

# 表面波による乱流境界層について

浜 田 徳 一\*

表面波をともなう水の運動において、水底に生ずる乱流境界層について考える。水底において波の進行方向に水平に  $x$  軸をとり、垂直上向きに  $z$  軸をとり、 $x, z$  面に直角に  $y$  軸をとる。単一周期の進行波を仮定する。

## 1. 基本方程式の誘導

3 方向の運動方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

ここで

$$u = u_0 + u_1 + u', \quad v = v', \quad w = w_0 + w_1 + w', \quad p = p_0 + p_1 + p' \quad (4)$$

とおく。 $u_0, w_0$  は  $x, z$  のみの関数、すなわち定常な流れによるものとし、 $u_1, w_1$  は波形と同周期の波による周期的な運動とする。 $u', v'$  および  $w'$  はランダムな乱れ

運動によるものとする。圧力  $p$  についても同様である。

式 (1) に式 (4) を用い

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (u_1 + u') + (u_0 + u_1 + u') \frac{\partial}{\partial x} (u_0 + u_1 + u') + v' \frac{\partial}{\partial y} (u_0 + u_1 + u') + (w_0 + w_1 + w') \frac{\partial}{\partial z} (u_0 + u_1 + u') \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u_0 + \nu \nabla^2 u_1 + \nu \nabla^2 u' \end{aligned}$$

乱流境界層中のある特定点で  $u_1$  について波の同位相の標本平均をとり、これを  $\langle \dots \rangle$  で示すと、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial t} + \left\langle u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\rangle + \left\langle u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\rangle + \left\langle u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right\rangle + \left\langle u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right\rangle + \left\langle u' \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\rangle + \left\langle v' \frac{\partial u_0}{\partial y} \right\rangle + \left\langle w_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} \right\rangle \\ &+ \left\langle w_1 \frac{\partial u_0}{\partial z} \right\rangle + \left\langle w_0 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right\rangle + \left\langle w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right\rangle + \left\langle w' \frac{\partial u_0}{\partial z} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p_0 \rangle}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p' \rangle}{\partial x} + \nu \nabla^2 \langle u_0 \rangle + \nu \nabla^2 \langle u_1 \rangle \quad (5) \end{aligned}$$

式 (5) の時間的平均をとり、記号  $\langle \dots \rangle$  を用いる。単一周期の permanent type の波の問題では、 $\langle \overline{F} \rangle = \overline{F}$  である。これは時間的にゆるやかな波形の変形の場合にも近似的に使用できる。

$$\begin{aligned} & \left\langle u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\rangle + \left\langle u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\rangle + \left\langle u' \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\rangle + \left\langle v' \frac{\partial u_0}{\partial y} \right\rangle + \left\langle w_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} \right\rangle + \left\langle w_1 \frac{\partial u_0}{\partial z} \right\rangle \\ &+ \left\langle w' \frac{\partial u_0}{\partial z} \right\rangle = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p_0 \rangle}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p' \rangle}{\partial x} + \nu \nabla^2 \langle u_0 \rangle \quad (6) \end{aligned}$$

式 (6) から wave motion の非線形項を除くと

$$\begin{aligned} & \left\langle u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\rangle + \left\langle w_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} \right\rangle + \left\langle u' \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\rangle + \left\langle v' \frac{\partial u_0}{\partial y} \right\rangle + \left\langle w' \frac{\partial u_0}{\partial z} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p_0 \rangle}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p' \rangle}{\partial x} + \nu \nabla^2 \langle u_0 \rangle \quad (7) \end{aligned}$$

連続方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \quad \text{すなわち} \\ \frac{\partial}{\partial x}(u_0 + u_1 + u') + \frac{\partial}{\partial y}v' \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}(w_0 + w_1 + w') = 0 \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

同じ位相における標本平均をとると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\langle u_0 \rangle + \frac{\partial}{\partial x}\langle u_1 \rangle \\ + \frac{\partial}{\partial z}\langle w_0 \rangle + \frac{\partial}{\partial z}\langle w_1 \rangle &= 0 \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

その時間的平均をとると

$$\begin{aligned} \left\langle u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\rangle + \left\langle w_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u' u'}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u' v'}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u' w'}{\partial z} \right\rangle \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p_0 \rangle}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p' \rangle}{\partial x} + \nu \nabla^2 \langle u_0 \rangle \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

式 (14) はこの場合の定常運動 (すなわち流れ) に対する Reynolds 応力の存在を示しており,  $\langle \vec{F} \rangle = \vec{F}$  を考慮すれば, 表現形式としては流れのみの場合と同じで

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial t} + \left\langle u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\rangle + \left\langle u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right\rangle + \left\langle w_1 \frac{\partial u_0}{\partial z} \right\rangle + \left\langle w_0 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right\rangle \\ + \left\langle \frac{\partial u' u'}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u' v'}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u' w'}{\partial z} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial u' u'}{\partial x} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial u' v'}{\partial y} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial u' w'}{\partial z} \right\rangle \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial x} + \nu \nabla^2 \langle u_1 \rangle \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

式 (15) は線形化された波の運動の  $x$  方向成分に対し, 位相平均の意味において, 定常流の場合の Reynolds 応力に相当する応力が作用することを示しており, それは  $x$  軸に垂直な面に直角に  $-\langle u' u' \rangle + \langle u' u' \rangle$ ,  $y$  軸に垂直な面に沿い  $x$  方向に  $-\langle u' v' \rangle + \langle u' v' \rangle$ ,  $z$  軸に垂直な面に沿い  $x$  方向に  $-\langle u' w' \rangle + \langle u' w' \rangle$  となっている。

$z$  方向の運動についても, 同様にして定常運動に対するものとして

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle w_1 \rangle}{\partial t} + \langle u_1 \rangle \frac{\partial w_0}{\partial x} + u_0 \left\langle \frac{\partial w_1}{\partial x} \right\rangle + \langle w_1 \rangle \frac{\partial w_0}{\partial z} + w_0 \left\langle \frac{\partial w_1}{\partial z} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u' w'}{\partial x} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial u' w'}{\partial x} \right\rangle \\ + \left\langle \frac{\partial v' w'}{\partial y} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial v' w'}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial w' w'}{\partial z} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial w' w'}{\partial z} \right\rangle = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial z} + \nu \nabla^2 \langle w_1 \rangle \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

式 (17) は線形化された垂直方向の波の運動に対して, 式 (15) と同じ意味における応力として,  $x$  軸に垂直な面内で  $z$  方向に  $-\langle u' w' \rangle + \langle u' w' \rangle$ ,  $y$  軸に垂直な面内で  $z$  方向に  $-\langle v' w' \rangle + \langle v' w' \rangle$ ,  $z$  軸に垂直な面内で  $z$  方向に  $-\langle w' w' \rangle + \langle w' w' \rangle$  が作用することを示している。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\langle u_0 \rangle + \frac{\partial}{\partial z}\langle w_0 \rangle &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\langle u_1 \rangle = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z}\langle w_1 \rangle &= 0 \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

式 (8) から式 (10) をひくと

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_1 + u') + \frac{\partial}{\partial y}v' + \frac{\partial}{\partial z}(w_1 + w') = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

wave motion の  $u_1, w_1$  については

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

が満足されるものとする。この条件のもとに

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

式 (7) に式 (13) を用いると

ある。

式 (5) より式 (14) を減じ,  $\langle p' \rangle = 0$  とおき, 波の運動の非線形項を除けば

$$\begin{aligned} u_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + w_0 \frac{\partial w_0}{\partial z} + \left\langle \frac{\partial w' w'}{\partial z} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u' w'}{\partial x} \right\rangle \\ + \left\langle \frac{\partial v' w'}{\partial y} \right\rangle \\ = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial z} + \nu \nabla^2 w_0 \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

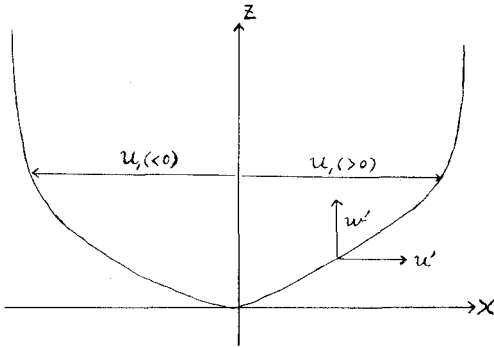
通常  $w_0$  は非常に小さいから, 式 (16) は無視されることが多い。しかし次の波の運動としての  $w_1$  に対するものは重要である。

## 2. 応力の構成

表面波のみによる底の乱流境界層について考えてみる。

この場合の乱れでは渦は底近傍で誘起せられ, 上方に向かって拡散するというのが自然であろう。したがって底近傍では非等方の性質が強く, 定常流の場合の混合距離

理論にしたがう乱れと類似の性質を示し、上方では等方的となるため、物質の拡散には関与するが、波の運動に対して応力として作用する性質は弱くなるであろう。



図—1 底の境界層

図—1 の底近傍における波による周期的な水の運動を考え、混合距離理論と同様に  $u', w'$  の関係をつけると、流速が正であり、 $\frac{\partial u_1}{\partial z} > 0$  のとき、 $(u' > 0, w' < 0)$ 、 $(u' < 0, w' > 0)$  となり、流速が負であり、 $\frac{\partial u_1}{\partial z} < 0$  のとき  $(u' > 0, w' > 0)$ 、 $(u' < 0, w' < 0)$  の関係が生ずる。このことと波の周期的運動とを考えると、乱れの非等方成分については、 $x$  方向成分を  $u_1' \cos k(x-ct+\varepsilon_1)$ 、 $z$  方向

成分を  $w_1' |\cos k(x-ct+\varepsilon_1)|$  とおき、 $u_1', w_1'$  は時間的平均値が 0 の定常確率過程に従う速度表現とおくのがよいと思われる。したがって基本的には、定常確率過程にしたがう等方性成分  $u_0', w_0'$  を加えて

$$\left. \begin{aligned} u' &= u_0' + u_1' \cos k(x-ct+\varepsilon_1) \\ w' &= w_0' + w_1' |\cos k(x-ct+\varepsilon_1)| \end{aligned} \right\} \dots\dots (18)$$

の表現がこの場合の乱れの性質をよく表わしている。 $u', w'$  が  $z$  方向に nonhomogeneous なことはもちろんである。

定常的な流れが存在する場合を考えると、式 (18) で  $u_0', w_0'$  はやはり非等方の性質が強くなり、定常的な Reynolds 応力の形成に関与してくることとなる。式 (18) の右辺第 2 項は周期的定常過程あるいは波動的定常過程と言ってよいであろう。 $\varepsilon_1$  は通常波の周期と壁からの距離  $z$  と乱れの程度とにより決定される値であり、 $\langle u_1' w_1' \rangle$  については  $x, z$  を固定して波の特定の位相のみで標本平均をとることでもできるし、波速  $c$  で  $x$  軸に沿って等速度で移動する点について時間的平均を求めることによって決定することができる。

### 3. $u', w'$ の相関の一般的な性質その他

式 (18) を用いて  $u'(x)u'(x+r)$  の波のある位相での標本平均を求める。

$$\begin{aligned} \langle u'(x)u'(x+r) \rangle &= \langle u_0'(x)u_0'(x+r) \rangle + \langle u_0'(x)u_1'(x+r) \rangle \cos k(x+r-ct+\varepsilon_1) \\ &\quad + \langle u_0'(x+r)u_1'(x) \rangle \cos k(x-ct+\varepsilon_1) + \langle u_1'(x)u_1'(x+r) \rangle \cos k(x-ct+\varepsilon_1) \cdot \cos k(x+r-ct+\varepsilon_1) \\ &= R'_{u_0'u_0'}(r) + R_{u_0'u_1'}(r) \cos k(x+r-ct+\varepsilon_1) + R_{u_1'u_0'}(r) \cos k(x-ct+\varepsilon_1) \\ &\quad + R_{u_1'u_1'}(r) \cos k(x-ct+\varepsilon_1) \cos k(x+r-ct+\varepsilon_1) \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

また

$$\overline{u'(x)u'(x+r)} = \overline{\langle u'(x)u'(x+r) \rangle} = R_{u_0'u_0'}(r) + \frac{1}{2} R_{u_1'u_1'}(r) \cos kr \dots\dots\dots (20)$$

式 (20) は偶関数である。

$r \rightarrow 0$  において式 (19) は

$$\langle u'(x)u'(x) \rangle = R_{u_0'u_0'}(0) + 2 R_{u_0'u_1'}(0) \cos k(x-ct+\varepsilon_1) + R_{u_1'u_1'}(0) \cos^2 k(x-ct+\varepsilon_1)$$

式 (20) は

$$\overline{\langle u'(x)u'(x) \rangle} = R_{u_0'u_0'}(0) + \frac{1}{2} R_{u_1'u_1'}(0)$$

応力成分  $-\langle u'u' \rangle + \langle w'w' \rangle$  は

$$-2 R_{u_0'u_1'}(0) \cos k(x-ct+\varepsilon_1) - \frac{1}{2} R_{u_1'u_1'}(0) \cos 2k(x-ct+\varepsilon_1) \dots\dots\dots (21)$$

流れのない  $u_0'$  が等方的なときは  $R_{u_0'u_1'}(0) \rightarrow 0$  として、この応力成分は 2 倍周波数となる。

$w'(x)w'(x+r)$  については

$$\begin{aligned} \langle w'(x)w'(x+r) \rangle &= R_{w_0'w_0'}(r) + R_{w_0'w_1'}(r) |\cos k(x+r-ct+\varepsilon_1)| \\ &\quad + R_{w_1'w_0'}(r) |\cos k(x-ct+\varepsilon_1)| + R_{w_1'w_1'}(r) |\cos k(x-ct+\varepsilon_1)| |\cos k(x+r-ct+\varepsilon_1)| \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

$k(x-ct+\varepsilon_1) = x_1$ ,  $k(x+r-ct+\varepsilon_1) = x_1 + r_1$ ,  $r_1 = kr$  とおけば式 (22) は

$$\begin{aligned} \langle w'(x)w'(x+r) \rangle &= R_{w_0'w_0'}(r) + \frac{4}{\pi} R_{w_0'w_1'}(r) \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos 2(x_1 + r_1) - \frac{1}{15} \cos 4(x_1 + r_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{35} \cos 6(x_1 + r_1) - \dots \right\} + \frac{4}{\pi} R_{w_1'w_0'}(r) \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos 2x_1 - \frac{1}{15} \cos 4x_1 + \frac{1}{35} \cos 6x_1 - \dots \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{16}{\pi^2} R_{w_1'w_1'}(r) \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cos 2(x_1 + r_1) + \frac{1}{6} \cos 2x_1 - \frac{1}{30} \cos 2x_1 - \frac{1}{30} \cos 4x_1 \right. \\ \left. + \frac{1}{9} \cos 2x_1 \cos 2(x_1 + r_1) - \dots \right\} \dots \dots \dots (23)$$

$$\overline{w'(x)w'(x+r)} = \overline{w'(x)w'(x+r)} >$$

$$= R_{w_0'w_0'}(r) + \frac{2}{\pi} R_{w_0'w_1'}(r) + \frac{2}{\pi} R_{w_1'w_0'}(r) + \frac{8}{\pi^2} R_{w_1'w_1'}(r) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \cos 2kr \right) \dots \dots \dots (24)$$

式(24)は $r$ について偶関数である。

$r \rightarrow 0$  において応力成分  $-\langle w'w' \rangle + \langle \overline{w'w'} \rangle$  は

$$- \frac{8}{3\pi} R_{w_0'w_1'}(0) \cos 2k(x - ct + \varepsilon_1) - \frac{16}{3\pi^2} R_{w_1'w_1'}(0) \cos 2k(x - ct + \varepsilon_1) \dots \dots \dots (25)$$

この応力成分は常に2倍周波数となる。式(21), (25)に表われた2倍周波数成分の係数は線形波を取扱っている現在の問題では精度は低いであろう。

$u'(x)w'(x+r)$  については

$$\begin{aligned} \langle u'(x)w'(x+r) \rangle &= R_{u_0'w_0'}(r) + R_{u_0'w_1'}(r) |\cos k(x+r-ct+\varepsilon_1)| \\ &\quad + R_{u_1'w_0'}(r) \cos k(x-ct+\varepsilon_1) + R_{u_1'w_1'}(r) \cos k(x-ct+\varepsilon_1) |\cos k(x+r-ct+\varepsilon_1)| \\ &= R_{u_0'w_0'}(r) + \frac{4}{\pi} R_{u_0'w_1'}(r) \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos 2k(x+r-ct+\varepsilon_1) - \frac{1}{15} \cos 4k(x+r-ct+\varepsilon_1) + \dots \right\} \\ &\quad + R_{u_1'w_0'}(r) \cos k(x-ct+\varepsilon_1) + \frac{4}{\pi} R_{u_1'w_1'}(r) \left\{ \frac{1}{2} \cos k(x-ct+\varepsilon_1) + \frac{1}{6} \cos k(x+2r-ct+\varepsilon_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \cos 3k \left( x + \frac{2}{3}r - ct + \varepsilon_1 \right) - \frac{1}{30} \cos 3k \left( x + \frac{4}{3}r - ct + \varepsilon_1 \right) - \frac{1}{30} \cos 5k \left( x + \frac{4}{5}r - ct + \varepsilon_1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{70} \cos 5k \left( x + \frac{6}{5}r - ct + \varepsilon_1 \right) + \dots \right\} \dots \dots \dots (26) \end{aligned}$$

$$\overline{u'(x)w'(x+r)} = \langle u'(x)w'(x+r) \rangle = R_{u_0'w_0'}(r) + \frac{2}{\pi} R_{u_0'w_1'}(r) \dots \dots \dots (27)$$

式(27)は一般に偶関数ではない。 $r \rightarrow 0$  において式(26)は

$$\begin{aligned} \langle u'(x)w'(x) \rangle &= R_{u_0'w_0'}(0) + \frac{4}{\pi} R_{u_0'w_1'}(0) \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos 2k(x-ct+\varepsilon_1) \right\} \\ &\quad + R_{u_1'w_0'}(0) \cos k(x-ct+\varepsilon_1) + \frac{8}{3\pi} R_{u_1'w_1'}(0) \left\{ \cos k(x-ct+\varepsilon_1) + \frac{1}{5} \cos 3k(x-ct+\varepsilon_1) \right\} \\ \langle \overline{u'(x)w'(x)} \rangle &= R_{u_0'w_0'}(0) + \frac{2}{\pi} R_{u_0'w_1'}(0) \dots \dots \dots (28) \end{aligned}$$

ゆえに応力  $-\langle u'w' \rangle + \langle \overline{u'w'} \rangle$  は

$$\begin{aligned} - \frac{4}{3\pi} R_{u_0'w_1'}(0) \cos 2k(x-ct+\varepsilon_1) - R_{u_1'w_0'}(0) \cos k(x-ct+\varepsilon_1) \\ - \frac{8}{3\pi} R_{u_1'w_1'}(0) \left\{ \cos k(x-ct+\varepsilon_1) + \frac{1}{5} \cos 3k(x-ct+\varepsilon_1) + \dots \right\} \dots \dots \dots (29) \end{aligned}$$

式(29)には基本周波数成分として  $-R_{u_1'w_0'}(0) \cos k(x-ct+\varepsilon_1) - \frac{8}{3\pi} R_{u_1'w_1'}(0) \cos k(x-ct+\varepsilon_1)$  が表われている。流れと波とが共存するとき、両項ともに有効であり、波のみの場合は第2項のみが有効であろう。式(15)と式(29)の基本周波数の項とを考慮するとき、 $\frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial z}$  の位相を決定する項  $\varepsilon$  が式(29)の  $\varepsilon_1$  とほぼ一致すれば、この場合の波に対する底近傍の乱流境界層としての運動量交換係数を決定し得ることがわかる。定常流に対する運動量交換係数は式(28)と  $\frac{\partial u_0}{\partial z}$  とにより決定せられるから、この両者は異なるものとなる。そして

$\varepsilon \equiv \varepsilon_1$  では  $\frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial z} = 0$  のとき、式(18)より波のみの場合に底近傍で卓越する非等方の  $u', w'$  が消滅することが示され、これは実験的な検討を必要とする。

ランダムな波が多数合成せられているときは、問題を流れのない1次元の場合に限定すると、任意の  $i$  成分波につき式(15)において  $u_0 = w_0 = 0$  とおいた式を得ることができる。ただしすべての波の成分流速は  $\langle \dots \rangle_i$  において乱れ速度と無相関であるとし、すべての波の非線形項を省略する。したがって

$$\tau_i = -\langle u'w' \rangle_i + \langle \overline{u'w'} \rangle_i \dots \dots \dots (30)$$

の表現を得ることができる。もし  $\tau_i = \eta_i \frac{\partial \langle u_1 \rangle_i}{\partial z}$  とおけば  $\eta_i$  は  $i$  成分波についての運動量交換係数と考えられるわけであるが、壁の近くの非等方な乱れについての混合距離理論ではその場の実際の速度勾配が 0 のとき、 $u' = w' = 0$  が要求せられるため、 $\tau_i$  を  $\frac{\partial \langle u_1 \rangle_i}{\partial z}$  と同位相とすることは一般には困難である。したがって  $\eta_i$  を有意味に求めることはむずかしい。

## 参考文献

- 1) Hasselmann, K. & Collins, J.I.: Spectral dissipation of finite-depth gravity waves due to turbulent bottom friction, *Journal of Marine Research*, Vol. 26, No. 1, 1968.
- 2) Reynolds, O.: On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 1895.
- 3) Hinze, J.O.: *Turbulence*, McGraw-Hill, 1959.