

リップ・カレントの発生理論

日 野 幹 雄*・林 直 樹**

要 旨 リップ・カレントの発生およびそれに伴う海岸地形の変形の増幅機構を、流体力学的安定理論により論じ、選択的自励的卓越波の存在を結論した。

1. 序 説

本論文では、リップ・カレントの発生およびそれに伴う海岸地形の形成について、流体力学的安定理論による解析を行なう。これらについては、これまでいくつかの説明が行なわれて来たが、解析的な研究では最近 Bowen により発表された standing edge wave による radiation stress の海岸線方向の周期的分布を強制力と考える理論的説明が、一番説得性をもっているように思う。しかし、この理論にも、edge wave の卓越波長とリップ・カレントの発生間隔とがくい違っていること、外部からのエネルギー供給が大きいことなどの反論がある。

ところで、もし、海岸線沿いの方向に一樣な定常解を考えれば、良く知られているように海面と海底近くに岸向きの、そしてその還流として中ほどは沖向の流れが生じる(図-2(b))。しかし、こうした流れの状態が海岸沿いに薄べったくずうと続いているというのは、いかにも

無理な感じがする。ちょうど、細長い棒を圧縮すれば、一様に縮むのではなく座屈するよ

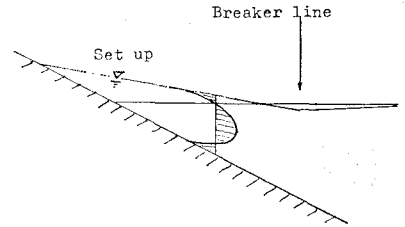


図-2(b) 質量輸送速度分布図

うに、リップ・カレントの cyclic な発生はむしろ自然な状態なのではないか?

著者らは、Bowen 説によるリップ・カレントの発生機構を否定するものではない。しかし、“自然は決して無理をしない”、“自然は巧妙なメカニズムにより、ごく少ないエネルギーで大きな規則的な変化を形成する”という著者らの哲学の上からこれに満足せず、以下のような流体力学的安定理論により自励的選択的リップ・カレントの発生と海底床変化の機構を考えた。

2. 基礎方程式

海岸線は直線的に延びており、また海底の元地形は汀線からの距離のみに関係し、等深線は海岸線と平行であるとする。汀線を y -座標軸、これと直角沖向きに x -座標軸をとる。流体の運動方程式を水深方向に積分し、二次元化して問題を扱う。水深方向に平均化した x, y 方向の流速成分 U, V に関する運動量方程式と連続の方程式は、式 (1), (2), (3) のように書かれる。ただし、流体の相互摩擦は省略する。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -g \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} - \frac{1}{\rho(\bar{\eta} + \bar{h})} \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} - \frac{CU}{\bar{\eta} + \bar{h}} \quad \dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -g \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} - \frac{1}{\rho(\bar{\eta} + \bar{h})} \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} - \frac{CV}{\bar{\eta} + \bar{h}} \quad \dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(\bar{\eta} + \bar{h})U] + \frac{\partial}{\partial y}[(\bar{\eta} + \bar{h})V] = 0 \quad \dots\dots (3)$$

ここに、 $\bar{\eta}$: 平均水位上昇高、 $\bar{h}$: 水深、 C : 海底摩擦係数、 S_{xx} および S_{yy} は次式で示される radiation stress tensor の成分である。

$$S_{xx} = \frac{1}{8} \rho g H^2 \left(\frac{2\kappa \bar{h}}{\sinh 2\kappa \bar{h}} + \frac{1}{2} \right)$$

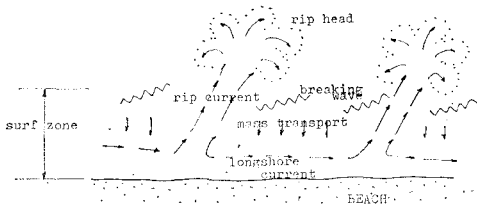


図-1 海浜流系統図

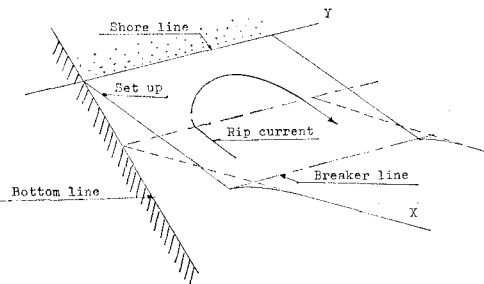


図-2(a) リップ・カレント模式図

* 正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科
** 正会員 東京工業大学学生 (現 運輸省第四港湾建設局)

$$\cong \frac{3}{16} \rho g H^2 \quad (\kappa \bar{h} \rightarrow 0) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$S_{yy} \cong \frac{1}{16} \rho g H^2 \quad (\kappa \bar{h} \rightarrow 0) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここでは、砕波帯付近の浅海 ($\kappa \bar{h} \rightarrow 0$) という近似が用いられている。また、砕波帯の岸側では、波高 H は水深に比例して減衰すると考えられるから

$$H = r(\bar{\eta} + \bar{h}) \quad \dots\dots\dots (6)$$

である。

式 (4), (6) を式 (1) に代入し、定常状態を仮定すると良く知られている “wave set-up” が求まる。

$$\frac{d\bar{\eta}}{dx} = -K \frac{d\bar{h}}{dx} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、

$$K = \left[1 + \frac{8}{3\gamma^2} \right]^{-1} = \left[1 + \frac{1}{3\epsilon} \right]^{-1} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\epsilon = \frac{1}{8} \gamma^2$$

次に海底質の輸送方程式を次式のように考える。

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (C_s U) - \frac{\partial}{\partial y} (C_s V) = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

海底質は波の軌道運動により巻き上げられ浮遊して移動しやすい状態になっている。これが平均流速で輸送されたと考える。したがって、底質輸送係数 C_s は波の特性と水深に関係する。しかし、水深の影響は平均流速 U , V を介して一応式 (9) の中に採り入れられている。ここで、式 (9) には河床の sand ripple 形成の理論において用いられる底質輸送と流速との位相差という考えが用いられていないことに注意されたい。

さて、はじめに仮定したような様な海岸波浪系には種々の外乱がたえず加えられている。波浪・流れ・潮汐・風等不規則な様々の波長成分から成る外因である。このため、流速・水深・水位上昇は常に微小な変動をしている。これを波長成分に分けて次のような初期摂動を仮定する。いまここでは簡単のために沿岸流はないものとする。

$$\left. \begin{aligned} U &= u(x) e^{pt} \cos ky \\ V &= v(x) e^{pt} \sin ky \\ \bar{\eta} &= \bar{\eta}_0(x) + \eta(x) e^{pt} \cos ky \\ \bar{h} &= d(x) + h(x) e^{pt} \cos ky \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $\bar{\eta}_0$: 平衡状態の “wave set-up” (式 (7) の解), $d(x)$: 元地形の水深。

式 (10) を基礎方程式 (1), (2), (3), (9) に代入すれば、次式をうる。ただし、式 (1), (2) の左辺の非線型慣性項は 2 次オーダーとして省略した。

$$\left(p + \frac{c}{d} \right) u + (1 + 3\epsilon) g \eta' + 3\epsilon g h' = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\left(p + \frac{c}{d} \right) v - (1 + \epsilon) g k y - \epsilon g k h = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$p \eta + (d \cdot u)' + k(d \cdot v) = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$p h - C_s u' - C_s k v = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 $\bar{\eta} + \bar{h} \cong d$ とした。

3. 時間応答性に基づく理論

さて、微小変動に関する基礎式 (11)~(14) をそのままの形で解析的に解く*ことはかなりむずかしいし、またこれを数値的方法により解くことは、物理的カラクリの解明の上から第一の策とはみなしがたい。そこで、ちょうど近代流体力学が、単に基礎方程式である $N-S$ 方程式を数学的に厳密に解くというのではなく、たとえば Prandtl の境界層理論におけるように、対象とする現象の物理的考察による解析法をとって来たと同じように、ここでもまず現象への物理的考察を行ない、それに基づいて基礎式を解くことにする。

海岸過程における流れと底質の変化を考えると、両者の境界面の変化に対する時間応答性に大きな差異がある。底面の形が変われば、それに対応して流れが変化しそれに伴って底質上の圧力や送流力の変化が生じる。その結果として海底地形も徐々に変化する。境界面の変化に対する応答は、前者の方が後者に較べてはるかに速い。すなわち、境界面での状態変化に対し、流れは quick response、底質移動は slow response である。流れが境界面の変化に対して速応性があるということは、流れを準定常流と想定して良いことであり、ある場合には流れの摂動をポテンシャル流れとして取扱って良いことである。

河床の sand wave に関する Kennedy—林の理論が、水流をポテンシャル流として取扱って成功していること、移動する波形境界上の流れに関する Brooke Benjamin の理論では、主流は rotational flow であるが摂動を非回転流れとしていることは、いずれも水流の境界面の変化に対する速応性が暗々裏に仮定されていると考えられる。

このように水と底質の二層の境界面応答性の相違を考えると、式 (1), (2), (3) において $U, V, \bar{\eta}$ の時間変化を $\bar{h}$ の時間変化に対して省略することができる。しかし、 $U \cdot V \cdot \bar{\eta}$ は水深 h を含み、これに関して時間の slowly varying function となっている。 $U \cdot V \cdot \bar{\eta}$ の摂動を式 (10) のように置くことにはかわりないが、式 (11)~(13) から $p u \cdot p v \cdot p \eta$ の項は消えてしまい、次のようになる。

$$C u + g \eta' + 3\epsilon g h' = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$-C v + g k \eta + \epsilon g k h = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$(d u)' + k(d \cdot v) = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$p h - C_s u' - C_s k v = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

この問題における境界条件は、 $x=0$ で $U=0$ と $x \rightarrow \infty$ で $U=V=0$ である。しかし、いまわれわれに関心のあ

* 文献 4) に直接法の近似解を取扱っている。

る $x \approx 0$ の砕波帯より岸側に主に起こる現象についてみれば、 $x \rightarrow \infty$ での条件のかわりに、 $x=l$ で $U=1$, $V=0$ と採る。

それゆえ、変数 u, v, η, h を次のような Fourier 級数で表示する。

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_m A_m \sin m l x \\ v &= \sum_m b_m \cos m l x \\ \eta &= \sum_m c_m \cos m l x \\ h &= \sum_m d_m \cos m l x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ここに、 l は汀線から砕波帯までの距離 L の逆数に比例し、

$$l = \pi/2L \dots\dots\dots (20)$$

また、 $d'u/d$ も

$$\left(\frac{d'}{d} \right) u = \sum_m a_m \cos m l x \dots\dots\dots (21)$$

と Fourier 級数に展開する。上式を (d'/d) で割り、左辺に式 (19) の第一式を代入し、両辺に $\sin m'l x$ を掛けて $(0, L)$ の区間で積分すれば、 A_m と a_m の関係が定まる。

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{L} \int_0^L u \sin m l x dx \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{d'}{d} \right) \left(\sum_n a_n \cos n l x \right) \sin m l x dx \\ &= \frac{1}{L} \sum_n a_n \int_0^L \left(\frac{d'}{d} \right) \cos n l x \sin m l x dx \dots\dots (22) \end{aligned}$$

いま、海底の元地形を

$$d(x) = \mu x^r \dots\dots\dots (23)$$

と仮定すれば、

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{L} \sum_n a_n \int_0^L \frac{x}{r} \cos n l x \cdot \sin m l x dx \\ &= \sum_n \alpha_{nm} a_n \end{aligned}$$

ここに、

$$\alpha_{nm} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{x}{r} \cos n l x \cdot \sin m l x dx \dots\dots\dots (25)$$

最初の数項について、具体的に示すと

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{L}{4r}, \quad \alpha_{21} = -\frac{4L}{3\pi r}, \\ \alpha_{12} &= \frac{2L}{3\pi r}, \quad \alpha_{22} = -\frac{L}{4r}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

式 (19), (21) を式 (15)~(18) に代入し、Fourier 級数の各係数について整理すれば、次の関係を得る。

$$CA_m - gmlc_m - 3\epsilon gml d_m = 0 \dots\dots\dots (27)$$

$$Cb_m - gkc_m - \epsilon gkd_m = 0 \dots\dots\dots (28)$$

$$mlA_m + a_m + kb_m = 0 \dots\dots\dots (29)$$

$$mpd_m - C_s mlA_m - C_s kb_m = 0 \dots\dots\dots (30)$$

あるいは、 A_m に a_n との関係代入し、また式 (29) を式 (30) に代入して、

$$C \sum_n \alpha_{nm} a_n - gmlc_m - 3\epsilon gml d_m = 0 \dots\dots\dots (31)$$

$$Cb_m - gkc_m - \epsilon gkd_m = 0 \dots\dots\dots (32)$$

$$ml \sum_n \alpha_{nm} a_n + a_m + kb_m = 0 \dots\dots\dots (33)$$

$$mpd_m - C_s a_m \dots\dots\dots (34)$$

の関係をうる。上の 4 式のうちまず最初の 3 式を用いてベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots)^T$ とベクトル $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots)^T$ の関係を求めることができる。次に、この関係を式 (34) に代入し、行列表示を行なえば、 p を固有値として定めることができる。

いま、 $m=1, 2, n=1, 2$ とすると、式 (31)~(34) の関係は、次のように行列で表示しうる。

$$\begin{pmatrix} C\alpha_{11} & C\alpha_{21} & 0 & 0 & -gl & 0 \\ C\alpha_{12} & C\alpha_{22} & 0 & 0 & 0 & -2gl \\ 0 & 0 & C & 0 & -gk & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 & -gk \\ l\alpha_{11}+1 & l\alpha_{21} & k & 0 & 0 & 0 \\ 2l\alpha_{12} & 2l\alpha_{22}+1 & 0 & k & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\epsilon gld_1 \\ 6\epsilon gld_2 \\ \epsilon gkd_1 \\ \epsilon gkd_2 \\ c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (35)$$

これよりベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T$ を求めると

$$\mathbf{a} = \frac{2\epsilon g l k^2}{c|A|} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{d} \dots\dots\dots (36)$$

ここに、 $|A|$ は行列式、 B は行列で次のように表わされる。

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} C_{22} & -C_{21} \\ -C_{21} & C_{11} \end{bmatrix} \dots\dots (37) \\ C_{11} &= (l^2 + k^2)\alpha_{11} + l, \quad C_{21} = (l^2 + k^2)\alpha_{21} \\ C_{12} &= (4l^2 + k^2)\alpha_{12}, \quad C_{22} = (4l^2 + k^2)\alpha_{22} + 2l \end{aligned} \dots\dots (38)$$

式 (36) を式 (34) に代入すれば

$$p\mathbf{d} = -\frac{2\epsilon g l k^2}{C|A|} \mathbf{B} \mathbf{d} \dots\dots\dots (39)$$

を得る。上式の有義な解が存在するためには、

$$\det \left[\sigma \mathbf{E} + \frac{k^2}{|A|} \mathbf{B} \right] = 0 \dots\dots\dots (40)$$

であることが必要で、これより固有値 σ が決定される。

ここに、 $\mathbf{E}$: 単位行列

$$\sigma = \frac{CL}{\pi \epsilon g C_s} p \dots\dots\dots (41)$$

式 (40) を展開すると

$$\sigma^2 + \frac{k^2}{|A|} (C_{11} + C_{22}) \sigma + \frac{k^4}{|A|} = 0 \dots\dots\dots (42)$$

したがって、固有値 σ は

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{k^2}{|A|} \left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4|A|}{d^2}} \right) \dots\dots\dots (43)$$

となる。また、 $|A|$ と d は次のように表わされる。

$$|A| = [a(Lk)^4 + b(Lk)^2 + c]/L^2 \dots\dots\dots (44)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \left(\frac{8}{9\pi^2} - \frac{1}{16} \right) \left(\frac{1}{r} \right)^2 \\ b &= \left(\frac{10}{9\pi^2} - \frac{5}{4 \times 16} \right) \frac{\pi^2}{r^2} + \frac{\pi}{8r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

$$c = \left(\frac{32}{9\pi^2} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{\pi^2}{4r} \right) - \frac{\pi^2}{8r} + \frac{\pi^2}{2}$$

$$d = C_{11} + C_{22} = \frac{3\pi}{2L} \left(1 - \frac{\pi}{4r} \right)$$

元海底地形に関するべき乗数 r をパラメーターに採って、リップ・カレントの発生間隔の波数の2乗 $(Lk)^2$ と時間増幅率 σ との関係を図-3に示す。

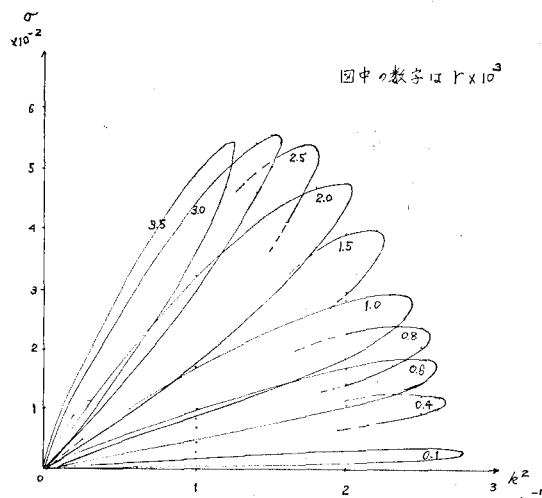


図-3

図-3によれば、ある範囲の r , Lk に対して $\sigma > 0$ となり、 r を

一定とするととき一つの $Lk = Lk_0$ で σ は最大の正值となる。つまり、摂動が時間とともに対数的に増幅され、特定の波長 k_0 で選択的自励的にリップ・カレントおよび海底変形が急速に成長することが示された。また、リップ・カレントの発生には碎波帯の海岸側の radiation stress の項 (c) が重要な役割をはたしていることは、式 (41) をみればわかる (もし、 $\epsilon \rightarrow 0$ とすれば $p \rightarrow 0$ となる)。同じ理由により、海底質が固定であればリップ・カレントは増幅しない。その他の特性を列挙すれば、次のようである。

① リップ・カレントと海底変形は、海底摩擦が小さい (C が小さい) ほど、また海底質が移動しやすい状態にある (C_s が大きい) ほど、碎波帯が近いほど生長しやすい。

② リップ・カレントが発生するのは、 r の値

$$r \leq 0.038$$

すなわち、汀線から急に深くなりそれ以後ならかな遠浅の海岸、いわゆる磯波帯のある地形に発生する。 r がこの値以上ならば、 σ は実部が負の複素数であり、摂動は振動しながら減衰する。

③ リップ・カレントおよび海底の変形の間隔は、碎波帯が遠くなるほど広くなる。

これらの理論的結論は、これまでのリップ・カレントの実測調査とほとんど一致しており、本理論の妥当性を裏づけるものである。

4. 今後の課題

本報告ではリップ・カレントは不安定現象であることを示すために、最も単純な場合を論じた。今後の課題としては、次のようなものがあり、一部は現在進行中である。

- ① 式 (11)~(14) の厳密解
- ② 定差方程式化による基本式の行列表示とその固有値・固有ベクトル
- ③ 沿岸流のある場合への一般化
- ④ 非線型項を省略しない解
- ⑤ 実測あるいは実験との比較

謝 辞: 約2年前の着想に始まるこの研究の第一段階の報告をまとめるにあたり、まず誰よりも Louisiana 州立大学海岸研究所の鮮于澈 (C. J. Sonu) 教授に感謝したい。昨年5月に約1カ月ほどのル大滞在中に、われわれはリップ・カレントは不安定現象であると意見が一致し、種々の討議を重ねた。この間、同教授の海岸過程への深い知識に教示されることが多かった。

その後の長い理論の定式化の過程にあたっては東京工業大学 吉川教授、椎貝助教授をはじめ水工研究室の方々の熱心で鋭い討議と、同大学院の宇多高明君の協力とに深く感謝したい。

参 考 文 献

- 1) Phillips, O. M.: Dynamics of Upper Ocean, Cambridge Univ. Press.
- 2) Bowen, A. J.: Rip currents 1, J. Geophys. Res. Vol. 74, No. 23 (1969)
- 3) 堀川清司・佐々木民雄・福井直治・五十嵐元・鬼頭平三: 海浜流に関する研究 (第1報), 第18回海岸工学講演会論文集 (1971)
- 4) 林 直樹: 海浜過程—Rip currents の発生, 東京工業大学土木工学科 昭和46年度卒業論文, 3月 (1972)