

海洋波のクロス・スペクトル解析

水野信二郎*・力石国男**・光易 恒***

1. 緒 言

海洋波の方向スペクトルを計測するために、クローバー型波浪計測ブイを製作し、昨年末より日本近海で海洋波浪の観測をすすめている。クローバー・ブイは Cartwright and Smith¹⁾ によって開発されたものとはほぼ同じで、波によるブイの上下加速度、傾斜角、波面の曲率および方位を測定することにより、波の方向スペクトルを得るための装置である。

得られたデータのクロス・スペクトル解析は方向スペクトルの精度を見積るためばかりでなく、ブイの応答特

性を知るためにも重要であるが、ここでは、クロス・スペクトル解析法として、① F.F.T. によるデジタル解析、② 狭帯域フィルターを用いたアナログ解析を、ほとんど同じ長さの、同一のデータを用いて行なった結果について述べる。

2. デジタル解析

同時に測定された長さ N の2つの時系列 $\{x_t; t=0, 1, \dots, N-1\}$ と $\{y_t; t=0, 1, \dots, N-1\}$ は、ともに周期 N の周期関数とするならば、有限フーリエ級数によって表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} x_t &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \left(A_k \cos \frac{2\pi}{N} kt + B_k \sin \frac{2\pi}{N} kt \right) + \frac{A_{N/2}}{2} \cos \pi t, \\ y_t &= \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \left(C_k \cos \frac{2\pi}{N} kt + D_k \sin \frac{2\pi}{N} kt \right) + \frac{C_{N/2}}{2} \cos \pi t \end{aligned} \right\} (t=0, 1, \dots, N-1) \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ なる関係を用いて、複素有限フーリエ係数

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= A_0/2, \quad X_{N/2} = A_{N/2}/2, \quad Y_0 = C_0/2, \quad Y_{N/2} = C_{N/2}/2, \\ X_K &= \frac{A_K - iB_K}{2}, \quad X_{N-K} = \frac{A_K + iB_K}{2} \\ Y_K &= \frac{C_K - iD_K}{2}, \quad Y_{N-K} = \frac{C_K + iD_K}{2} \end{aligned} \right\} 0 < K < \frac{N}{2} \dots\dots\dots (2)$$

を導入すると、式(1)のフーリエ係数は

$$\left. \begin{aligned} X_K &= \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} x_t e^{-i2\pi/N kt} \\ Y_K &= \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} y_t e^{-i2\pi/N kt} \end{aligned} \right\} (K=0, 1, \dots, N-1) \dots\dots\dots (3)$$

と書くことができる。

次の関係は容易に示される。

$$X_k^* \cdot Y_k = \frac{1}{N} \left\{ \rho_{xy}(0) + \sum_{\tau=1}^{N/2} (\rho_{xy}(\tau) + \rho_{xy}(-\tau)) \cos \frac{2\pi}{N} k\tau - i \sum_{\tau=1}^{N/2-1} (\rho_{xy}(\tau) - \rho_{xy}(-\tau)) \sin \frac{2\pi}{N} k\tau \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $\rho_{xy}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} x_t \cdot y_{t+\tau}$, $\rho_{xy}(-\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} x_{t+\tau} \cdot y_t$ である。

これから滑らかなクロス・スペクトル密度を求めるために、スペクトル・フィルターをかけて自由度を増す。スペクトル・フィルターとしてはいろいろなものが考えられるが、半幅が M 個のスペクトル線からなる三角型フィルターを用いると、クロス・スペクトル密度 $E_{xy}(f_k)$ は

$$E_{xy}(f_k) = 2N \Delta t \cdot \frac{1}{M^2} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} (M-|m|) X_{k+m}^* Y_{k+m}, \quad (k=0, 1, \dots, N-1) \dots\dots\dots (5)$$

によって与えられる。ここに Δt はサンプリング間隔、 $f_k = k/N \Delta t$ である。一般に、クロス・スペクトル密度は複素関数であるから

$$E_{xy}(f_k) = C_{xy}(f_k) - iQ_{xy}(f_k) \dots\dots\dots (6)$$

と書かれ、実数部 $C_{xy}(f_k)$ はコ・スペクトル、虚数部

$Q_{xy}(f_k)$ はクオド・スペクトルと呼ばれる。時系列 $\{x_t\}$ と $\{y_t\}$ の周波数 f_k における位相差 $\theta_{xy}(f_k)$ とコヒーレンス $\text{Coh}_{xy}(f_k)$ は

$$\theta_{xy}(f_k) = \tan^{-1} \frac{Q_{xy}(f_k)}{C_{xy}(f_k)} \dots\dots\dots (7)$$

$$\text{Coh}_{xy}(f_k) = \sqrt{\frac{C_{xy}^2(f_k) + Q_{xy}^2(f_k)}{E_{xx}(f_k) \cdot E_{yy}(f_k)}} \dots\dots\dots (8)$$

で与えられる。スペクトル・フィルターの等価帯域幅

* 正会員 理博 九州大学助教授 応用力学研究所
** 正会員 九州大学助手 応用力学研究所
*** 正会員 理博 九州大学教授 応用力学研究所

$(\Delta f)_e$ は

$$(\Delta f)_e = \frac{3}{4} \cdot \frac{2M}{N\Delta t} = \frac{3M}{2N\Delta t} \dots\dots\dots (9)$$

であるから、自由度 k は

$$k = 2T \cdot (\Delta f)_e = 3M \dots\dots\dots (10)$$

である。

いままでの議論は、時系列 $\{x_t\}$ と $\{y_t\}$ が周期的不規則過程の場合にあてはまる。一般には、 $\{x_t\}$ と $\{y_t\}$ は非周期的不規則過程であるから、その場合に、有限フーリエ級数を用いて、フーリエ変換すると、式(4)の右辺の相互相関関数は

$$\left. \begin{aligned} \rho_{xy}(\tau) &= R_{xy}(\tau) + R_{xy}(N-\tau) \\ \rho_{xy}(-\tau) &= R_{xy}(-\tau) + R_{xy}(N-\tau) \end{aligned} \right\} \dots\dots (11)$$

$$\begin{aligned} X_k^* Y_k &= \frac{1}{N} \left\{ R_{xy}(0) + \sum_{\tau=1}^{\tau_{\max}} (R_{xy}(\tau) + R_{xy}(-\tau)) \cos \frac{2\pi}{N} k\tau - i \sum_{\tau=1}^{\tau_{\max}} (R_{xy}(\tau) - R_{xy}(-\tau)) \sin \frac{2\pi}{N} k\tau \right\} \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \rho_{xy}(0) + \sum_{\tau=1}^{\tau_{\max}} \left(1 - \frac{\tau}{N}\right) (\rho_{xy}(\tau) + \rho_{xy}(-\tau)) \cos \frac{2\pi}{N} k\tau \right. \\ &\quad \left. - i \sum_{\tau=1}^{\tau_{\max}} \left(1 - \frac{\tau}{N}\right) (\rho_{xy}(\tau) - \rho_{xy}(-\tau)) \sin \frac{2\pi}{N} k\tau \right\} \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

と近似できる。ここに、 $\tau_{\max} \ll N$ 。式(12)の関係は、クロス・スペクトルに、スペクトル・フィルターをかけることによってほぼ満たされるから、スペクトル密度の自由度を増加するならば、F.F.T. 法によって、非周期的不規則過程の場合にもスペクトル解析が可能となることが理解される。

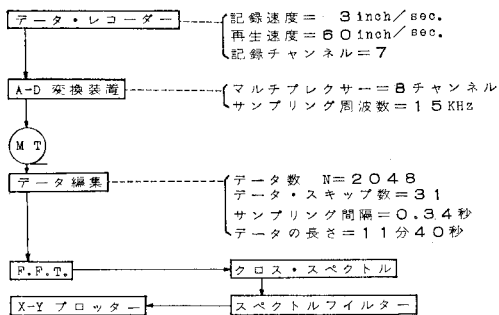


図-1 デジタル解析のフローチャート

さて、実際のデジタル解析は図-1に示すようなフローチャートに従って行なわれた。DATAC-500 によるサンプリング周波数を 15 kHz と高くしているのは、8 チャンネルのデータの間の時間差をできるだけ小さくして、準同時とするためであり、スペクトル解析に用いたデータのサンプリング間隔は、Nyquist 周波数 (= $1/2 \Delta t$) を 1.5 Hz 程度に選んで、 $\Delta t = 0.34$ 秒とした。また、1 チャンネルあたりのデータ総数 N は、上に述べたように、定常性が保てる限りできるだけ大きい方がよいので、 $N=2048$ 個とした。

となる。ここに、

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-\tau-1} x_t \cdot y_{t+\tau},$$

$$R_{xy}(-\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-\tau-1} x_{t+\tau} \cdot y_t$$

および $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$ である。式(11)は、非周期的な時系列を直接有限フーリエ変換すると、ラグ τ の相互相関関数は、ラグ $(N-\tau)$ の相互相関関数の項によって擾乱を受けることを示している。ラグ $(N-\tau)$ の項の寄与を無視できるようにするためには、 $\tau \ll N$ の範囲の相互相関関数 $\rho_{xy}(\tau)$ のみを取ればよい。なぜなら、式(11)の右辺の第1項は $(N-\tau)$ 項、第2項は τ 項からなるからである。そのとき、

スペクトル線 $X_k^* Y_k$ は

3. アナログ解析

有限な長さ $[-T/2, T/2]$ の2個の不規則な信号 $x(t)$ と $y(t)$ が線型なフィルターを通過すると、その出力信号は

$$\left. \begin{aligned} x_0(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t-\tau) x(\tau) d\tau \\ y_0(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t-\tau) y(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \dots\dots (13)$$

によって与えられる。ここに、 h_1 と h_2 はフィルターのインパルス応答であり、物理的に実現可能な系であるためには、 $t < 0$ に対して、 $h_1(t) = h_2(t) = 0$ である。 $x(t)$, $x_0(t)$, $h_1(t)$ ……のフーリエ変換をそれぞれ $X(f)$, $X_0(f)$, $H_1(f)$ ……とすれば

$$\left. \begin{aligned} X_0(f) &= H_1(f) \cdot X(f) \\ Y_0(f) &= H_2(f) \cdot Y(f) \end{aligned} \right\} \dots\dots (14)$$

であり、Parseval の定理から

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_0(t) \cdot y_0(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_0^*(f) \cdot Y_0(f) df \dots\dots (15)$$

の関係が成立するから、出力信号の積の時間的平均値は

$$\begin{aligned} \langle x_0(t) \cdot y_0(t) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_0(t) \cdot y_0(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X^*(f) \cdot Y(f)}{T} \cdot H_1^*(f) \cdot H_2(f) df \end{aligned} \dots\dots\dots (16)$$

また、クロス・スペクトル密度の定義から

$$E_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X^*(f) \cdot Y(f)}{T} \dots\dots\dots (17)$$

であるから、

$$\langle x_0(t) \cdot y_0(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} E_{xy}(f) \cdot H_1^*(f) \cdot H_2(f) df \quad (18)$$

となる。 $H_i(\omega)$ として共振周波数の等しい 2 台の狭帯域フィルターを用いるならば、 $|H_i(\omega)|$ はフィルターの共振周波数 $f = \pm f_0$ の付近でのみ高い増幅度を示し、その範囲で $E_{xy}(f)$ はほとんど変化しないとするならば、

$$\langle x_0(t) \cdot y_0(t) \rangle = E_{xy}(f_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} H_1^*(f) \cdot H_2(f) df \quad (19)$$

となる。デジタル解析の場合と同様に、

$$E_{xy}(f) = C_{xy}(f) - iQ_{xy}(f) \quad (20)$$

とおき、 $H_i(\omega) = |H(\omega)|e^{i\phi_i}$ ($i=1, 2$) とすると

$$\begin{aligned} \langle x_0(t) y_0(t) \rangle &= [\cos(\phi_1 - \phi_2) C_{xy}(f_0) \\ &\quad - \sin(\phi_1 - \phi_2) Q_{xy}(f_0)] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \end{aligned} \quad (21)$$

をうる。これから、 $\phi_1 - \phi_2 = 0$ とすると、 $C_{xy}(f_0)$ が得られ、 $\phi_1 - \phi_2 = -\pi/2$ とすると、 $Q_{xy}(f_0)$ がえられる。

アナログ方式のクロス・スペクトル解析装置の概略図を図-2 に示す。その主要部はヘテロダイン方式の 2 台

(700 秒) とほとんど同一の長さである。周波数ダイヤルのスイープ時間は 0~600 Hz の間で 5 分 20 秒要し、その間の移相器の移相のずれは約 0.33° であるから、周波数の変化に対する移相の補正は行なわなかった。また、掛算器の後の低域フィルター (40 dB/oct) の遮断周波数は $f_c = 0.224$ Hz として用いた。

水晶フィルターの等価帯域幅 $(\Delta f)_e \approx 9$ Hz であったから、アナログ解析の場合の自由度は $k=35$ である。

4. 実験結果と議論

クロンバ・ブイによって得られる情報は、表-2 に示されている。クロス・スペクトル解析は 1~6 チャンネ

表-2 クロンバ・ブイの測定要素

S_1	上下加速度 (η_{tt})
S_2	ピッチング角 (η_x)
S_3	ローリング角 (η_y)
S_4	波面の曲率 (η_{xx})
S_5	波面の曲率 (η_{yy})
S_6	波面の曲率 (η_{xy})
S_7	方位

(注) η は波を表わし、添字は偏微分を示す。

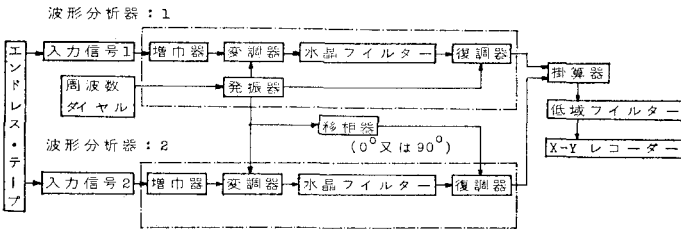


図-2 アナログ・クロス・スペクトル解析装置のブロック図

の波形分析器からなり、図の位置に配置した移相器によって、両フィルターの位相を相対的に 0° または 90° に切換えることによって、コ・スペクトルまたはクオド・スペクトルが得られた。波形分析器の特性は表-1 に示

表-1 波形分析器の主要性能

入力周波数	20 Hz~50 kHz
入力電圧	30 μ V~300 V
入力インピーダンス	100 k Ω 以上
フィルターの中心周波数	100 kHz
選択度	
0.1 dB	2 Hz $\pm$ 10%
3 dB	6 Hz $\pm$ 10%
60 dB	60 Hz $\pm$ 10%
30 dB	140 Hz $\pm$ 10%
周波数ダイヤルスイープ速度	1.85 Hz/sec

されているが、周波数域は 20 Hz~50 kHz の範囲である。他方、海洋波のそれは 0.1 Hz~1.5 Hz の範囲にあるので、記録波形を 400 倍に増速し、1 周約 270 cm のエンドレステープをつくって、0~600 Hz の範囲で解析を行なった。テープ 1 周の所要時間は $T=1.95$ 秒で、これは約 780 秒間のデータに相当し、デジタルの場合

ルのデータに対して行ない、パワー・スペクトルを含めて、合計 21 個のクロス・スペクトルが得られた。

デジタル解析のグラフで、たとえば、[512 $\times$ 4, 2~8] と示したものは、総数 2048 個のデータを 4 等分し、それぞれをフーリエ変換し、クロス・スペクトルを計算した後で 4 組の平均をとり、さらに三角型フィルターの半幅 $M=8$ のフ

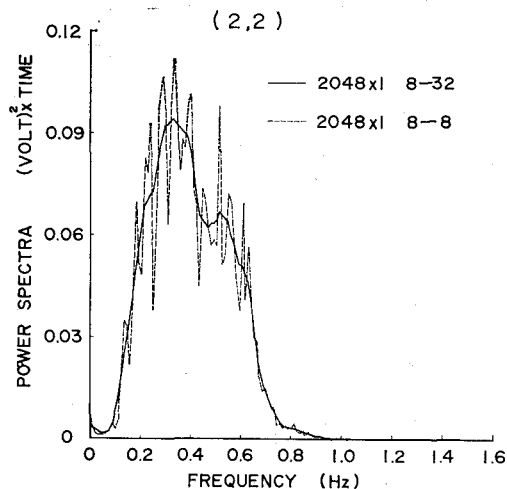
ィルターをかけて得られたスペクトル推定値を 2 個間隔で XY-プロッタ表示したことを示す。

(1) パワー・スペクトル

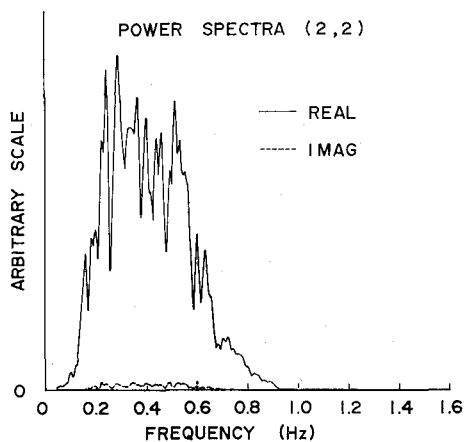
図-3 (a) と (b) はピッチング角のパワー・スペクトルを示す。デジタル解析では、自由度 24 と 96 のものを同じグラフに描き、自由度の増加によりスペクトル分布が平滑化される様子を示した。アナログ法では、縦軸のスケールを求めなかったため、デジタル法との定量的な比較はできないが、自由度がほぼ等しいデジタル法の破線と比較すると、きわめてよく類似している。また、アナログのパワー・スペクトルに、クオド・スペクトルの成分が見られる。これは 2 台の波形分析器の水晶フィルターのミス・マッチングおよび移相器の調整が不完全で、90° になっていないことによるものと思われる。しかしながら、逆にこの結果から、アナログ解析装置の精度を推定できるのであって、誤差は高々 5% である。

(2) クロス・スペクトル

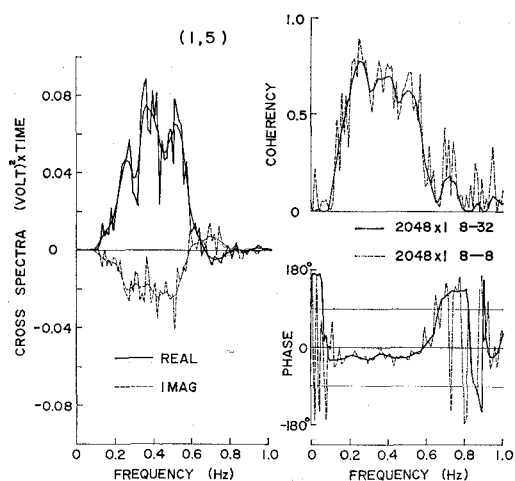
図-4 は上下加速度と波面の曲率 (η_{yy}) の間のクロ



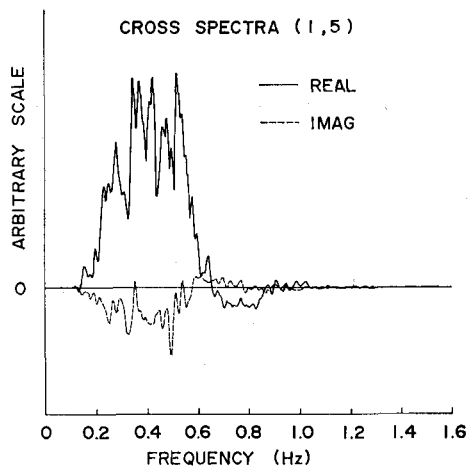
図—3 (a) デジタル解析によるパワー・スペクトル



図—3 (b) アナログ解析によるパワー・スペクトル

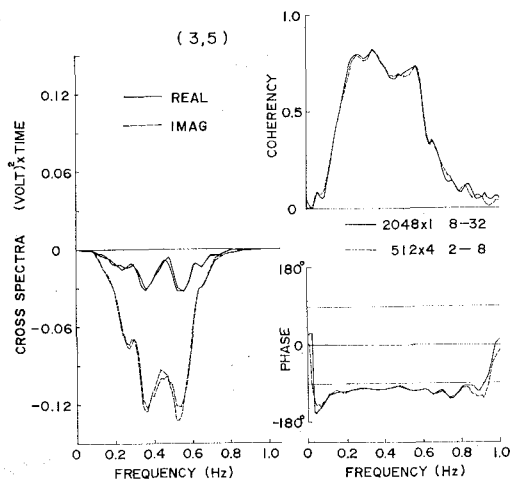


図—4 (a) デジタル解析によるクロス・スペクトル (I)



図—4 (b) アナログ解析によるクロス・スペクトル (I)

ス・スペクトルを示す。(a) はデジタル解析の結果で、スペクトル・フィルターの効果を調べている。特に、コヒーレンスを見ると、コヒーレンスの低い部分では、フィルター幅の増加によって、コヒーレンスが低下する傾向があるが、高い部分では、コヒーレンスはフィルター幅にほとんど依存していない。次に、位相の情報はブイの特性を知る上にかかなりの寄与を与える。位相の周波数に対する変化をみると、0.1Hz~0.6Hz の間で位相はほぼ一定である。原理的には、位相は 0° でなければならないのに、約 26° ずれている。この原因はいまだよくわからない。0.6Hz 以上で位相が急に進むのは、ブイの固有振動数がこの付近にあるためである。他方、0.1Hz 以下で、位相の変化が著しいのは 10 秒以上の波浪の成分が少なく、計算精度が低下することによるものと思われる。アナログとデジタルの比較は、クロス・スペクトルの場合も良好である。図—5 はローリング角と波面



図—5 (a) デジタル解析によるクロス・スペクトル

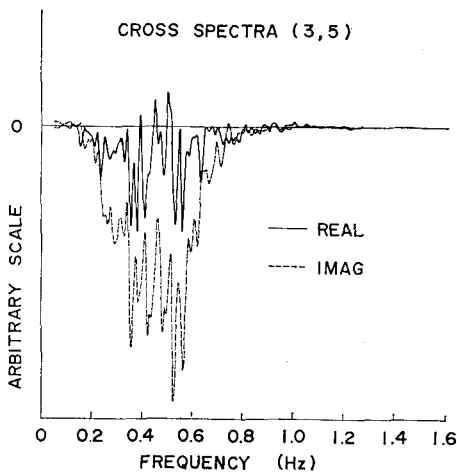


図-5 (b) アナログ解析によるクロス・スペクトル (II)

の曲率 (η_{yy}) の間のクロス・スペクトルを示す。この場合、位相特性は 図-4 よりも良好な範囲が拡大している。デジタル解析の場合、データを4分割してそれぞれをフーリエ変換した場合と一度にフーリエ変換した場合の比較をしている。両者の差は解析の際のエンド効果の差であるが、ほとんど結果には関係しないように思われる。アナログ解析とデジタル解析の結果は自由度が異なるので比較はむずかしいが、平均的にはよく類似していると思われる。

5. 結 語

F.F.T. によるデジタル解析法と波形分析器によるアナログ解析法は、いずれも直接フーリエ変換法であり、両者の比較には興味があった。解析の結果は、自由度を等しくすると、非常によく似たスペクトル分布を与えることを示した。

終りに、データ処理で援助を受けた田中道芳氏、実験装置の製作等に助力を得た江藤賢次氏に厚く感謝します。なお、デジタル解析には本研究所の電子計算機 FACOM 270-20 を使用し、この研究の一部は、文部省試験研究費を使用して行なわれた。

参 考 文 献

- 1) Cartwright, D.E. and Smith, N.D.: Buoy Techniques for Obtaining Directional Wave Spectra, from Buoy Technology, Marine Technology Society, 1964.
- 2) Blackman, R.B. and Tukey, J.W.: The Measurement of Power Spectra, Dover.
- 3) Tukey, John W.: An Introduction to the Calculation of Numerical Spectrum Analysis, from 'Advanced Seminar on Spectral Analysis of Time Series', edited by Bernard Harris, Wiley.
- 4) Uberoi, M.S. and Gilbert, E.G.: The Review of Scientific Instruments, Vol. 30, 1959, Technique for Measurement of Cross-Spectral Density of Two Random Functions.
- 5) Marks, W. and Strausser, P.: A Low Frequency Spectrum and Cross-Spectrum Analyzer, from Ocean Wave Spectra, Prentice Hall.