

TIDAL BASIN における乱れと拡散

日 野 幹 雄*・高 須 修 二**

1. ま え が き

乱流ことに非等方性乱流の問題は、われわれにとって最も興味深いものである。しかし、その理論的研究は必ずしも十分とはいえない。本論文では、主流よりのエネルギー供給が周期的であり、その周期が乱れの時間スケールに較べて大きい流れを理論的に解析し、非等方性乱流の構造を明らかにしようと試みた。

平均流のエネルギーは、流れのシアによりマクロ・タービュランスのエディのエネルギーとなり、これは、慣性項の作用により次第に高周波の乱れのエネルギーに変換され発達していくものと考えられている。それゆえ、平均流速、すなわち主流の運動に周期性があれば乱れの構造もまたそれに関係している拡散係数にも当然周期性があらわれるものと考えられる。このような流れの中で特に速度の平均（十分に長い時間を考えて）が0であるようなものは最も考えやすいものであるが、そのような流れは外海と内海、あるいは外海と外海とを連結している水道内の潮流にみることができる。

本研究ではコリオリの力を無視できる短い矩形断面の直線水道における潮流を考え、レイノルズの運動方程式、エネルギー方程式等を用いて速度分布、乱れエネルギーさらに拡散係数を求め、それらの変動の性質を調べてみた。本論文では、この問題を解くのに数値計算法によらずに、純解析的に解を求めた。これにより乱流過程のメカニズムが明確になると考えるからである。

2. 基礎方程式

平均流速の方向を x 軸に採る。平均速度は x 方向に

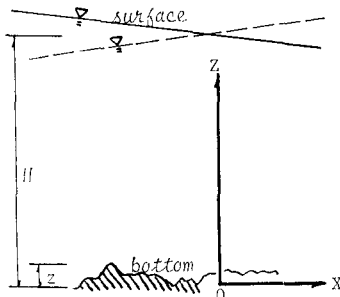


図-1 概略図

同様と考える。また、流れは z 方向にのみ速度勾配を持つと考える（図-1）。流れおよび乱れを記述するのは次の方程式である。

(1) レイノルズの運動方程式

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x}: \text{水面勾配}$$

k : 渦動拡散係数

(2) エネルギー方程式

$$\frac{\partial b}{\partial t} = k \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \alpha_b \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial b}{\partial z} - \epsilon \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし、

$$b (\text{乱れエネルギー}) = (\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2)/2$$

u' , v' , w' はそれぞれ x , y , z 方向の乱れ速度。

式(2)の右辺第1項はレイノルズ応力によるエネルギー生産、第2項は乱れによるエネルギー輸送、第3項は粘性によるエネルギー逸散を表わしている。壁面の近くではエネルギー生産とエネルギー逸散がほぼ平衡しており、エネルギー輸送の項はそれらと比較して無視できる。また水表面の近くではエネルギー生産の項が他の2項と比較して無視できる。

(3) 渦動拡散係数 k , エネルギー逸散 ϵ

問題が乱れに関する取扱いであるので、渦動拡散係数 k , エネルギー逸散 ϵ を支配する因子として乱れの平均速度 $\sqrt{b}$, 乱れのスケール l を用いるのが適当である。次元的考察により、これらを次のように乱れの特性量と関連づける。

$$k = c_0 l \sqrt{b} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\epsilon = c_1 \frac{b^{3/2}}{l} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし、 c_0 , c_1 は1のオーダーの比例定数。

(4) 混合長 l

渦動拡散係数、エネルギー逸散を支配する因子の1つに乱れのスケールを意味する混合長 l を用いた。 l を支配するパラメーターは

$$\frac{\sqrt{b}}{l}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sqrt{b}}{l} \right)$$

であり、Karman の相似仮説を拡張し、これを乱れの要

* 正会員 工博 東京工業大学工学部助教授

** 学生会員 東京工業大学大学院学生

素に関して表わして次式をうる。

$$l = -K \frac{\sqrt{b}}{l} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sqrt{b}}{l} \right) \dots\dots\dots (5)$$

ところで、ここで壁面の近くを考え、式(5)と $l = \kappa z$ を対応させてみると、乱れ強さの分布について次式の関係をうる。

$$b = c_2 z^{2(1-K/\kappa)}$$

Laufer 等の実験結果と比較すると、 K/κ の値として

$$\frac{K}{\kappa} \div 1.1$$

が求まる。すなわち K はカルマン定数 κ より1割程度大きい定数であると考えられる。

式(1)~(5)を用れば定常流の $\sqrt{b}$, $\bar{u}$, k を求めることができる。

3. 基礎方程式の変形 (I)

底面の影響の少ない水面近くの領域の潮汐による変動速度を

$$V(t) = U e^{i\omega t}$$

U : 最大流速

ω : 潮汐の角振動数

として、短周期の乱れ成分を除いた各点での平均速度 $\bar{u}$ を

$$\bar{u}(z, t) = W(z, t) + V(t) \dots\dots\dots (6)$$

と表わす。

式(6)を式(1)に代入すると

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial W}{\partial z}.$$

潮汐を一次元の自由長波と考えると、

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

であるから結局式(1)は

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial W}{\partial z} \dots\dots\dots (7)$$

と変形される。同様にして式(2)は

$$\frac{\partial b}{\partial t} = k \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 + \alpha_b \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial b}{\partial z} - \epsilon \dots\dots\dots (8)$$

となる。

問題を壁面の近くについて考えることにすれば式(8)の右辺第2項は無視することができ、さらに式(5)を用いる代わりに、

$$l = \kappa z \dots\dots\dots (9)$$

を用いてよい。

式(3), (4), (7), (8), (9)より

$$\frac{\partial W}{\partial t} = c_0 \kappa \frac{\partial}{\partial z} z \sqrt{b} \frac{\partial W}{\partial z} \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = c_0 \kappa z \sqrt{b} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 - \frac{c_1 b^{3/2}}{xz} \dots\dots\dots (11)$$

となり、問題は式(10), (11)の連立偏微分方程式を解くことになる。

4. 基礎方程式の変形 (II)

基本量として、 H (水深), ω (潮汐の角振動数), U (表面の最大流速)を選び式(10), (11)を無次元化すると、

$$\frac{\partial W_n}{\partial t_n} = N_0 \frac{\partial}{\partial z_n} z_n \sqrt{b_n} \frac{\partial W_n}{\partial z_n} \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{\partial b_n}{\partial t_n} = N_0 z_n \sqrt{b_n} \left(\frac{\partial W_n}{\partial z_n} \right)^2 - N_1 \frac{b_n^{3/2}}{z_n} \dots\dots (13)$$

ただし、 $z_n = z/H$, $t_n = \omega t$, $W_n = W/U$, $b_n = b/U^2$

$$N_0 = c_0 \kappa N, \quad N_1 = c_1 N / \kappa, \quad N = U / \omega H$$

式(12), (13)の連立偏微分方程式を常微分化するために、次のように $\sqrt{b_n}$, W_n を展開する。

$$\sqrt{b_n} = b_0 + b_1 e^{it_n} + b_2 e^{2it_n} + \dots\dots$$

$$W_n = W_1 e^{it_n} + W_2 e^{2it_n} + \dots\dots$$

これを式(12), (13)に代入すると、

(1) 時間に無関係な項

$$0 = \frac{\beta}{z_n} - N_1 \frac{b_n^{3/2}}{z_n}$$

ただし、 β/z_n はエネルギー輸送に関する項である。

(2) 潮汐と同周期の項

$$i W_1 = N_0 \frac{\partial}{\partial z_n} b_0 z_n \frac{\partial W_1}{\partial z_n}$$

$$b_1 = 0$$

(3) 変動周期が潮汐の周期より小さい項

$$\begin{cases} 2i W_2 = N_0 \frac{\partial}{\partial z_n} b_0 z_n \frac{\partial W_2}{\partial z_n} \\ 4ib_2 = N_0 z_n \left(\frac{\partial W_1}{\partial z_n} \right)^2 - \frac{N_1}{z_n} b_0 b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3i W_3 = N_0 \frac{\partial}{\partial z_n} b_0 z_n \frac{\partial W_3}{\partial z_n} + N_0 \frac{\partial}{\partial z_n} b_2 z_n \frac{\partial W_1}{\partial z_n} \\ 3ib_3 = N_0 z_n \left(\frac{\partial W_1}{\partial z_n} \right) \left(\frac{\partial W_2}{\partial z_n} \right) - \frac{N_1}{z_n} b_0 b_3 \end{cases}$$

[...]

5. 流速分布と乱れエネルギー

前節の方程式の解を求めると、

$$b_0 = \text{const.}$$

$$b_1 = 0$$

$$W_1 = Z_0 (2i \sqrt{i \theta z_n})$$

$$\left(\theta = \frac{\omega H}{c_0 \kappa b_0 U} \right)$$

ただし、 Z_0 は0次のベッセル関数であり、

$$Z_0(i \sqrt{i z}) = A \cdot \text{ber}(z) + B \cdot \text{ker}(z) + i [A \cdot \text{bei}(z) + B \cdot \text{kei}(z)]$$

と表わされる。ただし、

$$\text{ber}(z) = 1 - \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{z}{2} \right)^4 + \frac{1}{(4!)^2} \left(\frac{z}{2} \right)^8 - \dots\dots$$

$$bei(z) = \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^2 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^6 + \frac{1}{(5!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{10} - \dots$$

$$ker(z) = -ber(z) \cdot \log \frac{z}{2} + \frac{\pi}{4} ber(z) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \phi(2m+1)}{[(2m)!]^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{4m}$$

$$kei(z) = -bei(z) \cdot \log \frac{z}{2} - \frac{\pi}{4} ber(z) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \phi(2m+2)}{[(2m+1)!]^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{4m+2}$$

$$\phi(m+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}$$

である。

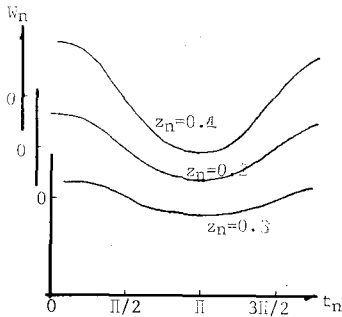
ここで、

$$W_1 = N_1(z_n) e^{i\phi(z_n)}$$

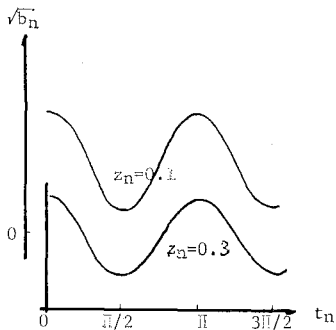
と考へ、 $\theta \ll 1$ および境界条件を考慮し、 $N_1(z_n)$ 、 $\phi(z_n)$ を求める

$$\phi(z_n) = \theta z_n$$

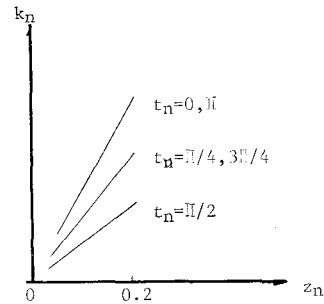
$$N_1(z_n) = 1 - \frac{B}{2} \log \frac{z_n}{z_{n0}}$$



図—2 速度変動



図—3 乱れエネルギー変動



図—4 拡散係数

ただし、 z_{n0} は粗度の高さ z_0 を無次元表示したものである。

$$b_2 = \frac{c_0 \kappa^2}{c_1 b_0} z_n^2 \left(\frac{\partial W_1}{\partial z_n} \right)^2$$

⋮

これらをまとめて流速分布、乱れエネルギーを求める。とそれぞれ 図—2、図—3 のようになり、さらに式 (3) を用いて拡散係数を求めると 図—4 のようになる。

6. 結 論

速度変動は 図—2 にも示されているように潮汐の振動周期 ($t_n = 2\pi$) と同じ周期をもっている部分、すなわち e^{it_n} に関する部分にその $1/2, 1/3, \dots$ の周期をもつ $e^{i2t_n}, e^{i3t_n}, \dots$ に関するものが重ね合わさったものでその絶対値は z_n の増加とともに対数的に減少し、その位相は $e^{i(t_n + \theta z_n)}$ に示されているように z_n に比例して徐々におくれていることがわかる。

一方乱れエネルギーの変動は平均乱れ速度 $\sqrt{b}$ を用いて 図—3 にも示されているがその変動周期は $b_1 = 0$ であることから速度変動とは異なり潮汐の振動周期と同じ周期をもつ e^{it_n} に関する部分は現われず、その $1/2, 1/3, \dots$ の周期のものおよび時間に無関係のものから成り立っている。そしてその位相は速度変動同様 z_n に比例しておくれている。時間に無関係な項すなわち b_0 が存在するのは乱れによって位相のずれている上下方向から常にエネルギーが持ち込まれていることを意味している。

拡散係数は底面の近くの様子が 図—4 に示されているが、 z_n に比例して直線的に増加しているのがわかる。