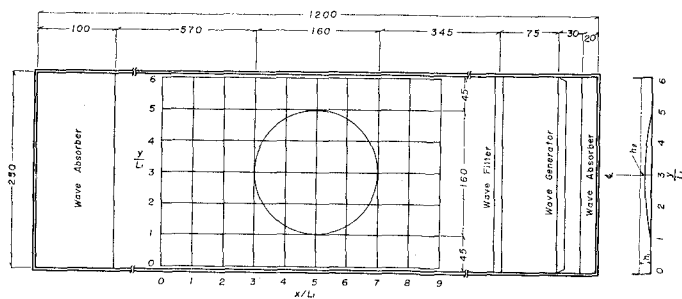
これを浅水度補正係数と呼ぶ。

深海を基準としたこの値は、深海での 1 から長波領域での 0.707 まで変化する。こうした変化は、基準となる領域が浅海であればあるほど小さくなり、長波領域のみでは 1 である。これは、そこで波速と群速度が一致するため、補正の必要がなくなることによる。

一樣斜面上の屈折なしの純然たる水深変化による波の変形について、数値波動解析法を適用した計算では、上述の関係は完全に実証された。後の計算でも、こうした浅水度補正を行なっている。

5. 球面浅瀬への適用と実験的検証

(1) 対象とする球面浅瀬と計算条件



図—6 球面浅瀬の配置

計算および水理模型実験で対象とする球面浅瀬を図—6に示す。浅瀬の底断面における直径は、そこでの波長 L_1 の4倍である。計算領域は、これを含んだ $8L_1 \times 6L_1$ の領域とし、周辺に完全反射の仮想境界を設けている。 $x/L_1=8$ で x の負の方向に伝播する入射波を与え、静穏領域中 $x/L_1=7$ に波の先端が達した時を初期状態とし、 $x/L_1=0$ の仮想境界からの反射波が浅瀬近辺に戻る以前に計算を終了する。実際計算は、現象が $y/L_1=3$ に対し完全に対称であるから、そこに完全反射の境界があるものとして、半分の領域で行なっている。

一定水深領域における水深 h_1 と球面浅瀬頂点における水深 h_2 は、次のとおりである。

$$h_1/L_1=0.3750, \quad h_2/L_1=0.1186$$

格子間隔 $\Delta x, \Delta y$ および時間間隔 Δt は、次の値を用いた。

$$\frac{\Delta x}{L_1} = \frac{\Delta y}{L_1} = \frac{1}{15}, \quad \frac{\Delta t}{T} = \frac{1}{24}$$

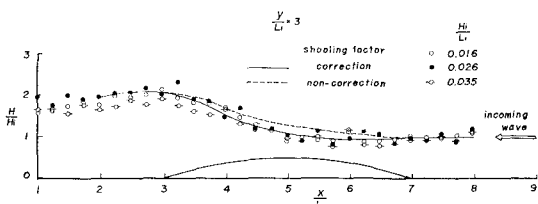
水理模型実験による水深と波長は、次のとおりである。

$$h_1=15\text{ cm}, \quad h_2=5\text{ cm}, \quad L_1=40\text{ cm}$$

なお、こうした球面浅瀬による屈折の問題は、Pierson (1951)⁶⁾ が波向線交差の物理的意味の観点から、実験を含めた考察を行なっているが、波高の大きさに関する数値的検討はしていない。

(2) 計算および実験結果

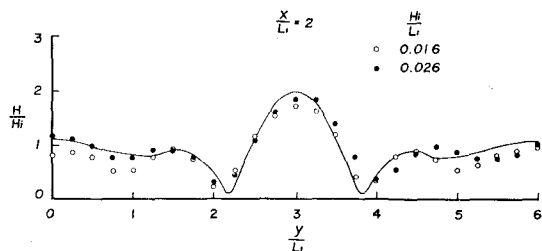
図—7は、浅瀬頂点を通る入射波の進行方向軸 ($y/L_1=3$) 上の波高分布を比較したものである。計算結果には、浅水度係数未補正のものも含めて示してある。実験は、全域にわたってほぼ正弦波形と見なせる範囲の波高で行なった。



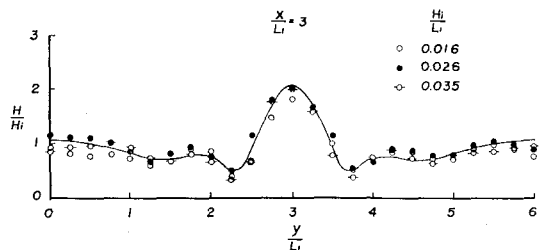
図—7 波高分布 (1)

実験結果は、浅水度係数を補正したものにやや近く、全体に計算によるものとよく合っている。計算波高分布は、浅瀬に達した付近から頂点までやや減少、浅瀬背面で増加している。最大波高比は、浅瀬終端をすぎた付近で約2.1である。

図—8, 9に入射波の進行方向と直角軸上での同様な波高分布を示している。計算と実験はきわめてよく合っている。



図—8 波高分布 (2)



図—9 波高分布 (3)

6. あとがき

本研究は、屈折計算における波向線交差の取り扱いに対する現場からの要請によって促進された。

ここ20年にわたって、屈折計算はもっぱら幾何光学的近似に基づいた作図法によって行なわれてきた。近年、電子計算機による屈折計算が報告されているが、それにしても作図法と同原理に基づくものであり、波向線交差問題を解決するものではない。

われわれの数値波動解析法は、一定水深領域における微小振幅波理論に基づいた近似という点では、現行理論の出発点と同じであるが、屈折における回折効果を含めたものであり、波向線交差を含む場合にも合理的に適用できる。こうした意味で、現行屈折理論の実用的には最大の難点を克服した方法といえる。

本論文では取りあえずこれを球面浅瀬に対し適用し、水理模型実験による検証を与えた。具体的問題にも同様に適用可能である。

参 考 文 献

- 1) 伊藤喜行・谷本勝利: 数値波動解析法とその応用—構造物周辺の波—, 第 18 回海岸工学講演会論文集, 1971.
 - 2) Griswold, G.M.: Numerical calculation of wave refraction, Journal of Geophysical Research, Vol. 68, No. 8, 1963.
 - 3) Munk, W.H. and R.S. Arthur: Wave intensity along a refracted ray, National Bureau of Standards, U.S., Circular 521, Gravity Waves, 1952.
 - 4) 伊藤喜行・土岐祥介・森平倫生: 長周期波に対する防波堤の効果に関する計算 (第 2 報), 港湾技術研究所報告, 第 3 巻第 7 号, 1965.
 - 5) Pierson, W.J., Jr.: The interpretation of crossed orthogonals in wave refraction phenomena, Technical Memorandum No. 21, Beach Erosion Board, Corps of Engineers, 1951.
-