往復流中における廃液の移流と拡散について

林　泰　造*

1. まえがき

せん断往復流の中の dispersion（移流分散）についてはかなりの研究がなされている。せん断定常流の場合には Elder[1], Fischer[2] らの研究がそのまま役に立つが，その場合，ある断面において流れに物質を投入後，現象が一次元の拡散方程式

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial c}{\partial x}=D_L\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad \cdots\cdots(1)$$

で表わされるようになるのは，ある時間 T_c を過ぎてからである。なお，式 (1) 中の c は断面平均濃度，$\bar{u}$ は断面平均流速，D_L は移流分散係数，である。また，T_c は $T_c=(3\sim6)T_L$ であることが Fischer により示されている。ただし T_L は Lagrange 時間スケールである。

往復流の場合には，その周期を T とすると，せん断往復流による移流分散には無次元パラメーター $T'=T/T_c$ が大きな役割をもつことが Holley-Harleman-Fischer[3] により示された。彼等は往復流による流速は鉛直方向は直線的で水底で0としたときの往復流の移流分散係数 D_L を求め，$D_L/D_{L\infty}$（ただし $D_{L\infty}$ は定常流のときの D_L の値）の値を T' に対して図示した。

せん断往復流の中の移流分散係数について，Bowden[4] も研究を行なっており，

$$D_L\,(\text{往復流}) \approx \frac{1}{2}D_L\,(\text{定常流}) \quad \cdots\cdots(2)$$

の関係を示している。

本研究においては移流分散係数 D_L の内容には深く立ち入らずに，上述の諸研究により与えられるものとし，そのような D_L を使用した Fick の2次元的な拡散方程式

$$\frac{\partial c}{\partial t}+u\frac{\partial c}{\partial x}+v\frac{\partial c}{\partial y}=D_x\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+D_y\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad \cdots\cdots(3)$$

を取扱い，瞬間点源および連続固定湧源からの放出物質の拡散について若干の検討を行なうものである。

2. 往復流の場合の Fick の方程式の解

厚さ H の水平層内を平面的に拡散するものとするとき，$t=0$ において原点 $x=y=0$ に瞬間投入された物質の拡散濃度は式 (3) から次のように与えられる。

$$c=\frac{M}{4\pi\rho H\sqrt{D_xD_yt}}\exp\left[-\frac{1}{4t}\left\{\frac{1}{D_x}\left(x-\int_0^t u(\tau)\,d\tau\right)^2+\frac{1}{D_y}\left(y-\int_0^t v(\tau)\,d\tau\right)^2\right\}\right] \quad \cdots\cdots(4)$$

ただし，M は投入した物質の総質量，ρ は海水の密度，D_x および D_y はそれぞれ x および y 方向への拡散係数，また $u(t)$ および $v(t)$ は場の流速のそれぞれ x および y 方向成分（空間的にはそれぞれ一様と考える），である。流れが

$$\left.\begin{array}{l} u(t)=U+a\cos\sigma t \\ v(t)=0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(5)$$

で表わされる場合には，式 (4) から次式をうる。

$$c=\frac{M}{4\pi\rho H\sqrt{D_xD_y}\,t}\exp\left[-\frac{1}{4t}\left\{\frac{(x-Ut-a\sin\sigma t)^2}{D_x}+\frac{y^2}{D_y}\right\}\right] \quad \cdots\cdots(6)$$

また，連続固定湧源の場合には，

$$c=\frac{S}{4\pi\rho H\sqrt{D_xD_y}}\int_0^t\frac{1}{\tau}\times\exp\left[-\frac{1}{4\tau}\left\{\frac{(x-U\tau-a\sin\sigma\tau)^2}{D_x}+\frac{y^2}{D_y}\right\}\right]d\tau \quad \cdots\cdots(7)$$

ただし S は単位時間当りの物質の投入質量である。

式 (7) に対する特殊な場合として $a=0$ の場合，すなわち一様流中の連続放出の場合，および $U=0$, $a=0$, すなわち流れのない場における連続放出の場合については，式 (7) 右辺の積分は遂行されて次のようになる。

一様流連続放出の場合：

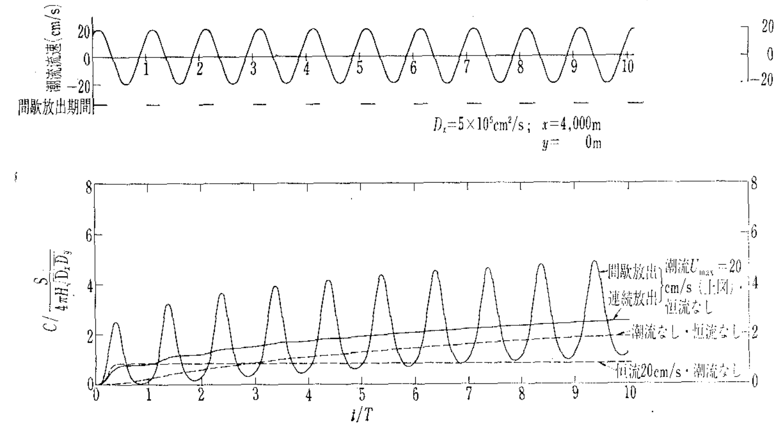
$$c=\frac{S}{4\pi\rho H\sqrt{D_xD_y}}2K_0\left(\frac{U}{2D_x}R\right)\times\exp\left(\frac{U}{2D_x}x\right) \quad \cdots\cdots(8)$$

ただし，K_0 は零次の変形 Bessel 関数，$R=\sqrt{x^2+(D_x/D_y)y^2}$ である。式 (8) の結果は先に岩井・井上[5]によっても求められていた。$D_x/UR<1$ を満たす R の範囲においては，上式は次のように展開される。

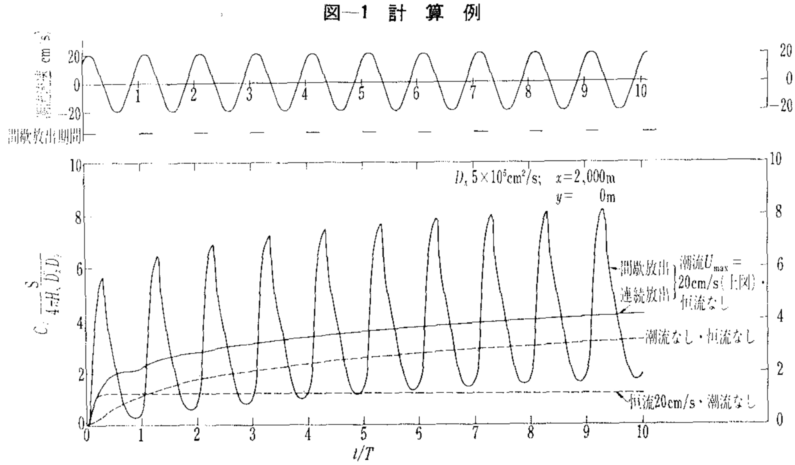
$$c=\frac{S}{2\sqrt{\pi}\rho H\sqrt{D_yUR}}\exp\left[-\frac{U}{2D_x}(R-x)\right]\times\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{D_x}{UR}\right)+\frac{9}{32}\left(\frac{D_x}{UR}\right)^2-\cdots\right] \quad \cdots(9)$$

流れのない場における連続放出の場合：

*正会員　工博　中央大学教授　理工学部土木工学科



図—1 計 算 例



図—2 計 算 例

$$c=-\frac{S}{4\pi\rho H\sqrt{D_xD_y}}\mathrm{Ei}\left(-\frac{R^2}{4D_xt}\right) \quad \cdots\cdots(10)$$

ここに，Ei は積分指数関数で

$$\mathrm{Ei}(X)=-\int_{-X}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$$

である。時間 t が十分大きいときには式 (10) は

$$c\approx\frac{S}{4\pi\rho H\sqrt{D_xD_y}}\times\left[-2.303\log_{10}\left(\frac{R^2}{4D_xt}\right)-\gamma\right] \quad \cdots\cdots\cdots(11)$$

となる。ただし，γ は Euler 数で $\gamma=0.57721$ である。

式 (7) の一般の場合に戻り，同式右辺の積分を解析的に厳密に遂行することは困難であるので，Gauss の数値積分法によりその積分値を求めた。数値積分には中央大学理工学部の電子計算機 HIPAC 103 を使用した。

図—1 および**図—2** はその数値計算の一例を示すものである。同図中には往復流の一周期 (T) 当りで総質量 M の物質を "連続放出" する場合と，$T/4$ の期間で M を放出し，残りの $3T/4$ の期間は休む "間歇放出" の場合の比較も示される。また，式 (8) および式 (10) による結果も，ともに破線で，示してある。

往復流中の連続放出の場合 (実線) を式 (8) および式 (10)の場合 (破線) と比べてみると，移流と拡散の各影響がかなり分析的に見られる。また，前者の場合には，これは往復流中の放出であるにもかかわらず，時間の経過とともに往復流の波形が認められなくなるが，これは式 (7) を見れば当然のことと理解される。

なお，式 (11) について一言注意を述べれば，同式は $t\to\infty$ に対して log の特異点をもつから，$t\to\infty$ において海域の濃度はいずれの点 (x, y) においても無限大となる。しかし，そのなり方は，$t=100{,}000$ 潮汐周期 (≒52 000 日≒140年) で $t=10$ 潮汐周期 (≒5 日) のときの 5 倍にしかならない程度の割合のものであることを見落してはならないであろう。

本研究においては，拡散係数 D_x, D_y をともにそれぞれ定数として取り扱ったが，拡散時間 t を考えてこれらを t の関数として取り扱うことも必要であることは申すまでもない。この計算は現在進行中であるので，次の機会に発表したいと考える。

参 考 文 献

1) Elder, J.W. : Journ. Fluid Mech. Vol. 5, 1959, pp. 544-560.
2) Fischer, H.B. : Proc. ASCE, HY 6, 1967, pp. 187-216.
3) Holley, E.R., D.R.F. Harleman and H.B. Fischer : Proc. ASCE, HY 8, 1970, pp. 1691-1709.
4) Bowden, K.F., J.F.M. Vol. 21, 1965, pp. 83-95.
5) Iwai, S., Y. Inoue and H. Higuchi : Advances in Water Pollution Research, 1964, pp. 883-899.