

非保存系物質拡散の数値解法について

堀 口 孝 男*

1. ま え が き

非保存系の拡散現象を対象とする場合には、代表的な汚染物質として、first stage の最終 BOD をとりあつかうことが多い。衛生工学の分野で、河川、水路におけるこれらの現象を数値解析の面から検討しているのは、W. E. Dobbins をはじめとする New York 大学のグループである。この数値解法を平面的な広さを有する海域に拡張することは、すでに筆者が保存系物質の拡散で行なったように、Relaxation method を適用することにより、それほど困難もなく行なわれ、BOD の消失、BOD の拡散現象などを追跡して大局的な判断をくだすことは可能となる。

BOD の消失に関係する溶存酸素すなわち DO は、水質の自浄作用、生物の生存度などの指標となるもので、BOD の脱酸素反応が大きければ DO は小さくなり、DO がなくなれば BOD の脱酸素反応は停止して、逆に蓄積する傾向になる。もとより DO には水面からの aeration、植物の光合成による付加、生物の呼吸による消費など、DO の収支は当然考慮されなければならない。

これら二つの量を拡散方程式の数値解法から検討するには、連立の形で行なわれるが、主動的立場は BOD の方程式であり、DO の方程式は補完的な色彩が強い。ここで問題となるのは、BOD、DO の方程式に表われてくる各係数の値である。通常の河川または感潮河川域では、室内実験あるいは現地調査により、係数の値はかなり検討されている。しかしながら、海域においてはこの種の調査が不十分で、いかなる値を採用するのがよいかきめがたい。したがって、ここでは、今までに知られている範囲の値を適当に選んで使用することにした。

2. 計 算 方 法

水深方向に一樣化された BOD の方程式は次のようになる。

$$(h+\zeta)\frac{\partial S}{\partial t} = -(h+\zeta)u\frac{\partial S}{\partial x} - (h+\zeta)v\frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{K(h+\zeta)\frac{\partial S}{\partial x}\right\}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left\{K(h+\zeta)\frac{\partial S}{\partial y}\right\} - (K_1+K_3)(h+\zeta)S + (h+\zeta)S_a \dots\dots\dots (1)$$

ここで S: first stage の BOD 濃度
S_a: 特定の個所から排出される BOD 濃度
h: 平均水面よりの水深
ζ: 平均水面よりの水位
u, v: x 方向, y 方向の流速
K: 拡散係数
K₁: BOD の脱酸素反応率
K₃: 沈澱, 吸収による BOD の減少率

同様に水深方向に一樣化された DO の方程式は、次式で表わされる。

$$(h+\zeta)\frac{\partial C}{\partial t} = -(h+\zeta)u\frac{\partial C}{\partial x} - (h+\zeta)v\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{K(h+\zeta)\frac{\partial C}{\partial x}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{K(h+\zeta)\frac{\partial C}{\partial y}\right\} - K_1(h+\zeta)S + K_2(h+\zeta)(C_s-C) + (h+\zeta)C_b \dots\dots\dots (2)$$

ここで C: 溶存酸素濃度
K₂: 再ばっ気係数
C_s: 酸素飽和濃度
C_b: 光合成, 呼吸などによる溶存酸素の増減

座標系を図-1のようにとるとき、式(1)の差分化は、第16回海岸工学講義集で説明したものと同様な方法で行なわれるが、新たにつけ加わった項は次のように表現する。

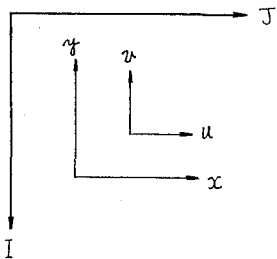


図-1 座標系

$$(K_1+K_3)S = (K_1+K_3)_{ij} \frac{S_{ij}^{n+1} + S_{ij}^n}{2}$$

S_a は河口、下水処理場、工業地帯の周辺から排出されるものである。排水量と汚濁負荷量のうち BOD 負荷量とみなされるものをとり、1 個所からの排出は周辺数

個の格子点に分割した。これは一つの点で濃度が極端に増大して、計算誤差が大きくなるのを防ぐためである。このようにして、 S_a に関する項を除いた式の差分化は次のようになる。

$$AS_{ij}^{n+1} + BS_{ij+1}^{n+1} + CS_{ij-1}^{n+1} + DS_{i-1j}^{n+1} + ES_{i+1j}^{n+1} = FS_{ij}^n \dots \dots \dots (3)$$

ここで

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{1}{(h+\zeta)_{ij}^{n+1}} \frac{\Delta t}{4\Delta s^2} [(K_{ij+1} + K_{ij}) \{(h+\zeta)_{ij+1}^{n+1} + (h+\zeta)_{ij}^{n+1}\} \\ &\quad + (K_{ij} + K_{i-1j}) \{(h+\zeta)_{ij}^{n+1} + (h+\zeta)_{i-1j}^{n+1}\} \\ &\quad + (K_{i-1j} + K_{ij}) \{(h+\zeta)_{i-1j}^{n+1} + (h+\zeta)_{ij}^{n+1}\} \\ &\quad + (K_{ij} + K_{i+1j}) \{(h+\zeta)_{ij}^{n+1} + (h+\zeta)_{i+1j}^{n+1}\} \\ &\quad + \frac{(K_1 + K_3)_{ij}}{2} \Delta t] \\ B &= \frac{\Delta t}{2\Delta s} u_{ij}^{n+1} - \frac{1}{(h+\zeta)_{ij}^{n+1}} \frac{\Delta t}{4\Delta s^2} (K_{ij+1} + K_{ij}) \\ &\quad \times \{(h+\zeta)_{ij+1}^{n+1} + (h+\zeta)_{ij}^{n+1}\} \\ C &= -\frac{\Delta t}{2\Delta s} u_{ij}^{n+1} - \frac{1}{(h+\zeta)_{ij}^{n+1}} \frac{\Delta t}{4\Delta s^2} (K_{ij} + K_{i-1j}) \\ &\quad \times \{(h+\zeta)_{ij}^{n+1} + (h+\zeta)_{i-1j}^{n+1}\} \\ D &= \frac{\Delta t}{2\Delta s} v_{ij}^{n+1} - \frac{1}{(h+\zeta)_{ij}^{n+1}} \frac{\Delta t}{4\Delta s^2} (K_{i-1j} + K_{ij}) \\ &\quad \times \{(h+\zeta)_{i-1j}^{n+1} + (h+\zeta)_{ij}^{n+1}\} \\ E &= -\frac{\Delta t}{2\Delta s} v_{ij}^{n+1} - \frac{1}{(h+\zeta)_{ij}^{n+1}} \frac{\Delta t}{4\Delta s^2} (K_{ij} + K_{i+1j}) \\ &\quad \times \{(h+\zeta)_{ij}^{n+1} + (h+\zeta)_{i+1j}^{n+1}\} \\ F &= 1 - \frac{(K_1 + K_3)_{ij}}{2} \Delta t \end{aligned} \dots \dots \dots (4)$$

DO の差分方程式も BOD の場合と同様で、新たにつけ加わった項に対しては次の操作をほどこしている。

$$\begin{aligned} K_1 S &= (K_1)_{ij} \frac{S_{ij}^{n+1} + S_{ij}^n}{2} \\ K_2 (C_s - C) &= (K_2)_{ij} C_{sij} - (K_2)_{ij} \frac{C_{ij}^{n+1} + C_{ij}^n}{2} \end{aligned}$$

DO の差分方程式は式 (5) で表わされる。ただし、 C_0 の項は別途に考慮することとした。

$$A'C_{ij}^{n+1} + B'C_{ij+1}^{n+1} + C'C_{ij-1}^{n+1} + D'C_{i-1j}^{n+1} + E'C_{i+1j}^{n+1} = F'C_{ij}^n + G' \dots \dots \dots (5)$$

ここで

$$\begin{aligned} A' &= 1 + \frac{1}{(h+\zeta)_{ij}^{n+1}} \frac{\Delta t}{4\Delta s^2} [(K_{ij+1} + K_{ij}) \\ &\quad \times \{(h+\zeta)_{ij+1}^{n+1} + (h+\zeta)_{ij}^{n+1}\} \\ &\quad + (K_{ij} + K_{i-1j}) \{(h+\zeta)_{ij}^{n+1} + (h+\zeta)_{i-1j}^{n+1}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ (K_{i-1j} + K_{ij}) \{(h+\zeta)_{i-1j}^{n+1} + (h+\zeta)_{ij}^{n+1}\} \\ &+ (K_{ij} + K_{i+1j}) \{(h+\zeta)_{ij}^{n+1} + (h+\zeta)_{i+1j}^{n+1}\}] \\ &+ \frac{(K_2)_{ij}}{2} \Delta t \end{aligned}$$

$$B' = B, \quad C' = C, \quad D' = D, \quad E' = E$$

$$F' = 1 - \frac{(K_2)_{ij}}{2} \Delta t$$

$$G' = \left\{ (K_2)_{ij} C_{sij} - (K_1)_{ij} \frac{S_{ij}^{n+1} + S_{ij}^n}{2} \right\} \Delta t \dots \dots \dots (6)$$

式 (3), (4), (5), (6) において n は時間の step を示し、 i, j は空間の step を表わしている。式 (3), (5) の解法には保存系拡散の場合と同様、加速 Liebmann 法を適用する。この場合、濃度は p.p.m. の単位で表現できるので、加速 Liebmann 法の収束条件は、 10^{-4} p.p.m. の誤差より小さいとき収束したものとして計算を進める。

非保存系物質の拡散計算においては、新たに排出される量と反応によって消失する量とを明確にして、smoothing の式

$$S_{ij}^{n'} = (S_{ij}^n)' \times \frac{M}{M'} \dots \dots \dots (7)$$

$(S_{ij}^n)'$: 直接的に計算から得られる濃度

M : 収支を明確にした総量

M' : time step n において直接的に計算から得られる総量

における M の量を求めなければならない。このため、たとえば BOD の場合、 Δt 時間に特定点から排出される BOD の総量、ならびに K_1, K_3 によって消失する総量を計算し、これをすでに Δt 時間前に計算された総量に代数的に加算して収支を明らかにする。ここで $C=0$ の場合には脱酸素反応が起こらなくなるので、 K_1 による BOD の消失は考慮されなくなる。

DO の方程式においては、 $0 \leq C_s \leq C_0$ の関係は常に保存されなければならない。一般に C_s は 1 気圧のもとで水温によって変化し、また塩分によっても影響をうける。今回の計算ではおおよその見当をつける意味で $C = 10$ p.p.m. としている。これは水温が 10°C 前後、塩素イオン濃度 $\text{Cl} = 10\%$ 程度に相当するもので、通常の場合では、 $C_s = 7 \sim 8$ p.p.m. が妥当なところである。

海水の運動は tidal cycle の繰返しを基本とする。この計算では東京湾を対象としているので、従来と同様、数サイクルの繰返しによる潮せきの定常波形を求め、これを 30 cycles 継続することにした。

3. 計算結果の検討

計算は 4 case に分けて行なった。Case I は現況、Case II は昭和 50 年～55 年の地形を対象とし、BOD 負

図—2 BOD の分布 Case I

田川の浜離宮付近, No. 2 を荒川放水路と旧江戸川との河口に近い点に選び, BOD の tidal cycle に対する変化を 図-6, 図-7 に示した。同様に DO の変化を 図-8,

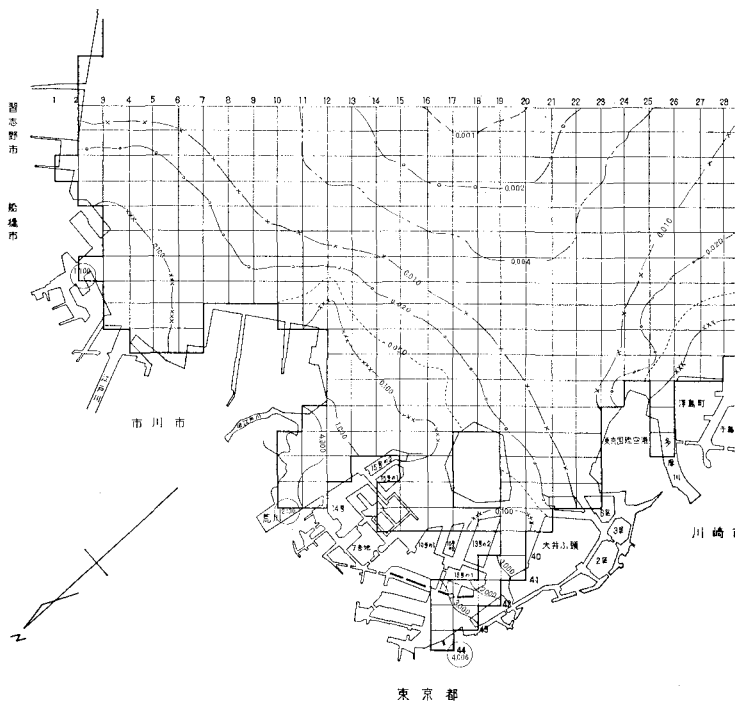
図-9 に示す。BOD はいずれの点, いずれの case でも 20 tidal cycles を過ぎると平衡状態に達しているが, Case I では 10 tidal cycles 頃から自浄作用がきいてくる結果

を示している。これに対応しているのが DO の変化で, Case I では 12 tidal cycles を中心にして, 酸素の消費が大きく, これを過ぎると DO の値が復元して平衡の状態に達している。しかしながら, Case II の DO は一方的に減少する結果を示しており, DO の消費を続けて, 辛うじて BOD を平衡に保っていることを表わしている。もしこのまま進行して無酸素状態になれば, 平衡状態にある BOD は一転して増加傾向になることを示唆している。ただし, この計算では経費の面から河川の流入を省略しているの, 本格的な検討は, 河川流の BOD, DO を含んだ計算を行なわなければならない。これらの面から考察すれば, 東京港の汚染では河川の DO が大きくとれるようにすれば, 流れによる拡散と DO の作用により, 状態をかなり改善することに可能性を見出し得る。ということは, 河川浄化を主とし, これに対応した埋立を計画することが理にかなっており, 現状はこの関係が逆になっていることから混乱が生じたものと思考される。

4. む す び

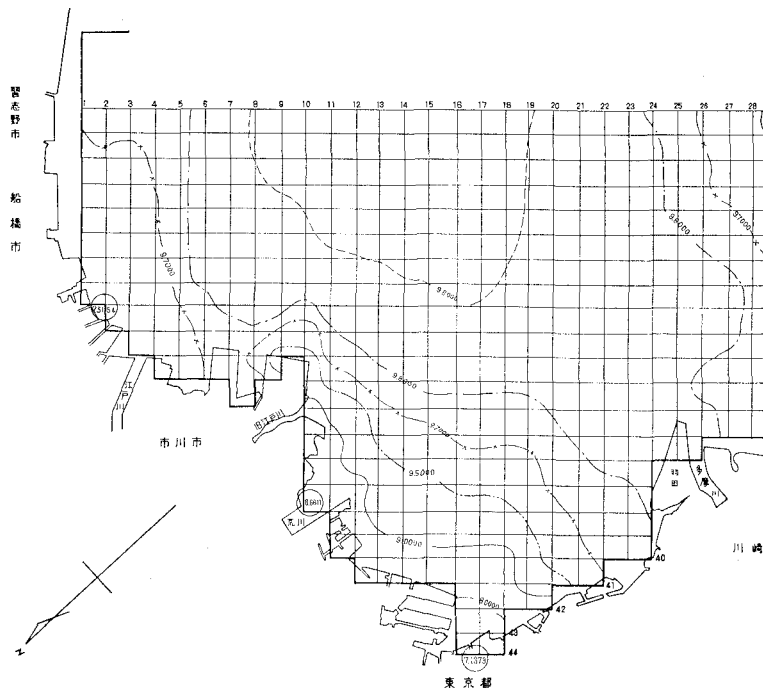
以上述べたことから, 時々刻々に排出される BOD などの汚染物質が, 数十サイクルにわたる潮せき運動を通じて, 拡散, 脱酸素反応, 吸着, 沈澱の作用から分布が定常的な pattern になってゆく過程を, うかがい知ることができた。また DO についても, その消費と補給が BOD, DO の両者からの検討を加えることにより, 内在する性格を判定することが可能となるようである。

単純な保存系の拡散と異なり, 非保存系の拡散は二つの因子を用



東京湾汚染計算 東京港付近汚染状況正面図 $S=1/100\ 000$
(BOD 2 case 30 cycle OM)

図-3 BOD の分布 Case II



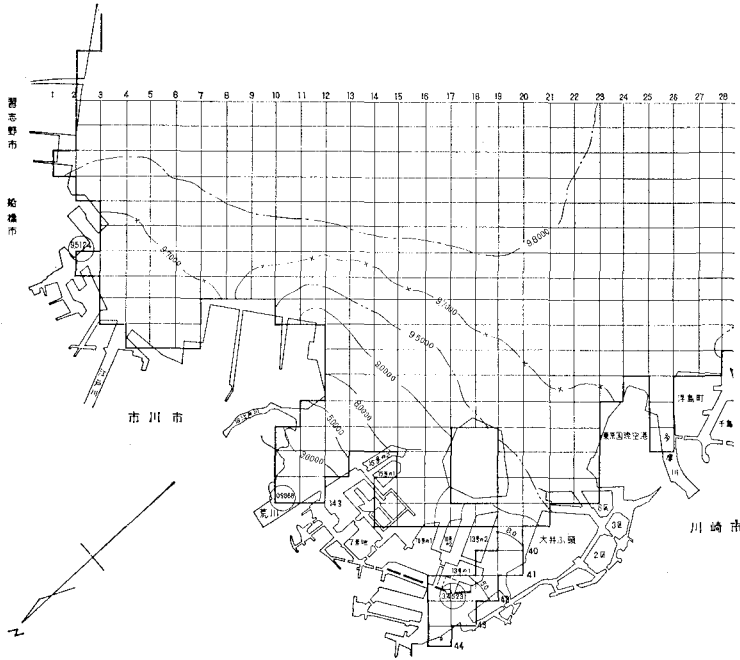
東京湾汚染計算 東京港付近汚染状況正面図 $S=1/100\ 000$
(DO 1 case 30 cycle OM)

図-4 DO の分布 Case I

いることによって、かなりその内容を判定する材料が得られる。今後に残された問題は、海域における各係数の値あるいは光合成の効果、局所的な影響も含めて綿密に調査することである。

参考文献

- 1) 堀口孝男: 汚染物質拡散の数値解法について, 第16回海岸工学講演会講演集, 土木学会, 1969
- 2) Dresnack, R., Dobbins, W.E.: Numerical analysis of BOD and DO profiles, SA 5, Oct., 1968, Proc. of A. S. C. E.
- 3) The 29th Progress Report: Solubility of atmospheric oxygen in water, SA 4, Jul., 1960, Proc. of A. S. C. E.



東京都
東京湾汚染計算 東京港付近汚染状況正面図 $S=1/100\,000$
(DO 2 case 30 cycle OM)

図-5 DO の分布 Case II

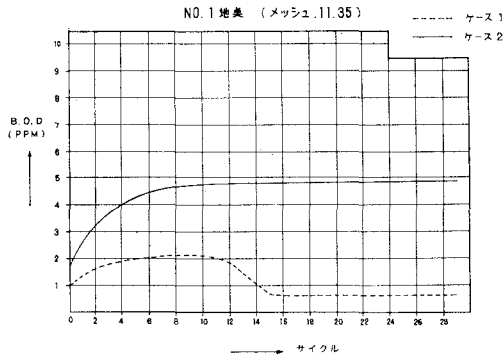


図-6 各サイクル 720 M における BOD の変化曲線

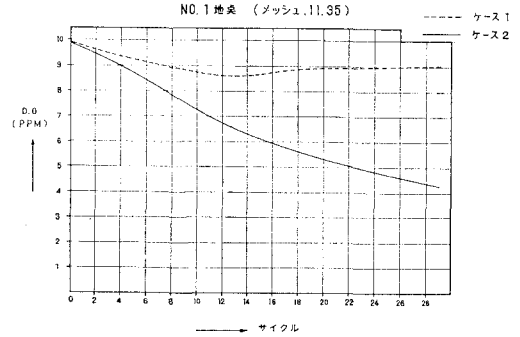


図-8 各サイクル 720 M における DO の変化曲線

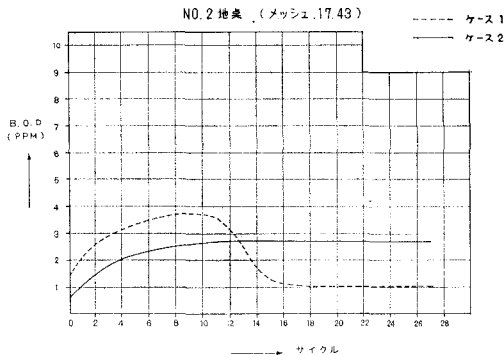


図-7 各サイクル 720 M における BOD の変化曲線

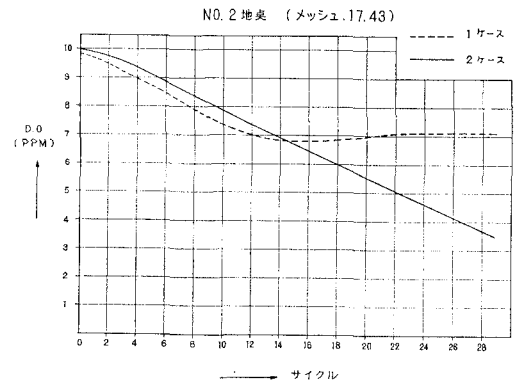


図-9 各サイクル 720 M における DO の変化曲線