

# 廃液浮上プリュームの濃度の拡散

林 泰造\*・土屋十圀\*\*・伊藤正樹\*\*\*

## 1. ま え が き

一様静止流体中へ鉛直上方に向けて放出される廃液プリュームの濃度拡散については次の Abraham の式 (1960 年)<sup>1)</sup> が今日まで最も広く用いられてきている。

$$C_m/C_0 = 9.7F_r^{2/3}(x/D+2)^{-5/3} \quad \dots\dots\dots (1)$$

しかし、この式は Froude 数が 10 程度以下の時には現象をよく記述するが、10 程度を超えると次第に現象と合わなくなり、Froude 数が十分大きくなると、

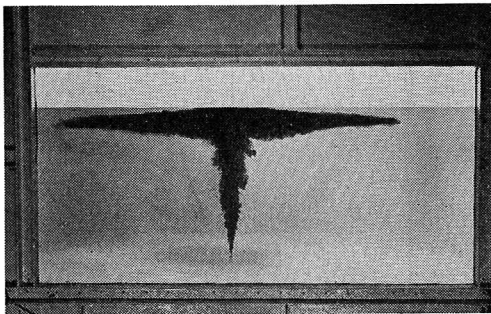
$$C_m/C_0 \propto (x/D+2)^{-1} \quad \dots\dots\dots (2)$$

となること、Frankel-Cumming の実験<sup>2)</sup>等により知られている。

そこで、筆者らは新たに理論解析を行なって新しい理論式をたて、また実験を行なってこの理論式の妥当性の検討を行なった。

## 2. プリュームの拡散現象

周囲の水にくらべて比重の軽い液体が水槽底部から鉛直上方に連続的に放出される場合を考える。放出液はプリュームとなってその放出流速および浮力の影響のもとに上昇してゆく。この上昇の過程において周囲水をひき込み稀釈されるときにそれ自身拡散して拡がってゆく。写真—1 は水面下に放出されたそのようなプリュームを示す。



写真—1 浮上プリューム

## 3. 現象の理論化

放出孔を原点にとり、プリュームの拡がり幅の半径方

向に  $r$  軸、プリュームの鉛直方向に  $z$  軸を考える。現象を  $r$  軸の周りに回転対称と考えると、まず質量の保存則は

$$\frac{\partial}{\partial z}(rw\rho) + \frac{\partial}{\partial r}(r w \rho) = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $\rho$  はプリュームの密度であり、 $\rho = \rho(r, z)$  である。

次に、 $z$  方向の運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial z}(r w^2 \rho) + \frac{\partial}{\partial r}(r w w \rho) = r c \cdot \Delta p g + \frac{\partial}{\partial r}(r \tau) \quad (4)$$

ただし、 $c$  は廃液の濃度で  $c = c(r, z)$ 、 $\Delta p$  は廃液の欠損密度で  $\Delta p = \Delta p(r, z)$ 、 $\tau$  はプリューム内部に働いているせん断力で  $\tau = \tau(r, z)$  である。ここで特徴的なことは、Morton 等の従来の理論<sup>3)</sup> では連行係数を取り入れる反面プリュームと周囲水との境界でせん断力を無視したとありあつかいになっているのに対して、ここではせん断力を考慮に入れている点である。

また、濃度の拡散方程式は

$$\frac{\partial}{\partial z}(r \cdot w \cdot c \Delta p) + \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot u \cdot c \Delta p) = -\frac{\partial}{\partial r}(r F) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 $F$  は半径方向への濃度拡散量 (フラックス) である。

式 (4) を考慮して式 (3) を書き直すと、運動エネルギー方程式に当る次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} r w^3 \rho \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2} r w w^2 \rho \right) \\ & = r \cdot w c \Delta p g + w \frac{\partial}{\partial r}(r \tau) \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

半径方向について十分離れたところを考えると  $w, c \Delta p, r F$ 、および  $r \tau$  は 0 となるならこのことを考慮して、式 (4)、(6)、(5) を  $r=0$  から  $r=\infty$  の間で積分すると次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty r w^2 \rho dr = \int_0^\infty r \cdot c \Delta p g dr \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty \frac{1}{2} r w^3 \rho dr \\ & = \int_0^\infty r w c \Delta p g dr - \int_0^\infty r \tau \frac{\partial w}{\partial r} dr \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty r w \cdot c \Delta p dr = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、プリューム放出源からの異なったところでの

\* 正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科  
\*\* 正会員 東京都建設局  
\*\*\* 正会員 中央大学大学院

鉛直方向の流速、廃液濃度の断面内分布形状 (lateral profiles) の相似性の仮定が成立するものとする。またせん断力は流速の2次関数と考える。ブリューム軸上の値については  $w_m, c_m$  とかき、ブリューム拡がりのある線形特性長を  $R$  とする。相似性の仮定から、

$$\frac{w}{w_m} = f\left(\frac{r}{R}\right), \quad \frac{c}{c_m} = h\left(\frac{r}{R}\right), \quad \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho w_m^2} = j\left(\frac{r}{R}\right)$$

この関係および  $\Delta\rho/\rho \equiv \Delta\rho/\rho_e$  であることを考慮すると式(7), (8), (9) はそれぞれ次のように書き直される。

$$\frac{\partial}{\partial z}(R^2 w_m^2) = a \cdot R^2 c_m \frac{\Delta\rho}{\rho_e} g \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(R^2 w_m^3) = b \cdot R^2 w_m c_m \frac{\Delta\rho}{\rho_e} g - \alpha \cdot R w_m^3 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(R^2 w_m c_m \Delta\rho) = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

ただし、 $\rho_e$  は周囲水の密度 (一様) であり、また、 $\eta, a, b, \alpha$  は次のような量である。

$$\eta = r/R$$

$$a = \int_0^\infty \eta h(\eta) d\eta / \int_0^\infty \eta f^2(\eta) d\eta$$

$$b = \int_0^\infty \eta f(\eta) h(\eta) d\eta / \int_0^\infty \frac{1}{2} \eta f^3(\eta) d\eta$$

$$\alpha = \int_0^\infty \frac{1}{2} \eta f'(\eta) j(\eta) d\eta / \int_0^\infty \frac{1}{2} \eta f^3(\eta) d\eta$$

このように、 $a, b$  および  $\alpha$  は分布関数形  $f, h$  および  $j$  により決定される定数である。断面内鉛直流速および濃度の分布形状は Rouse 等<sup>4)</sup> および Railston<sup>5)</sup> によって Gauss 分布であることが実験的にもとめられている。濃度  $c$  についても同様に考えて次の関係式を使う。

$$f = h = \exp\left(-\frac{r^2}{2R^2}\right) \quad \dots\dots\dots (13)$$

式(13)を上記諸式に代入して計算すると、 $a=2, b=3$  を得る。ただし、関数形  $j$  の形はわかっていないので形状定数  $\alpha$  は後に実験的に定めるべき定数として残る。そこで、これらの数値を代入すると、式(10)~(12)は次のようになる。

$$\frac{d}{dz}(R^2 w^2) = 2R^2 c \frac{\Delta\rho}{\rho_e} g \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\frac{d}{dz}(R^2 w^3) = 3R^2 w c \frac{\Delta\rho}{\rho_e} g - \alpha R w^3 \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{d}{dz}(R^2 w c \Delta\rho) = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

ただし、 $w_m, c_m$  および  $R$  は  $z$  のみの関数であるから、添字  $m$  は便宜的にとり除いて記すこととした。

#### 4. 理論式の解

このようにして3個の未知数  $w, R$  および  $c \Delta\rho$  に対して3個の式(14), (15) および (16) を得たのでこれらの式を解くことにより解が定められる。

まず、 $(11) \times 3w - (12) \times 2$  の操作から次式を得る。

$$dR/dz = \alpha$$

したがって、

$$R = \alpha z + \text{const.} \quad \dots\dots\dots (17)$$

同式からみられるように、 $\alpha$  はブリュームの拡がりに関係する拡がりの係数ともいうべきものである。式(17)中の積分定数は実際の放出源から下方にブリューム輪郭線を伸ばしてゆくことによって得られる交点、すなわち“仮想放出源点”をとることによって“消去”される。ここでは実際の放出位置源は  $z=z_0$  で示されることになる(図-1)。

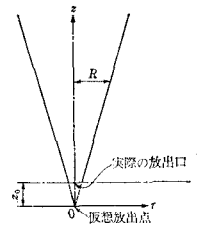


図-1 ブリューム放出口と仮想点

次に、式(16)を積分して次式を得る。

$$R^2 w c \Delta\rho = M_s / \pi = \text{const.} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ただし、 $M_s$  は放出孔から単位時間当りに放出される廃液物質の欠損質量で  $M_s = \pi(D/2)^2 U_0 \Delta\rho$ 、 $D$  は放出孔直径、 $U_0$  は放出孔における廃液の初速度、である。

式(17)および(18)の両式を式(14)あるいは式(15)に代入すると次式が得られる。

$$\frac{dw}{dz} + \frac{w}{z} = \frac{M_s g}{\pi \rho_e \alpha^2 z^2 w^2} \quad \dots\dots\dots (19)$$

上式は Bernoulli 形の微分方程式であり、容易にとけて、

$$w^3 = \frac{3M_s g}{2\pi \rho_e \alpha^2 z} + \frac{B}{z^3} \quad \dots\dots\dots (20)$$

をうる。ただし、 $B$  は積分定数である。さらに式(18)に式(17), 式(20)を代入して濃度について求めると次式が得られる。

$$c = \frac{M_s}{\alpha^2 z^2 \Delta\rho} \left\{ \frac{3M_s g}{2\pi \rho_e \alpha^2 z} + \frac{B}{z^3} \right\}^{-1/3} \quad \dots\dots\dots (21)$$

そこで内部フルード数  $F = U_0 / \sqrt{(\Delta\rho/\rho_e)gD}$  および  $M_s = \pi(D/2)^2 U_0 \Delta\rho$  を上式に代入すると、

$$c = \frac{U_0 D^2}{4\alpha^2 z^2} \left\{ \frac{3U_0^3}{8\alpha^2 F^2} \cdot \frac{D}{z} + \frac{B}{z^3} \right\}^{-1/3} \quad \dots\dots\dots (22)$$

を得る。境界条件

$$(c)_{z=z_0} = 1$$

により積分定数  $B$  を決定し、また、 $R_0 = \alpha z_0$ 、従って  $z_0 = D/2\alpha$  の関係式を考慮すると、若干の計算の結果次式を得る。

$$c = \left\{ \frac{F^2}{2\alpha^2(4\alpha F^2 - 3)} \right\}^{1/3} \left( \frac{z}{D} \right)^{-1} \times \left\{ 1 + \left( \frac{12\alpha^2}{4\alpha F^2 - 3} \right) \left( \frac{z}{D} \right)^2 \right\}^{-1/3} \quad \dots\dots\dots (23)$$

あるいは仮想源点から実際の放出源までの無次元距離、 $z_0/D = 1/2\alpha$ 、を考慮して上式を書き直し、さらに今後  $z$  を記号  $x$  とおきかえると、次式となる。

$$c = \left\{ \frac{F^2}{2\alpha^2(4\alpha F^2 - 3)} \right\}^{1/3} \left( \frac{x}{D} + \frac{1}{2\alpha} \right)^{-1} \times \left\{ 1 + \left( \frac{12\alpha^2}{4\alpha F^2 - 3} \right) \left( \frac{x}{D} + \frac{1}{2\alpha} \right)^2 \right\}^{-1/3} \dots (24)$$

同様に、流速についても、境界条件;  $(w)_{z=0} = U_0$  のもとで式 (20) 中の定数を定め、式 (20) を無次元化して示すと次のようになる。

$$\frac{U_m}{U_0} = \frac{w}{U_0} = \left( \frac{4\alpha F^2 - 3}{32\alpha^4 F^2} \right)^{1/3} \left( \frac{x}{D} + \frac{1}{2\alpha} \right)^{-1} \times \left\{ \left( 1 + \frac{12\alpha^2}{4\alpha F^2 - 3} \right) \left( \frac{x}{D} + \frac{1}{2\alpha} \right)^2 \right\}^{1/3} (25)$$

このようにして求められた式 (24) および (25) の両式が一般的な場合における理論解である。

図-2 および 図-3 はそれぞれ式 (24) および式 (25)

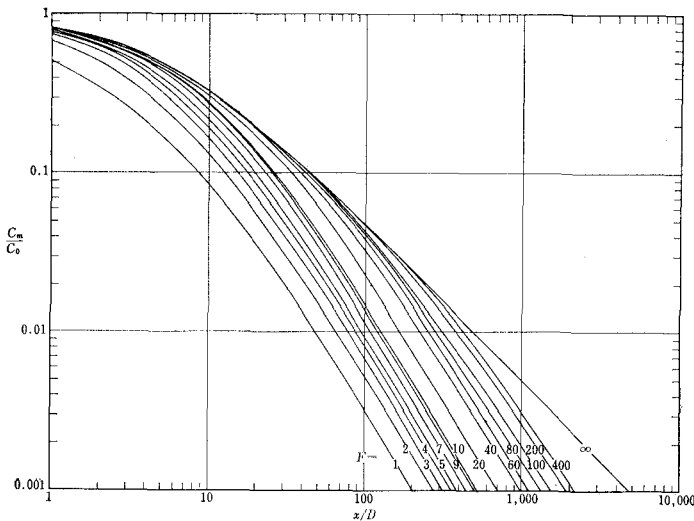


図-2 軸上濃度比値

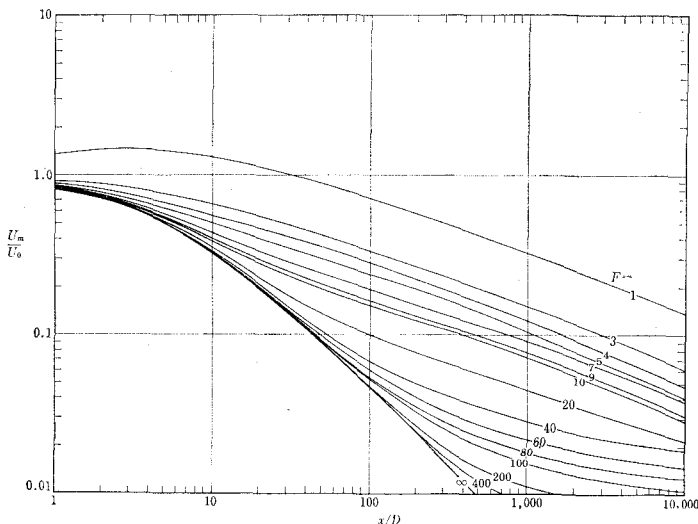


図-3 軸上流速比値

により、無次元濃度および無次元流速を Froude 数をパラメーターとして  $x/D$  について図示したものである。ただし、この計算に当っては、 $\alpha$  の値を与えることが必要である。そこで後にのべる実験の写真判定から得られたものと Priestley 等の研究<sup>6)</sup>に基づき、Priestley 等において採用された値  $\alpha \approx 0.1$  を本計算においても使用することとして、計算を行なったものである。

## 5. 実験装置および実験方法

実験に使用した水槽は中央大学理工学部水理実験室の鋼製水槽で、長さ 2.5m、幅 2.1m、高さ 1.8m、前面ガラス張りのものである。これに高さ 1.8m の蓋を載せて上部を被覆してある。なお、Abraham が使用した水槽の寸法は断面 1 ft × 1 ft、高さ 3 ft であるから本実験に

使用した水槽は容積で 111 倍も大きいことになる。この水槽底部中央に廃液放出ノズルとして内径 16mm、長さ 20mm の短管をとりつけ、水槽に所定の深さまで水道水を入れて静止状態をつくった。

廃液の放出については、廃液と水槽内に満たした水との密度差が所定の密度差をもつようにあらかじめエチルアルコールを混合し、これにトレーサーとして純度の高い食塩を混入した。さらに、写真撮影のためウォーター・ブルーを少量混入させて、これをもって“廃液”とした。これを水槽底部のノズルより連続放出させた。

ブリューム内での廃液濃度の測定はあらかじめ水槽中のブリューム軸線上にプローブ(電導度測定用セル)を上下に移動できる装置に設置し、これと電導度測定器(東亜電波工業製、CM-6M)とをケーブルで接続させて、多点レコーダーに 1 測定点につき 60 秒ごとに記録させた。ブリューム軸上の食塩電導度測定範囲は水面の影響が入らないように水面下約 1 cm から放出孔直上 5 cm の間で測定した。なお、食塩電導度と食塩濃度(重量パーセント)との関係はその都度検定を行なった。

## 6. 実験結果

図-4 は実験値を理論値(図-2)と比較したものである。理論と実験の一致の度合は Froude 数および  $x/D$  の値の広い範囲にわたって全体的にかなり良好であることが認められる。

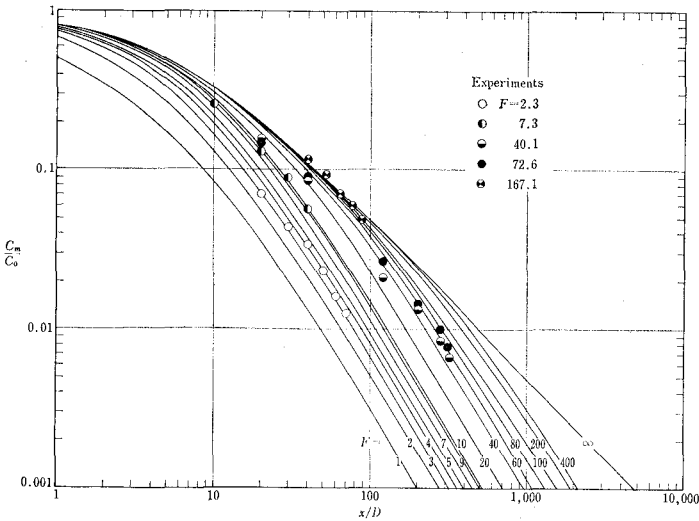


図-4 理論と実験値の比較

## 7. 考 察

本研究において得られた式 (24) および (25) の両式は、 $F \rightarrow \infty$  の場合には、それぞれ次のようになる。

$$c = (2\alpha)^{-1} \left( \frac{x}{D} + \frac{1}{2\alpha} \right)^{-1} \quad \dots\dots\dots (27)$$

および

$$\frac{U_m}{U_0} = (2\alpha)^{-1} \left( \frac{x}{D} + \frac{1}{2\alpha} \right)^{-1} \quad \dots\dots\dots (28)$$

式 (27) は Frankel-Cumming により求められていた形式 (−1 乗) の式と一致し、また式 (28) は軸対称噴流について確立されている形式の式である。

逆に Froude 数があまり大きくなくて、 $4\alpha F^2 \ll 3$  と考えられるような範囲においては、 $2\alpha \left( \frac{x}{D} + \frac{1}{2\alpha} \right) \gg 1$  となる  $x/D$  の値に対して式 (24) および式 (25) の両式はそれぞれ次のようになる。

$$c = \frac{1}{2 \sqrt[3]{3} \alpha^{4/3}} F^{2/3} \left( \frac{x}{D} + \frac{1}{2\alpha} \right)^{-5/3} \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$\frac{U_m}{U_0} = \frac{1}{2(4/3)^{1/3} \alpha^{4/3}} F^{-2/3} \left( \frac{x}{D} + \frac{1}{2\alpha} \right)^{-1/3} \quad \dots\dots\dots (30)$$

さらに、上式において  $\alpha \approx 0.1$  を代入すると、上の両式はそれぞれ次のようになる。

$$c = 7.47 F^{2/3} \left( \frac{x}{D} + 5 \right)^{-5/3} \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\frac{U_m}{U_0} = 3.35 F^{-2/3} \left( \frac{x}{D} + 5 \right)^{-1/3} \quad \dots\dots\dots (32)$$

濃度についての式 (29) は Abraham の式の形と一致する。式 (31) を Abraham の式 (1) と比べると、右辺カッコ内の  $x/D$  に加算される定数がそれぞれ 5 および 2 とかなり異なっているように見えるが、それらは放出口から仮想原点までの無次元距離で、 $x/D$  の値が小なる時以外は、2 の附加される値の違いはすぐに無視しうる

ものになる。一方、右辺の係数は重要なものであるが、式 (31) と Abraham の式 (1) とではかなりの近い値の係数になっていることが認められる。

図-5 は式 (1) を図示した周知の Abraham の図表である。 $F \neq \infty$  の場合の関係式 (1) は同図中の破線で示されており、 $F = \infty$  の場合の関係 (実線) とは全く異なった勾配 (−5/3 乗) の平行線群をなしているのに対して、筆者らの曲線群は式 (1) の線群から式 (2) の線は滑かに移行している。このことは筆者らの式が Froude 数の大きさについてなんらの制限なしに導かれたものであることから当然のことである。

また、同一の Froude 数、同一の  $x/D$

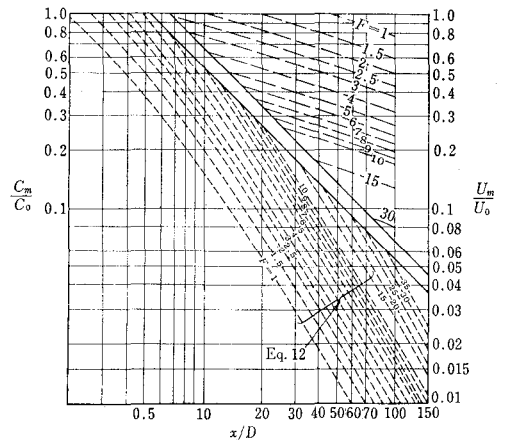


図-5 Abraham の図表

の値に対する無次元濃度を比較してみると、筆者らの式 (図表) の方が一般はやや小さくなるが、Abraham の式は実測よりもやや大きな値を与えることが知られていることもあわせ考えてみると当然のことといえよう。

## 8. む す び

静止した海域中に海底近くから鉛直上方に向けて放出される廃液の浮上ブリュームの濃度拡散の現象について理論的な解析を行ない、また実験も行なってその理論式の妥当性について検討した。

いままで、浮上ブリュームの軸上濃度について示す関係は Abraham の実験式によって説明されてきたが、ブリューム軸上濃度に関する式 (24) で新たに、一般的な形として記述することができる。また、流速の低減は式 (25) で表わされる。

これらは従来の諸理論より高い精度をもつものと考えられるのであるが、残された問題点の存するのはブリュ

ームの拡がり係数の値ともいうべき $\alpha$ に関してである。筆者らの理論はブリュームの拡がりの形として式(17)をえてはいるが実験によるとブリュームの拡がり方は $x/D$ が大となるにつれて次第に放物線となるのが認められる。 $\alpha$ についてはこのような問題点が考えられるので、今後さらに検討してゆきたい。

終りに、本研究に熱心に協力せられた当時中央大学生であった永松康夫（現清水建設）、小林博実（現大成建設）の二君に謝意を表する。

#### 参 考 文 献

- 1) Abraham, G.: Jet diffusion in liquid of greater density, Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of ASCE, Vol. 86, No. HY 6, June, 1960, pp. 1~13.
- 2) Frankel, R. J. and J. D. Cumming: Turbulent mixing phenomena of ocean outfalls, Journal of the Sanitary Engineering Division, Proceedings of the ASCE, Vol. 91, No. SA 2, April, 1965, pp.

- 33~59.
- 3) Morton, B. R., G. Taylor, F. R. S. and J. S. Turner: Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources, Proceedings, Royal Soc. of London, Series A, March 6, 1956, 11, pp. 1~23.
- 4) Railston, W.: Proceedings of the Physics Society, B, 67, 67, pp. 42.
- 5) Rouse, H., G. S. Yih and H. W. Humphreys: Tellus, 4, pp. 201.
- 6) Priestley, C. H. B. and F. K. Ball: Continuous convection from an isolated source of heat, Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, London, Vol. 81, 1955, pp. 144~157.
- 7) Loh-Nien Fan: Turbulent buoyant jets into stratified or flowing ambient fluids, W. M. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, Division of Engineering and Applied Science, California Institute of Technology, Report, No. KH-R-15, June 1967, pp. 1~133.
- 8) 林泰造・小泉俊夫: 浮上ブリュームの海域拡散, 土木学会第 26 回年次学術講演会講演集第 2 部, 1971, pp. 56~62.