

重ね合わせによる波峯水位の確率計算について

久 宝 雅 史*・竹 沢 三 雄**・小 池 一 臣***

1. 概 説

海岸における潮位を確率分布で示し、これに波高より求めた水面上の波峯の高さの分布を無相関として統計的に重ね合わせ、実際に生じた波峯水位の分布とを比較検討して、それらがほぼ一致するとすれば、潮位および波高の確率分布の表示方法、重ね合わせ理論が成立し、設計潮位の定め方が確立することになり、もしも設計潮位が合理的に定められると港湾および海岸構造物の設計に役立つことはいうまでもない。ここに著者らは、潮位や波高の観測データのある統計的な変量としてとりあつかうことがかりに許されるものとして、また、潮位と波高の度数分布が、それぞれピアソンⅠ型分布曲線に適合するものとして、潮位と波高の度数分布曲線を線形的に重ね合わせた波峯水位の分布曲線から、その超過確率を求め、設計波峯水位について検討した。しかしながら、潮位と波高がそれぞれ統計的な変量としてとりあつかわれた場合、そこに相関がまったくないものとして潮位と波高を重ね合わせた波峯水位の分布は、実際に現地で生ずる波峯水位の度数分布とかなり差が生ずるかもしれないから、その補正を要するや否やも、検討しなければならない。

本論では、潮位と波高の現地観測データによる統計的な変量より、潮位と波高の2つの変量の重ね合わせによる波峯水位の超過確率曲線をピアソンⅠ型分布曲線から求め、潮位と波高の相関関係について、統計的に検討した。

2. 重ね合わせによる波峯水位

潮汐の変化は、これを統計的な変量として仮定する場合、その分布は両端有限で釣鐘状になるところから、ピアソンⅠ型分布曲線として表わせば、十分に満足できる結果をえることができた。同様に、波の変化についてもピアソンⅠ型分布曲線がかなり満足できる結果をえている¹⁾。したがって、潮位も波高も、それらの度数分布がピアソンⅠ型分布曲線で表わせるものとして、潮位と波高の重ね合わせによって求められる波峯水位の度数分布曲線について検討した。

図—1 (a) および 図—1 (b) は、満潮面と静水面上の水位の度数分布曲線で、潮位および波の水位の度数分布をピアソンⅠ型分布曲線で与えた場合、その曲線を微分した式で表わされると仮定する。

いま、満潮面の分布曲線を、

$$y_1 = A_1 x \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{u_1} \left(1 - \frac{x}{b_1}\right)^{v_1} \dots\dots\dots (1)$$

とし、静水面上の水位の分布曲線を、

$$y_2 = A_2 x \left(1 + \frac{x}{a_2}\right)^{u_2} \left(1 - \frac{x}{b_2}\right)^{v_2} \dots\dots\dots (2)$$

とすると、潮位と波高の重ね合わせによる波峯水位の分布曲線は、図—1 (c) に示すように、それぞれ、

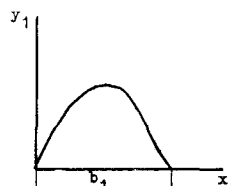
$$0 \leq x \leq m \quad ; y' = |f(x)|$$

$$m \leq x \leq n \quad ; y' = |g(x)|$$

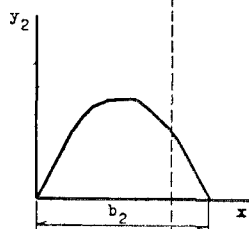
$$n \leq x \leq m+n \quad ; y' = |h(x)|$$

と各範囲で与えられ、これらの分布曲線は連続である。したがって、波峯水位の分布曲線式がそれぞれの範囲で求めれば、その超過確率は、図—2 のように表わされよう²⁾。まず、ピアソンⅠ型分布曲線³⁾を

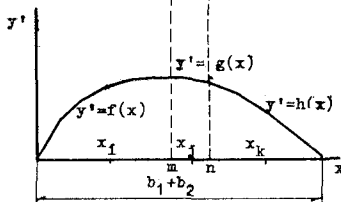
$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{ua} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{vb}$$



図—1 (a)
満潮面の分布



図—1 (b)
波の峯の分布



図—1 (c)
重ね合わせ水位
の分布

* 正会員 工博 日本大学教授 理工学部土木工学科

** 正会員 工修 日本大学理工学部土木工学科

*** 学生会員 日本大学大学院理工学研究科

とすると、式(1)、(2)で与えられる満潮面および静水面上の波の峯の度数分布曲線式の定数 A_1, A_2 および u_1, v_1, u_2, v_2 はそれぞれ、

$$A_i = i y_0 \left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{b_i} \right) v_i$$

$$u_i = v_i a_i - 1$$

$$v_i = v_i b_i - 1$$

から求められ、添字 1 は潮汐を、添字 2 は波を示す。ただし、 $i y_0$ はモード、 a_i, b_i はモードの位置から最小および最大の水位までの距離、 v_i は定数である。

いま、満潮面と静水面上の波の峯の重ね合わせから求められる波峯水位の度数分布曲線を前述のように、 $f(x), g(x), h(x)$ で与えると、

$$\begin{aligned} & 0 \leq x \leq m; |f(x)| \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{x_i} A_1 x \left(1 + \frac{x}{a_1} \right)^{u_1} \left(1 - \frac{x}{b_1} \right)^{v_1} dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{x_i} A_2 x \left(1 + \frac{x}{a_2} \right)^{u_2} \left(1 - \frac{x}{b_2} \right)^{v_2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ {}_1 y_0 \left(1 + \frac{x_i}{a_1} \right)^{v_1 a_1} \left(1 - \frac{x_i}{b_1} \right)^{v_1 b_1} \right. \\ &\quad \left. + {}_2 y_0 \left(1 + \frac{x_i}{a_2} \right)^{v_2 a_2} \left(1 - \frac{x_i}{b_2} \right)^{v_2 b_2} - ({}_1 y_0 + {}_2 y_0) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{ {}_1 P_i + {}_2 P_i - ({}_1 y_0 + {}_2 y_0) \} \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

となる。ただし、 ${}_1 P_i, {}_2 P_i$ は、

$${}_1 P_i = {}_1 y_0 \left(1 + \frac{x_i}{a_1} \right)^{v_1 a_1} \left(1 - \frac{x_i}{b_1} \right)^{v_1 b_1}$$

$${}_2 P_i = {}_2 y_0 \left(1 + \frac{x_i}{a_2} \right)^{v_2 a_2} \left(1 - \frac{x_i}{b_2} \right)^{v_2 b_2}$$

で、 ${}_1 y_0, {}_2 y_0$ は、それぞれ、潮位および波高のモードである。同様にして、

$$m \leq x \leq n; |g(x)| = \frac{1}{2} ({}_2 P_j - {}_2 P_{j-m} - {}_1 y_0) \dots\dots\dots (5)$$

$$n \leq x \leq m+n; |h(x)| = \frac{1}{2} ({}_1 P_{k-n} + {}_2 P_{k-m}) \dots\dots\dots (6)$$

で与えられる。ただし、

$${}_2 P_j = {}_2 y_0 \left(1 + \frac{x_j}{a_2} \right)^{v_2 a_2} \left(1 - \frac{x_j}{b_2} \right)^{v_2 b_2}$$

$${}_2 P_{j-m} = {}_2 y_0 \left(1 + \frac{x_j - m}{a_2} \right)^{v_2 a_2} \left(1 - \frac{x_j - m}{b_2} \right)^{v_2 b_2}$$

$${}_1 P_{k-n} = {}_1 y_0 \left(1 + \frac{x_{k-n}}{a_1} \right)^{v_1 a_1} \left(1 - \frac{x_{k-n}}{b_1} \right)^{v_1 b_1}$$

$${}_2 P_{k-m} = {}_2 y_0 \left(1 + \frac{x_{k-m}}{a_2} \right)^{v_2 a_2} \left(1 - \frac{x_{k-m}}{b_2} \right)^{v_2 b_2}$$

である。したがって、波峯水位の累積度数は、

$$0 \leq x \leq m; A_i = \int_0^{x_i} f(x) dx \dots\dots\dots (7)$$

$$m \leq x \leq n; A_j = \int_0^m f(x) dx + \int_m^{x_i} g(x) dx \dots\dots\dots (8)$$

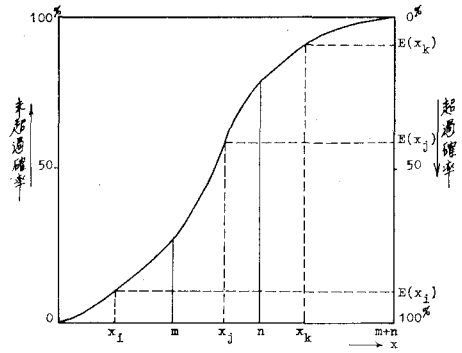


図-2 波峯水位の超過確率

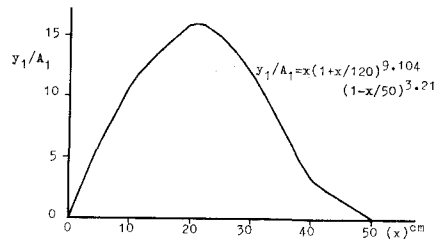


図-3 (a) 満潮面の分布曲線 (大樹)

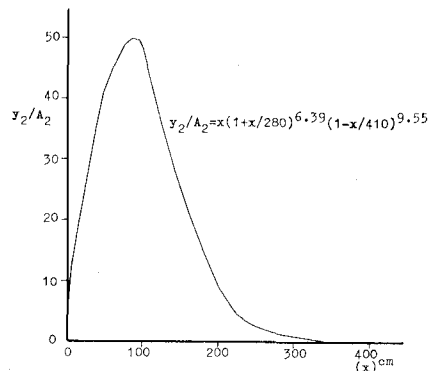


図-3 (b) 波の峯の分布曲線 (大樹)

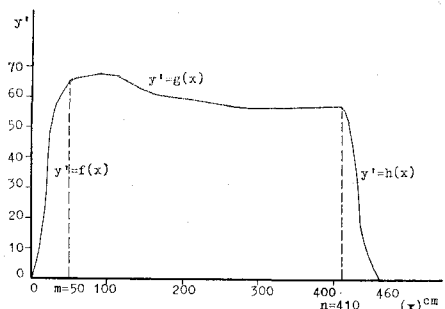


図-3 (c) 重ね合わせ波峯水位の分布曲線

$$n \leq x \leq m+n; A_k = \int_0^m f(x) dx + \int_m^n g(x) dx + \int_n^{m+n} h(x) dx \dots\dots\dots (9)$$

で与えられる。また、 $x_k = m+n$ における波峯水位の全累積度数は、

$$\begin{aligned} A_t &= \int_0^m f(x) dx + \int_m^n g(x) dx + \int_n^{m+n} h(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(b_2 \int_0^m y_1 dx + b_1 \int_0^n y_2 dx \right) \\ &= \frac{1}{2} (b_{2-1} y_0 + b_{1-2} y_0) \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

となるから、波峯水位の超過確率は、

$$0 \leq x \leq m; E(X_i) = 1 - A_i/A_t \dots\dots\dots (11)$$

$$m \leq x \leq n; E(X_j) = 1 - A_j/A_t \dots\dots\dots (12)$$

$$n \leq x \leq m+n; E(X_k) = 1 - A_k/A_t \dots\dots\dots (13)$$

となり、図-2 のようになる。

こうしてえられた波峯水位と現地の実際に生じた波峯水位について比較検討するために、北海道の大樹漁港における波峯水位を用いることにした。

大樹の潮位は、釧路を標準港にして算出されるから、釧路の潮位の度数分布を適用し、ピアソン I 型分布曲線式であらわすと、その満潮面の式は、式(1)、(3)から、 $\nu_1 = 8.42 \times 10^{-2}$, $a_1 = 120$ cm, $b_1 = 50$ cm を代入すると⁴⁾、

$$\frac{y_1}{A_1} = x \left(1 + \frac{x}{120} \right)^{9.104} \left(1 - \frac{x}{50} \right)^{3.21}$$

で、図-3 (a) のようになる。

また、大樹における波高の分布をピアソン I 型分布曲線で表わすと、静水面上の波の峯の度数分布曲線は、

$$\frac{y_2}{A_2} = x \left(1 + \frac{x}{280} \right)^{6.39} \left(1 - \frac{x}{410} \right)^{9.55}$$

で、図-3 (b) のようになる。ただし、 $\nu = 0.026$, $a_2 = 280$ cm, $b_2 = 410$ cm であるが、これには若干の誤差の介入がある。

したがって、潮位と波高の重ね合わせによる波峯水位の度数分布曲線式は、式(4)、(5)、(6)から、それぞれ、次式のように与えられよう。すなわち、

$$0 \leq x \leq m = 50 \text{ cm};$$

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \frac{1}{2} \{ {}_1P_i + {}_2P_i - ({}_1y_0 + {}_2y_0) \} \\ &\doteq 569 \left\{ \left(1 + \frac{x_i}{120} \right)^{10.104} \left(1 - \frac{x_i}{50} \right)^{4.21} - 1 \right\} \\ &\quad + 182.5 \left\{ \left(1 + \frac{x_i}{280} \right)^{7.39} \left(1 - \frac{x_i}{410} \right)^{10.55} - 1 \right\} \end{aligned}$$

$$m = 50 \text{ cm} \leq x \leq n = 410 \text{ cm};$$

$$\begin{aligned} |g(x)| &= \frac{1}{2} ({}_2P_j - {}_2P_{j-m-1} - {}_1y_0) \\ &\doteq 182.5 \left(1 + \frac{x_j}{280} \right)^{7.39} \left(1 - \frac{x_j}{410} \right)^{10.55} \end{aligned}$$

$$- \left(1 + \frac{x_j - 50}{280} \right)^{7.39} \left(1 - \frac{x_j - 50}{410} \right)^{10.55} \} - 569$$

$$n = 410 \text{ cm} \leq x \leq m+n = 460 \text{ cm}$$

$$|h(x)| = \frac{1}{2} ({}_1P_{k-n} + {}_2P_{k-m})$$

$$\begin{aligned} &= 569 \left(1 + \frac{x_k - 410}{120} \right)^{10.104} \left(1 - \frac{x_k - 410}{50} \right)^{4.21} \\ &\quad + 182.5 \left(1 + \frac{x_k - 50}{280} \right)^{7.39} \left(1 - \frac{x_k - 50}{410} \right)^{10.55} \end{aligned}$$

となり、図-3 (c) のように描かれるが、これにも当然誤差が介入する。

3. 波峯水位の超過確率について

港湾あるいは海岸構造物の計画規模の決定には、波峯水位以上の水位が生じる超過確率が用いられることが多いであろう。たとえば、大樹港の波峯水位について、潮位と波高をピアソン I 型分布曲線と与えるとき、その重ね合わせ波峯水位の超過確率曲線は、図-4 の実線のようにになる。これは、図-3 (c) の累積度数分布曲線から与えられる曲線で、最低低潮面からの水位と与えると、

$$X = x + 100 \text{ cm}$$

になる。また、図-5 に示した大樹漁港の実際に生じた波峯水位をピアソン I 型分布曲線で示し、さらに、その

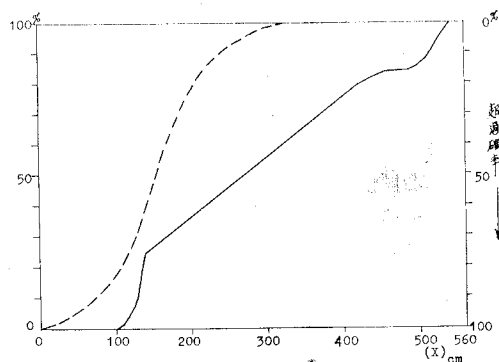


図-4 波峯水位の超過確率曲線

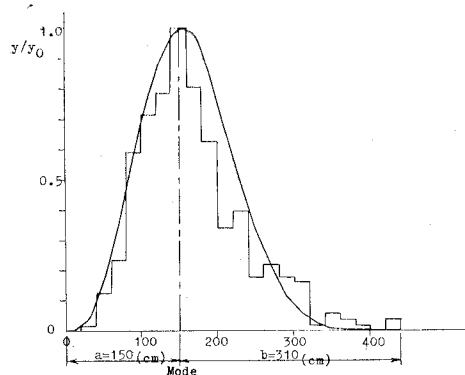


図-5 実際の波峯水位の度数分布 (大樹)

超過確率を求めると、図-4の点線で示した確率曲線がえられる⁹⁾。しかし、これに関しても、図-5が示すように、かなりの誤差が認められる。したがって、図-4から、2つの超過確率曲線から、かなりの差が生じてくるが、これは、潮位と波高の相関と計算上の誤差によるものであろう。また、この二つの超過確率曲線から、その超過確率の差を調べると、図-6のようになる。その

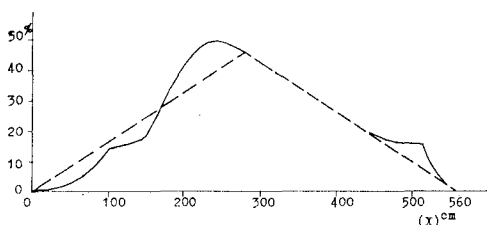


図-6 相関および計算のため介入した値

結果、この超過確率の差を、潮位と波高の重ね合わせによる波峯水位の超過確率から減ずることによって、実際に生ずる波峯水位の超過確率に近づくことになる。そこで、図-6の潮位と波高の相関関係による超過確率の差を示すグラフで、その曲線がおおよそ左右対称の分布をしているところから、図-6の点線による二等辺三角形の分布型で、その勾配を求めると、平均波峯水位以下の水位では、280 cm の水位に対して 45% の割合で増加していることから、その増加率は 0.16%/cm となり、この割合で相関部分が含まれていることになる。また、平均波峯水位以上の水位になると、同様に 280 cm に対して 45% の勾配になり、その減少率は、0.16%/cm となり、その割合で相関部分が含まれることになる。特に、これは、図-5の曲線表示が左半分はやや小さく、右半分がやや大きく表示されたことにもよるであろう。

4. 結 論

以上、潮位の分布と波高の分布をピアソンⅠ型分布曲線にあてはめ、潮位と波高の重ね合わせによる波峯水位の確率値について論じ、実際の例について検討した。その結果、確率分布の示し方に潮位はかなり正しくピアソン型分布として示されるが、波高に関する静水面上の水位上昇に関しては誤差が入りやすいので、重ね合わせた波峯水位に関する誤差もかなり大きく、相関性を見出す程度にいたらなかった。そこでもしも計算誤差内に相関性が入るものと考え、潮汐の確率表示と有義潮位と、さらに波高に関する有義波高などに関して、重ね合わせ理論がほぼ成立すると考えてよいはずである。こうして港湾および海岸構造物の設計水位を統計的な方法を用いて決定する場合、潮位に関する有義潮位なるものを考え、それに有義波高を重ね合わせ、さらに有義波などを生ずるときの気圧低下あるいは風の吹き寄せなどによる気象潮位の偏差などを加算して設計波峯水位にすることが有義波という思想をつらぬいた合理的な設計計画潮位になるといえる。最後に、大樹漁港における資料に御協力いただいた北海道土木部の戸巻昭三氏に対し深甚なる謝意を表するしだいである。

参 考 文 献

- 1) 久宝・竹沢・天埜：ピアソンⅠ型分布による海の波、第15回海岸工学講演会講演集、昭和43年12月。
- 2) 久宝・竹沢・小池：波峯水位の度数分布曲線について、第26回土木学会年次講演会講演要旨、昭和46年10月。
- 3) 佐藤良一郎：数理統計学、培風館。
- 4) 久宝・竹沢：日本沿岸における潮位の計画水面について、第17回海岸工学講演会論文集、昭和45年10月。
- 5) 久宝・竹沢・天埜・牧野：水位と波高の重ね合わせに関する統計的研究、第14回海岸工学講演会講演集、昭和42年11月。