

非保存系物質拡散の数値解法について

堀 口 孝 男*

1. まえがき

非保存系の拡散現象を対象とする場合には、代表的な汚染物質として、first stage の最終 BOD をとりあつかうことが多い。衛生工学の分野で、河川、水路におけるこれらの現象を数値解析の面から検討しているのは、W. E. Dobbins をはじめとする New York 大学のグループである。この数値解法を平面的な広さを有する海域に拡張することは、すでに筆者が保存系物質の拡散で行なったように、Relaxation method を適用することにより、それほどの困難もなく行なわれ、BOD の消失、BOD の拡散現象などを追跡して大局的な判断をくだすことは可能となる。

BOD の消失に関する溶存酸素すなわち DO は、水質の自浄作用、生物の生存度などの指標となるもので、BOD の脱酸素反応が大きければ DO は小さくなり、DO がなくなれば BOD の脱酸素反応は停止して、逆に蓄積する傾向になる。もとより DO には水面からの aeration、植物の光合成による付加、生物の呼吸による消費など、DO の収支は当然考慮されなければならない。

これら二つの量を拡散方程式の数値解法から検討するには、連立の形で行なわれるが、主動的立場は BOD の方程式であり、DO の方程式は補完的な色彩が強い。ここで問題となるのは、BOD、DO の方程式に表わされてくる各係数の値である。通常の河川または感潮河川域では、室内実験あるいは現地調査により、係数の値はかなり検討されている。しかしながら、海域においてはこの種の調査が不十分で、いかなる値を採用するのがよいかきめがたい。したがって、ここでは、今までに知られている範囲の値を選んで使用することにした。

2. 計算方法

水深方向に一様化された BOD の方程式は次のようになる。

$$(h+\zeta) \frac{\partial S}{\partial t} = -(h+\zeta) u \frac{\partial S}{\partial x} - (h+\zeta) v \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ K(h+\zeta) \frac{\partial S}{\partial x} \right\}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ K(h+\zeta) \frac{\partial S}{\partial y} \right\} - (K_1 + K_3)(h+\zeta)S + (h+\zeta)S_a \dots \quad (1)$$

ここで

S : first stage の BOD 濃度

S_a : 特定の個所から排出される BOD 濃度

h : 平均水面よりの水深

ζ : 平均水面よりの水位

u, v : x 方向、 y 方向の流速

K : 拡散係数

K_1 : BOD の脱酸素反応率

K_3 : 沈殿、吸収による BOD の減少率

同様に水深方向に一様化された DO の方程式は、次式で表わされる。

$$(h+\zeta) \frac{\partial C}{\partial t} = -(h+\zeta) u \frac{\partial C}{\partial x} - (h+\zeta) v \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ K(h+\zeta) \frac{\partial C}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ K(h+\zeta) \frac{\partial C}{\partial y} \right\} - K_1(h+\zeta)S + K_2(h+\zeta)(C_s - C) + (h+\zeta)C_b \dots \quad (2)$$

ここで

C : 溶存酸素濃度

K_2 : 再ばっ気係数

C_s : 酸素飽和濃度

C_b : 光合成、呼吸などによる溶存酸素の増減

座標系を 図-1 のようになるととき、式(1)の差分化は、第 16 回海岸工学講演集で説明したものと同様な方法で行なわれるが、新たにつけ加わった項は次のように表現する。

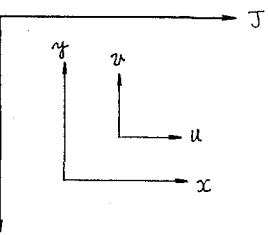


図-1 座標系

$$(K_1 + K_3)S = (K_1 + K_3)_{ij} \frac{S_{ij}^{n+1} + S_{ij}^n}{2}$$

S_a は河口、下水処理場、工業地帯の周辺から排出されるものである。排水量と汚濁負荷量のうち BOD 負荷量とみなされるものをとり、1 個所からの排出は周辺数

* 正会員 運輸省港湾局防災課長

個の格子点に分割した。これは一つの点で濃度が極端に増大して、計算誤差が大きくなるのを防ぐためである。このようにして、 S_a に関する項を除いた式の差分化は次のようになる。

$$\begin{aligned} & AS_{ij}^{n+1} + BS_{ij+1}^{n+1} + CS_{ij-1}^{n+1} + DS_{i-1j}^{n+1} + ES_{i+1j}^{n+1} \\ & = FS_{ij}^n \end{aligned} \quad (3)$$

ここで

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{1}{(h+\zeta)_{ij}^{n+1}} - \frac{\Delta t}{4\Delta s^2} [(K_{ij+1} + K_{ij})((h+\zeta)_{ij+1}^{n+1} \\ &\quad + (h+\zeta)_{ij}^{n+1}) \\ &\quad + (K_{ij} + K_{ij-1})((h+\zeta)_{ij}^{n+1} + (h+\zeta)_{ij-1}^{n+1}) \\ &\quad + (K_{i-1j} + K_{ij})((h+\zeta)_{i-1j}^{n+1} + (h+\zeta)_{ij}^{n+1}) \\ &\quad + (K_{ij} + K_{i+1j})((h+\zeta)_{ij}^{n+1} + (h+\zeta)_{i+1j}^{n+1})] \\ &\quad + \frac{(K_1 + K_3)_{ij}}{2} \cdot \Delta t \\ B &= \frac{\Delta t}{2\Delta s} u_{ij}^{n+1} - \frac{1}{(h+\zeta)_{ij}^{n+1}} - \frac{\Delta t}{4\Delta s^2} (K_{ij+1} + K_{ij}) \\ &\quad \times ((h+\zeta)_{ij+1}^{n+1} + (h+\zeta)_{ij}^{n+1}) \\ C &= -\frac{\Delta t}{2\Delta s} u_{ij}^{n+1} - \frac{1}{(h+\zeta)_{ij}^{n+1}} - \frac{\Delta t}{4\Delta s^2} (K_{ij} + K_{ij-1}) \\ &\quad \times ((h+\zeta)_{ij}^{n+1} + (h+\zeta)_{ij-1}^{n+1}) \\ D &= \frac{\Delta t}{2\Delta s} v_{ij}^{n+1} - \frac{1}{(h+\zeta)_{ij}^{n+1}} - \frac{\Delta t}{4\Delta s^2} (K_{i-1j} + K_{ij}) \\ &\quad \times ((h+\zeta)_{i-1j}^{n+1} + (h+\zeta)_{ij}^{n+1}) \\ E &= -\frac{\Delta t}{2\Delta s} v_{ij}^{n+1} - \frac{1}{(h+\zeta)_{ij}^{n+1}} - \frac{\Delta t}{4\Delta s^2} (K_{ij} + K_{i+1j}) \\ &\quad \times ((h+\zeta)_{ij}^{n+1} + (h+\zeta)_{i+1j}^{n+1}) \\ F &= 1 - \frac{(K_1 + K_3)_{ij}}{2} \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (4)$$

DO の差分方程式も BOD の場合と同様で、新たにつけ加わった項に対しては次の操作をほどこしている。

$$\begin{aligned} K_1 S &= (K_1)_{ij} \frac{S_{ij}^{n+1} + S_{ij}^n}{2} \\ K_2 (C_s - C) &= (K_2)_{ij} C_{sij} - (K_2)_{ij} \frac{C_{ij}^{n+1} + C_{ij}^n}{2} \end{aligned}$$

DO の差分方程式は式(5)で表わされる。ただし、 C_b の項は別途に考慮することとした。

$$\begin{aligned} & A' C_{ij}^{n+1} + B' C_{ij+1}^{n+1} + C' C_{ij-1}^{n+1} + D' C_{i-1j}^{n+1} + E' C_{i+1j}^{n+1} \\ & = F' C_{ij}^n + G' \end{aligned} \quad (5)$$

ここで

$$\begin{aligned} A' &= 1 + \frac{1}{(h+\zeta)_{ij}^{n+1}} - \frac{\Delta t}{4\Delta s^2} [(K_{ij+1} + K_{ij}) \\ &\quad \times ((h+\zeta)_{ij+1}^{n+1} + (h+\zeta)_{ij}^{n+1}) \\ &\quad + (K_{ij} + K_{ij-1})((h+\zeta)_{ij}^{n+1} + (h+\zeta)_{ij-1}^{n+1})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + (K_{i-1j} + K_{ij})((h+\zeta)_{i-1j}^{n+1} + (h+\zeta)_{ij}^{n+1}) \\ & + (K_{ij} + K_{i+1j})((h+\zeta)_{ij}^{n+1} + (h+\zeta)_{i+1j}^{n+1})] \\ & + \frac{(K_2)_{ij}}{2} \cdot \Delta t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B' &= B, \quad C' = C, \quad D' = D, \quad E' = E \\ F' &= 1 - \frac{(K_2)_{ij}}{2} \cdot \Delta t \end{aligned}$$

$$G' = \left\{ (K_2)_{ij} C_{sij} - (K_1)_{ij} \frac{S_{ij}^{n+1} + S_{ij}^n}{2} \right\} \Delta t \quad (6)$$

式(3), (4), (5), (6)において n は時間の step を示し、 i, j は空間の step を表わしている。式(3), (5)の解法には保存系拡散の場合と同様、加速 Liebmann 法を適用する。この場合、濃度は p.p.m. の単位で表現できるので、加速 Liebmann 法の収束条件は、 10^{-4} p.p.m. の誤差より小さいとき収束したものとして計算を進める。

非保存系物質の拡散計算においては、新たに排出される量と反応によって消失する量とを明確にして、smoothing の式

$$S'_{ij} = (S_{ij}^n)' \times \frac{M}{M'} \quad (7)$$

$(S_{ij}^n)'$: 直接的に計算から得られる濃度

M : 収支を明確にした総量

M' : time step n において直接的に計算から得られる総量

における M の量を求めなければならない。このため、たとえば BOD の場合、 Δt 時間に特定点から排出される BOD の総量、ならびに K_1, K_2 によって消失する総量を計算し、これをすでに Δt 時間前に計算された総量に代数的に加算して収支を明らかにする。ここで $C=0$ の場合には脱酸素反応が起こらなくなるので、 K_1 による BOD の消失は考慮されなくなる。

DO の方程式においては、 $0 \leq C \leq C_s$ の関係は常に保存されなければならない。一般に C_s は 1 気圧のもとで水温によって変化し、また塩分によっても影響をうける。今回の計算ではおおよその見当をつける意味で $C = 10$ p.p.m. としている。これは水温が 10°C 前後、塩素イオノン濃度 $\text{Cl}=10\%$ 程度に相当するもので、通常の場合では、 $C_s=7\sim8$ p.p.m. が妥当なところである。

海水の運動は tidal cycle の繰返しを基本とする。この計算では東京湾を対象としているので、従来と同様、数サイクルの繰返しによる潮せきの定常波形を求め、これを 30 cycles 繼続することにした。

3. 計算結果の検討

計算は 4 case に分けて行なった。Case I は現況、Case II は昭和 50 年～55 年の地形を対象とし、BOD 負

荷量はともに現在の値を用いている。Case III, IV は東京湾の横断道路を含めたもので、主航路の位置によって case が二つに分けられる。時代は昭和 60 年頃に相当し、そのときには BOD の負荷量はかなり減少した値で計算している。これら BOD 負荷量は環境庁の資料に基づいたものである。ただし、東京港についてはとくに埋立の影響をみるため、Case I では昭和 30 年以前の地形を取り、その結果と Case II の結果とを対比させることとした。

計算に用いた係数は次のとおりである。

$$K_1 = 0.3 \text{ /day}$$

$$K_3 = 0.15 \text{ /day}$$

K_2 は河川で用いられる村上の式を準用し、海域の場合には波による aeration が大きいものと考えて、次のように表わした。

$$K_2 = 100 \cdot n^{3/4} \frac{\{\sqrt{u^2 + v^2}\}^{9/8}}{(h + \zeta)^{3/2}} \text{ /day}$$

C_b については、光合成の効果と生物の呼吸現象による影響を表現してみることにした。この場合、光合成の効果は呼吸現象による酸素の消費に対して、約 3 倍の酸素を生産するといわれている。もちろん、太陽光線の到達する水深の浅い部分あるいは表層の部分がこの対象となるわけで、今回の計算では試験的な意味で、湾奥の船橋から検見川までの千葉県海岸で、水深 -5 m より浅い部分に次のような形で表わしてみた。

$$C_b = \frac{1}{24 \times 3600} \sin \frac{2\pi}{T} t$$

p.p.m./sec

$T: 24 \text{ hour}$

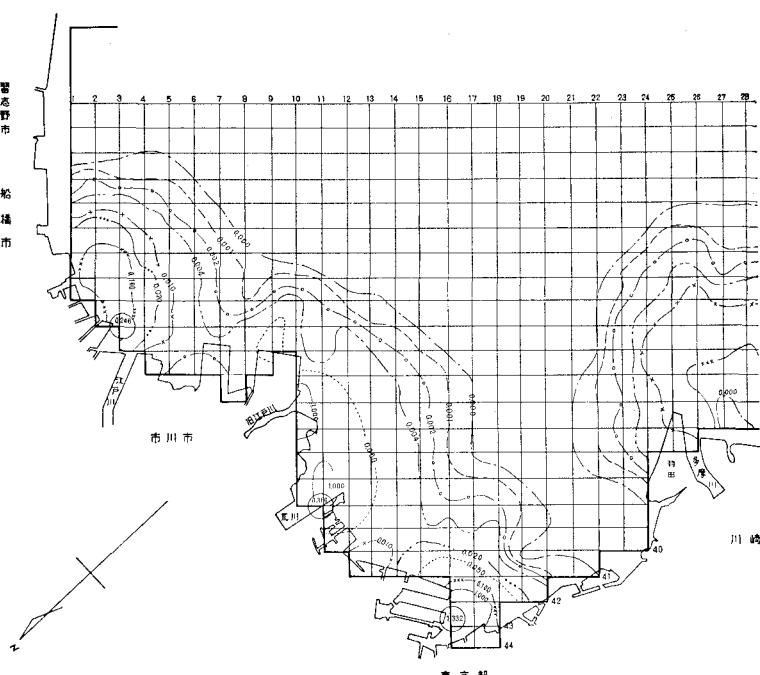
この形式は Case I のみに適用し、Case II, III, IV では、前面の済瀝、埋立によりこの項の影響はないものとして削除した。結果からみると、 C_b の項がある場合は BOD の蓄積を緩和させ、また DO の値も大きくなっている。したがって太陽光線の到達する浅い水域をつくり、ここに光合成に寄与する植物を成長させることは、浄化対策の有効な手段の一つとなり得るであろう。

Case I から IV までについて、東京湾全体の 30 tidal cycles を繰返した後の汚染分布を眺めてみると、Case I では、千葉県側袖ヶ浦地区、検見川地区の周辺は清浄域が残されているが、神奈川県側臨海工業地帯の排水による拡散は、

羽田の沖合から横須賀地先までおよび、その一部は木更津工業地帯からの排水と結びつく様相を呈している。Case II では、汚濁負荷量が現在と同様である限り、湾奥部は悪化する傾向がみられる。とくに埋立地ができるとその内側に水面が残されている部分では、BOD の蓄積は大きく、DO の消費がはげしい。これに反して湾口部においては Case II の場合、-23 m まで湾口航路を掘さくしたものとして計算しており、その結果からみると Case I に比して、湾口から木更津、横須賀にかけて浄化作用が働いていることを示している。Case III, IV においては、汚濁負荷量がかなり改善された排水となっているため、横断道路を不透過堤としても、湾奥部は Case II よりも悪化するような現象は起こしていない。

昭和 30 年以前の東京港と昭和 50~55 年頃のそれとを比較する場合、汚濁負荷量を同一として算出すれば次のようなことになる。BOD についてみれば、Case I では自浄作用と希釀作用がよく行なわれて、3 p.p.m. を越えるような結果は現われていない。これに反して Case II では、その範囲も拡がり全体に濃度は高くなっている。とくに入りくんだ地形の奥、すなわち河口周辺では蓄積が著しい(図-2, 図-3 参照)。DO はこの BOD の現象とうらはらの関係にあり、Case II にみるととく、隅田川、荒川放水路の周辺で大きく消費されてゆく(図-4, 図-5 参照)。

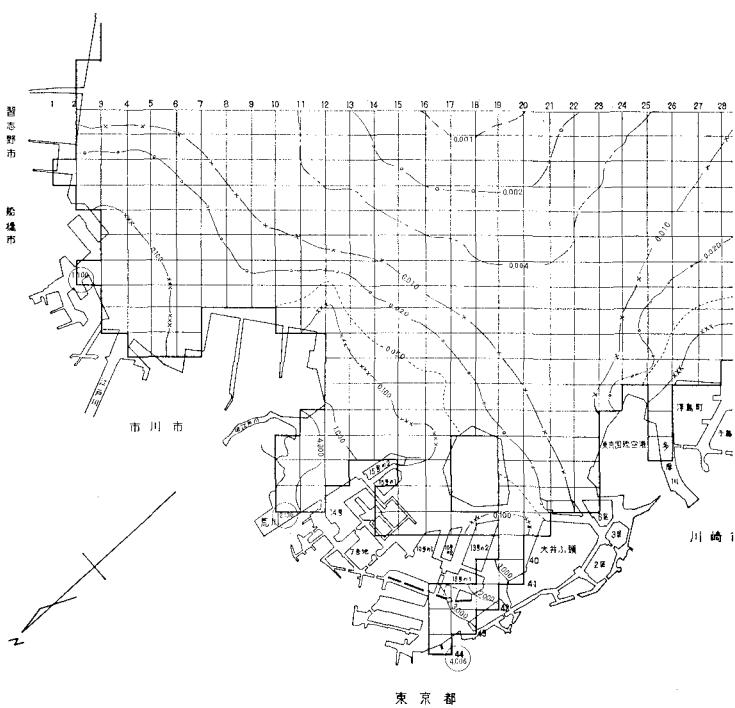
これらの現象を特定の点で検討してみる。No. 1 を隅



東京湾汚染計算 東京港付近汚染状況正面図 $S=1/100000$
(BOD 1 case 30 cycle OM)

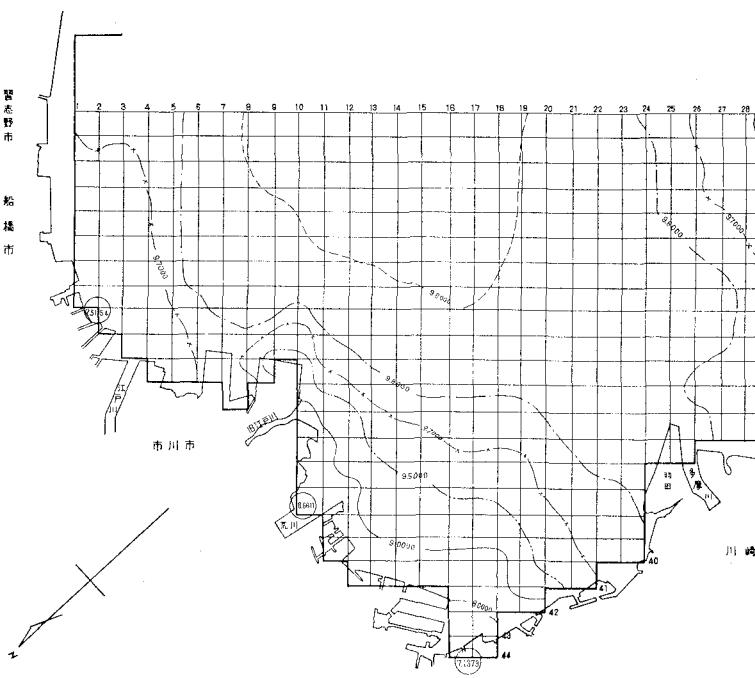
図-2 BOD の分布 Case I

田川の浜離宮付近、No. 2 を荒川放水路と旧江戸川との河口に近い点に選び、BOD の tidal cycle に対する変化を図-6、図-7 に示した。同様に DO の変化を図-8、



東京湾汚染計算 東京港付近汚染状況正面図 $S=1/100\,000$
(BOD 2 case 30 cycle OM)

図-3 BOD の分布 Case II



東京湾汚染計算 東京港付近汚染状況正面図 $S=1/100\,000$
(DO 1 case 30 cycle OM)

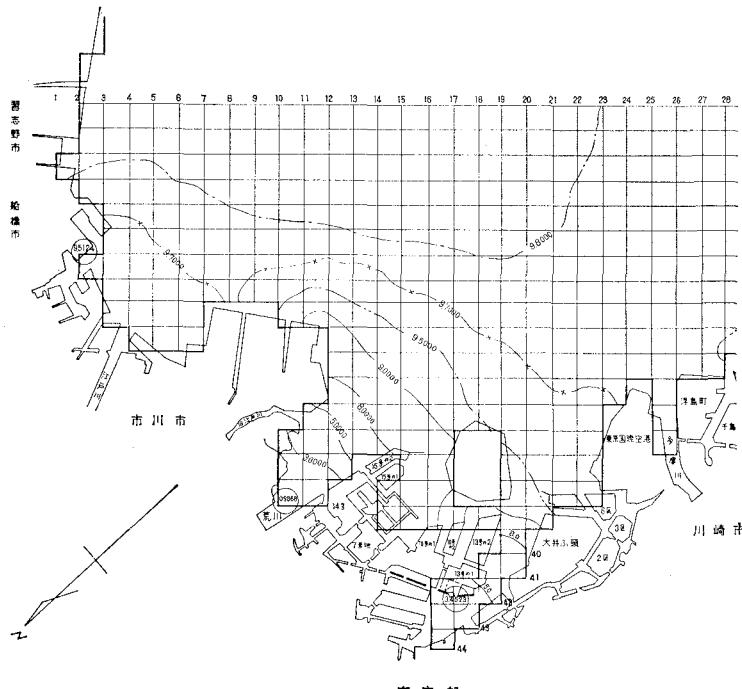
図-4 DO の分布 Case I

図-9 に示す。BOD はいずれの点、いずれの case でも 20 tidal cycles を過ぎると平衡状態に達しているが、Case I では 10 tidal cycles 頃から自浄作用がきいてくる結果を示している。これに対応しているのが DO の変化で、Case I では 12 tidal cycles を中心にして、酸素の消費が大きく、これを過ぎると DO の値が復元して平衡の状態に達している。しかしながら、Case II の DO は一方的に減少する結果を示しており、DO の消費を続けて、辛うじて BOD を平衡に保っていることを表わしている。もしこのまま進行して無酸素状態になれば、平衡状態にある BOD は一転して増加傾向になることを示唆している。ただし、この計算では経費の面から河川の流出入を省略しているので、本格的な検討は、河川流の BOD、DO を含んだ計算を行なわなければならない。これらの面から考察すれば、東京港の汚染では河川の DO が大きくとれるようすれば、流れによる拡散と DO の作用により、状態をかなり改善することに可能性を見出しえる。ということは、河川浄化を主とし、これに対応した埋立を計画することが理にかなっており、現状はこの関係が逆になっていることから混乱が生じたものと思われる。

4. む す び

以上述べたことから、時々刻々に排出される BOD などの汚染物質が、数十サイクルにわたる潮せき運動を通じて、拡散、脱酸素反応、吸着、沈澱の作用から分布が定常的な pattern になってゆく過程を、うかがい知ることができた。また DO についても、その消費と補給がBOD、DO の両者からの検討を加えることにより、内在する性格を判定することが可能となるようである。

単純な保存系の拡散と異なり、非保存系の拡散は二つの因子を用



東京湾汚染計算 東京港付近汚染状況正面図 $S=1/100\,000$
(DO 2 case 30 cycle OM)

図-5 DO の分布 Case II

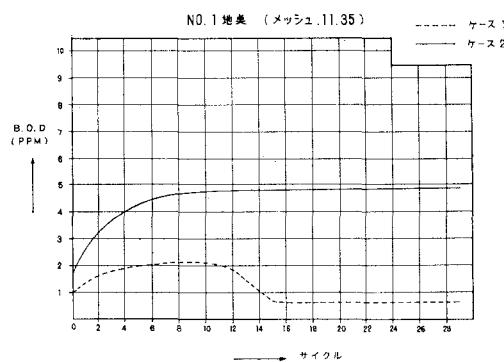


図-6 各サイクル 720M における BOD の変化曲線

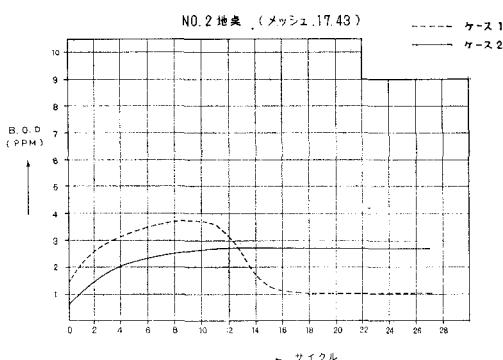


図-7 各サイクル 720M における BOD の変化曲線

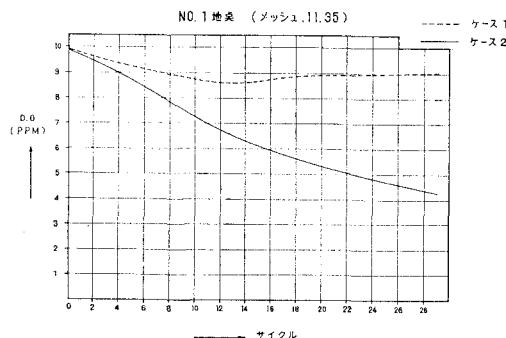


図-8 各サイクル 720M における DO の変化曲線

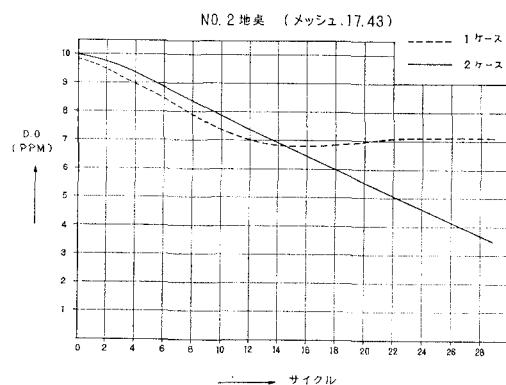


図-9 各サイクル 720M における DO の変化曲線

いることによって、かなりその内容を判定する材料が得られる。今後に残された問題は、海域における各係数の値あるいは光合成の効果を、局所的な影響も含めて綿密に調査することである。

参考文献

- 1) 堀口孝男: 汚染物質拡散の数値解法について, 第16回海岸工学講演会講演集, 土木学会, 1969
- 2) Dresnack, R., Dobbins, W. E.: Numerical analysis of BOD and DO profiles, SA 5, Oct., 1968, Proc. of A. S. C. E.
- 3) The 29th Progress Report: Solubility of atmospheric oxygen in water, SA 4, Jul., 1960, Proc. of A. S. C. E.