

大型ポンツーンの運動

本間 仁*・荻原国宏**

1. はじめに

本論文で考えているポンツーンは、図-1のように円筒形の浮子を剛な構造の板で結合したものである。波は筒の配置が平行になる方向より進入してくる場合を考え、波の波長 L と浮子間隔 l との関係、浮子の運動系（振動系）と波による応答の関係について理論解析をしてみた。

2. 固有振動

この場合の固有振動としては、鉛直運動、水平運動、回転運動の3つを考える。鉛直、回転運動の場合には浮子の浮沈に伴う浮力の増減がばねとして作用し、水平運動ではアンカーのワイヤの変位による復元力がばねの作用をすることになる。したがって運動方程式は次のとくなる。座標系は図-1参照。

$$\left. \begin{array}{l} M\ddot{y} + R_y\dot{y} + 2wAy = 0 \\ M\ddot{x} + R_x\dot{x} + kx = 0 \\ I\ddot{\theta} + R_\theta\dot{\theta} + 2wAh_0\left(\frac{I_\theta}{U} - a\right)\theta = 0 \end{array} \right\} \dots\dots(1)$$

ここに、 M 、 I は付加質量をも考慮した、ポンツーンの質量、慣性モーメントである。 R_y 、 R_x 、 R_θ は減衰係数、 A は浮子の断面積の2倍 ($A=2A_0$)、 k ：水平方向のばね定数、 h_0 ：吃水深、 I_θ は θ 軸のまわりの断面2次

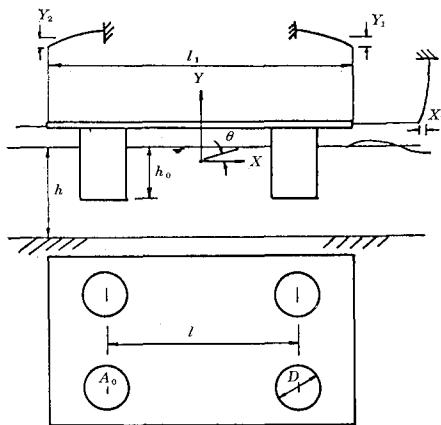


図-1

モーメント、 U ：水中体積 ($U=2Ah_0$)、 a ：重心と浮心の距離、 w ：水の単位重量を示す。

この式の解はよく知られているごとく、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} y \\ x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \cdot \exp \left\{ - \left(\frac{\zeta_y \omega_{0y}}{\zeta_x \omega_{0x}} \right) t \right\} \cdot \sin \left\{ \frac{\omega_{0y} \sqrt{1 - \zeta_y^2}}{\omega_{0x} \sqrt{1 - \zeta_x^2}} t \right\} \cdot \frac{\omega_{0\theta} \sqrt{1 - \zeta_\theta^2}}{\omega_{0x} \sqrt{1 - \zeta_x^2}} \quad \dots\dots(2)$$

ここに、 ζ_y 、 ζ_x 、 ζ_θ 、 ω_{0y} 、 ω_{0x} 、 $\omega_{0\theta}$ は次のとくなる。ただ式(2)の解は減衰振動になる解の場合である。

$$\left. \begin{array}{l} \zeta_y = \frac{R_y}{2\sqrt{M \cdot 2wA}}, \quad \zeta_x = \frac{R_x}{2\sqrt{M \cdot k}}, \\ \zeta_\theta = \frac{R_\theta}{2\sqrt{I \cdot 2wAh_0 \left(\frac{I_\theta}{U} - a \right)}} \\ \omega_{0y} = \sqrt{\frac{2wA}{M}}, \quad \omega_{0x} = \sqrt{\frac{k}{M}}, \\ \omega_{0\theta} = \sqrt{\frac{2wAh_0 \left(\frac{I_\theta}{U} - a \right)}{I}} \end{array} \right\} \dots\dots(3)$$

ω_{0x} 、 ω_{0y} 、 $\omega_{0\theta}$ はそれぞれ、水平、鉛直、回転の固有振動の角周波数を示す。

3. 波による外力の表示

波のこのポンツーンに作用する力は、結局、浮子に働くものである。そこで一つの浮子に働く外力の形を決めた後に、ポンツーン全体の外力を決めるこにする。浮子に働く外力は主として鉛直方向と水平方向であるのでそれぞれ次の形を仮定する。

$$\left. \begin{array}{l} F_z(\eta) = wA\eta + \rho C_M Ah_0 \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{z=-h_0} \\ \quad + \rho C_D A \left(\frac{v^2}{2} \right)_{z=-h_0} \\ F_x(\eta) = wh_0 d^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \rho C_M h_0 A \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{z=-h_0/2} \\ \quad + \rho C_D dh_0 \left(\frac{u^2}{2} \right)_{z=-h_0/2} \end{array} \right\} \dots\dots(4)$$

ポンツーン全体に働く力は、 $x=\frac{l}{2}$ 、 $x=-\frac{l}{2}$ の位置にある浮子に働く式(4)の力を合成することによって求められる。すなわち、鉛直、回転、水平運動の外力は

$$\left. \begin{aligned} F_y &= F_z \left(\frac{l}{2} \right) + F_z \left(-\frac{l}{2} \right) \\ F_\theta &= F_z \left(\frac{l}{2} \right) \times \frac{l}{2} - F_z \left(-\frac{l}{2} \right) \times \frac{l}{2} \\ &= \frac{l}{2} \left[F_z \left(\frac{l}{2} \right) - F_z \left(-\frac{l}{2} \right) \right] \\ F_x &= F_z \left(\frac{l}{2} \right) + F_x \left(-\frac{l}{2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

となる。なお式(4)の $F_z(\eta)$ の初項は水面上昇による浮力の増減を、第3項は速度変化に伴う慣性力および形状抵抗に相当する外力を示す。 $F_x(\eta)$ の第1項は水面勾配による静水圧の差による横向きの力、第2、3項は速度変化による慣性力および形状抵抗による力である。

これらの各項の中に式(6)～(8)より v , $\partial v / \partial t$, u , $\partial u / \partial t$ を求めて代入, 整理すればよいが, v , $\partial v / \partial t$, u , $\partial u / \partial t$, $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ は次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{H}{2} cm \frac{\sinh m(h+z)}{\sinh mh} \cos m(x-ct) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{H}{2} (mc)^2 \frac{\sinh m(h+z)}{\sinh mh} \sin m(x-ct) \\ u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{H}{2} mc \frac{\cosh m(h+z)}{\sinh mh} \sin m(x-ct) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{H}{2} (mc)^2 \frac{\cosh m(h+z)}{\sinh mh} \cos m(x-ct) \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{Hm}{2} \frac{\sinh m(h+z)}{\sinh mh} \cos m(x-ct) \end{aligned} \right\} . \quad (10)$$

式(9)の{ }の中の値はそれぞれ次のとくなる。

$$\begin{aligned}\eta\left(\frac{l}{2}\right) - \eta\left(-\frac{l}{2}\right) &= H \sin \frac{ml}{2} \cos mct \\ \eta\left(\frac{l}{2}\right) + \eta\left(-\frac{l}{2}\right) &= -H \cos \frac{ml}{2} \sin mct \\ \left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=l/2} + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=-l/2} &= mH \cos \frac{ml}{2} \cos mct\end{aligned}$$

以上すべて $z=0$ の水面での値を使っている。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{x=l/2} + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{x=-l/2} &= H(mc)^2 \frac{\sinh m(h+z)}{\sinh mh} \sin mct \cos \frac{ml}{2} \\ \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{x=l/2} - \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{x=-l/2} &= -H(mc)^2 \frac{\sinh m(h+z)}{\sinh mh} \cos mct \sin \frac{ml}{2} \\ (v^2)_{x=l/2} - (v^2)_{x=-l/2} &= \left(\frac{H}{2} \right)^2 (mc)^2 \left\{ \frac{\sinh m(h+z)}{\sinh mh} \right\}^2 \sin ml \sin 2mct \\ (v^2)_{x=l/2} + (v^2)_{x=-l/2} &= \left(\frac{H}{2} \right)^2 (mc)^2 \left\{ \frac{\sinh m(h+z)}{\sinh mh} \right\}^2 \{1 + \cos ml \cos 2mct\} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=-l/2} + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=l/2} = -H(mc)^2 \left\{ \frac{\cosh m(h+z)}{\sinh mh} \right\} \cos \frac{ml}{2} \cos mct$$

$$(u^2)_{x=l/2} + (u^2)_{x=-l/2} = \left(\frac{H}{2} \right)^2 (mc)^2 \left\{ \frac{\cosh m(h+z)}{\sinh mh} \right\}^2 \{1 - \cos ml \cos 2mct\}$$

これらを式(9)に代入して整理すると結局次のような式となる。

$$\left. \begin{aligned} F_y &= \sin mct \cos \frac{ml}{2} \left\{ -wAH + \rho C_M A h_0 H (mc)^2 \frac{\sinh m(h-h_0)}{\sinh mh} \right\} \\ &\quad + \frac{\rho C_D A}{2} \left(\frac{H}{2} \right)^2 (mc)^2 \left\{ \frac{\sinh m(h-h_0)}{\sinh mh} \right\}^2 \{1 + \cos ml \cos 2mct\} \\ F_\theta &= \cos mct \sin \frac{ml}{2} \left\{ \frac{wAHl}{2} - \frac{\rho C_M A h_0 l H}{2} (mc)^2 \frac{\sinh m(h-h_0)}{\sinh mh} \right\} \\ &\quad + \frac{\rho C_D A l}{4} \left(\frac{H}{2} \right)^2 (mc)^2 \left\{ \frac{\sinh m(h-h_0)}{\sinh mh} \right\}^2 \sin ml \sin 2mct \\ F_x &= \cos \frac{ml}{2} \cos mct \left\{ w h_0 d^2 m H - \rho C_M h_0 A H (mc)^2 \frac{\cosh m \left(h - \frac{h_0}{2} \right)}{\sinh mh} \right\} \\ &\quad + \frac{\rho C_D d h_0}{2} \left(\frac{H}{2} \right)^2 (mc)^2 \left\{ \frac{\cosh m \left(h - \frac{h_0}{2} \right)}{\sinh mh} \right\}^2 (1 - \cos ml \cos 2mct) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここで F_y, F_θ の中には共通項があるので、それらを次のようにおいて整理すると、

$$\left. \begin{aligned} Q_1' &= \frac{1}{2} \left\{ wAH - \frac{\rho C_M A h_0}{2} H (mc)^2 \frac{\sinh m(h-h_0)}{\sinh mh} \right\} \\ Q_2' &= \frac{\rho C_D A}{4} \left(\frac{H}{2} \right)^2 (mc)^2 \left\{ \frac{\sinh m(h-h_0)}{\sinh mh} \right\}^2 \\ Q_3' &= w h_0 d^2 m H - \rho C_M h_0 A H (mc)^2 \frac{\cosh m \left(h - \frac{h_0}{2} \right)}{\sinh mh} \\ Q_4' &= \frac{\rho C_D d h_0}{2} \left(\frac{H}{2} \right)^2 (mc)^2 \left\{ \frac{\cosh m \left(h - \frac{h_0}{2} \right)}{\sinh mh} \right\}^2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

とおくことができ、結局式(11)は(13)のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} F_y &= -2Q_1' \sin mct \cos \frac{ml}{2} + 2Q_2' (1 + \cos ml \cos 2mct) \\ F_\theta &= Q_1' l \cos mct \sin \frac{ml}{2} + Q_2' l \sin ml \sin 2mct \\ F_x &= Q_3' \cos \frac{ml}{2} \cos mct + Q_4' (1 - \cos ml \cos 2mct) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

以上で波によるポンツーンに働く外力項が求まったことになる。ここで注目すべきは、 F_θ, F_y において \sin, \cos の関係が対称的になっていることと、 F_y, F_x に時間に関係しない、 $2Q_2', Q_4'$ の項が入っていることである。

4. ポンツーンの波による運動

ポンツーンの運動の固有振動系は式(1)で与えられることはすでに述べた。この系に式(13)で示されるような外力が加わったときの解を求めれば、波によるポンツーンの運動がとることになる。すなわち運動方程式は、

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{y} + R_y \dot{y} + 2wA y &= F_y \\ M\ddot{x} + R_x \dot{x} + kx &= F_x \\ I\ddot{\theta} + R_\theta \dot{\theta} + 2wA h_0 \left(\frac{I_\theta}{U} - a \right) \theta &= F_\theta \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

この運動方程式の解を次のとく仮定して、それぞれの係数を決定する方法をとる。

$$\left. \begin{aligned} y &= Y_1 \sin(mCt - \varphi_{y1}) + Y_2 \cos(2mCt - \varphi_{y2}) + Y_3 \\ \theta &= \theta_1 \cos(mCt - \varphi_{\theta1}) + \theta_2 \sin(2mCt - \varphi_{\theta2}) \\ X &= X_1 \cos(mCt - \varphi_{x1}) + X_2 \sin(2mCt - \varphi_{x2}) + X_3 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式(14), (13)に(15)を入れて各係数を決めるところとなる。

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= -\frac{2Q_1'}{M} \cos \frac{ml}{2} \frac{1}{\sqrt{(\omega_{0y}^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_y \omega)^2}}, \quad \tan \varphi_{y1} = \frac{2\zeta_y (2\omega/\omega_{0y})}{1 - (\omega/\omega_{0y})^2} \\ Y_2 &= \frac{2Q_2'}{M} \cos ml \frac{1}{\sqrt{(\omega_{0y}^2 - 4\omega^2)^2 + (4\zeta_y \omega)^2}}, \quad \tan \varphi_{y2} = \frac{2\zeta_y (2\omega/\omega_{0y})}{1 - (2\omega/\omega_{0y})^2} \\ \theta_1 &= \frac{Q_1'l}{I} \cos \frac{ml}{2} \frac{1}{\sqrt{(\omega_{0\theta}^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_\theta \omega)^2}}, \quad \tan \varphi_{\theta1} = \frac{2\zeta_\theta (2\omega/\omega_{0\theta})}{1 - (\omega/\omega_{0\theta})^2} \\ \theta_2 &= \frac{Q_2'l}{I} \sin ml \frac{1}{\sqrt{(\omega_{0\theta}^2 - 4\omega^2)^2 + (4\zeta_\theta \omega)^2}}, \quad \tan \varphi_{\theta2} = \frac{2\zeta_\theta (2\omega/\omega_{0\theta})}{1 - (2\omega/\omega_{0\theta})^2} \\ X_1 &= \frac{Q_3'}{M} \cos \frac{ml}{2} \frac{1}{\sqrt{(\omega_{0x}^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_x \omega)^2}}, \quad \tan \varphi_{x1} = \frac{2\zeta_x (2\omega/\omega_{0x})}{1 - (\omega/\omega_{0x})^2} \\ X_2 &= -\frac{Q_4'}{M} \cos ml \frac{1}{\sqrt{(\omega_{0x}^2 - \omega^2)^2 + (4\zeta_x \omega)^2}}, \quad \tan \varphi_{x2} = \frac{2\zeta_x (2\omega/\omega_{0x})}{1 - (2\omega/\omega_{0x})^2} \\ Y_3 &= \frac{Q_2'}{M} \cdot \frac{1}{\omega_{0y}^2} \\ X_3 &= \frac{Q_4'}{M} \cdot \frac{1}{\omega_{0x}^2} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ただし、 $\omega = mc = 2\pi/T$, T は波の周期を示す。

さらに、 y, x, θ をそれぞれ無次元化して表示することを考えさらに、応答関数として H_1, H_2 を式 (17) のごとく定義することによって、ポンツーンの変位は式 (18) のごとくなる。

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\beta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}, \quad H_2 = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - 4\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(4\beta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (17)$$

$\omega_n : \omega_{0y}, \omega_{0x}, \omega_{0\theta}, \beta : \zeta_y, \zeta_\theta, \zeta_x$ とする。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{y}{H}\right) &= -\bar{Y}_1 H_1 \cos \frac{ml}{2} \sin(\omega t - \varphi_{y1}) + \bar{Y}_2 H_2 \cos ml \cos(2\omega t - \varphi_{y2}) + \bar{Y}_2 \\ \bar{\theta} \left(\frac{h_0}{H}\right) \left(\frac{L}{l}\right) \left(\frac{I_y}{Vh_0} - \frac{a}{h_0}\right) &= \bar{\theta}_1 H_1 \sin \frac{ml}{2} \cos(\omega t - \varphi_{\theta1}) + \bar{\theta}_2 H_2 \sin ml \sin(2\omega t - \varphi_{\theta2}) \\ \frac{x}{\left(\frac{H}{2}\right) \left(\frac{\omega d^2}{k}\right)} &= \bar{X}_1 H_1 \cos \frac{ml}{2} \cos(\omega t - \varphi_{x1}) - \bar{X}_2 H_2 \cos ml \sin(2\omega t - \varphi_{x2}) + \bar{X}_2 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{Y}_1 &= 1 - C_M \left(\frac{h_0}{h}\right) \left(\frac{2\pi h}{L}\right) \frac{\sinh \frac{2\pi h}{L} \left(1 - \frac{h_0}{h}\right)}{\cos 2\pi \frac{h}{L}} \\ \bar{Y}_2 &= \frac{C_D}{8} \left(\frac{2\pi h}{L}\right) \left(\frac{H}{h}\right) \frac{\sinh^2 \left(\frac{2\pi h}{L}\right) \left(1 - \frac{h_0}{h}\right)}{\cos \frac{2\pi h}{L} \sinh \frac{2\pi h}{L}} \\ \bar{\theta}_1 &= \bar{Y}_1 \cdot \frac{1}{2 \left(\frac{h_0}{h}\right) \left(\frac{2\pi h}{L}\right)} \\ \bar{\theta}_2 &= \bar{Y}_2 \cdot \frac{1}{2 \left(\frac{h_0}{h}\right) \left(\frac{2\pi h}{L}\right)} \\ \bar{X}_1 &= 4 \left(\frac{2\pi h}{L}\right) \left(\frac{h_0}{h}\right) \left\{ 1 - \frac{\pi}{4} C_M \frac{\cosh \frac{2\pi h}{L} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{h_0}{h}\right)}{\sinh \frac{2\pi h}{L}} \right\} \\ \bar{X}_2 &= \frac{C_D}{4} \left(\frac{2\pi h}{L}\right) \left(\frac{h_0}{h}\right) \left(\frac{H}{h}\right) \left(\frac{h}{d}\right) \frac{\cosh^2 \left(\frac{2\pi h}{L}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{h_0}{h}\right)}{\cosh \frac{2\pi h}{L} \sinh \frac{2\pi h}{L}} \end{aligned} \right\} \quad (18) \quad }$$

である。

5. 解の特性について

結局、大型ポンツーンの波による運動は式(17), (18)のように求まつたわけであるが、この現象を支配するパラメーターが非常に多い。それらを分類すると、

波の関係：波長 L , (h/L), 波高 H , (H/h), 周期

T , ($\omega = 2\pi/T$)

構造物関係：浮子間隔 l , (l/L), 固有角周波数 (ω_n), 減衰係数 (β), 形状抵抗係数 (C_D), 慣性力係数 (C_M), 浮子の直径 (d), 浮子のきっ水深 (h_0)

水域関係：水深 (h)

となる。そこで、これらのパラメーターによって運動の

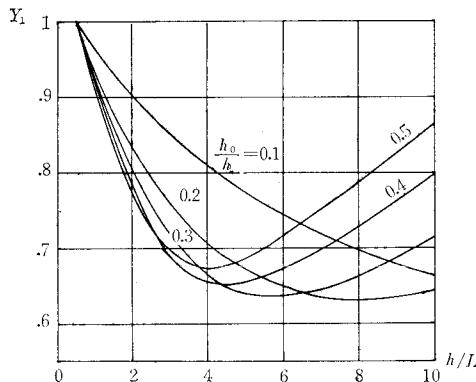


図-2 (a)

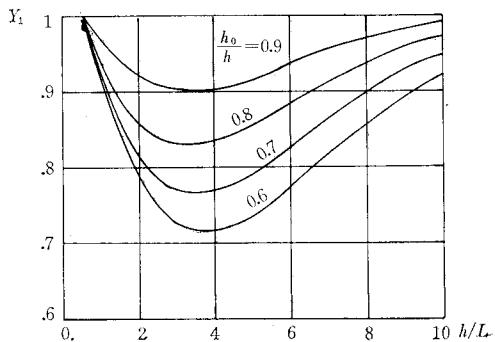


図-2 (b)

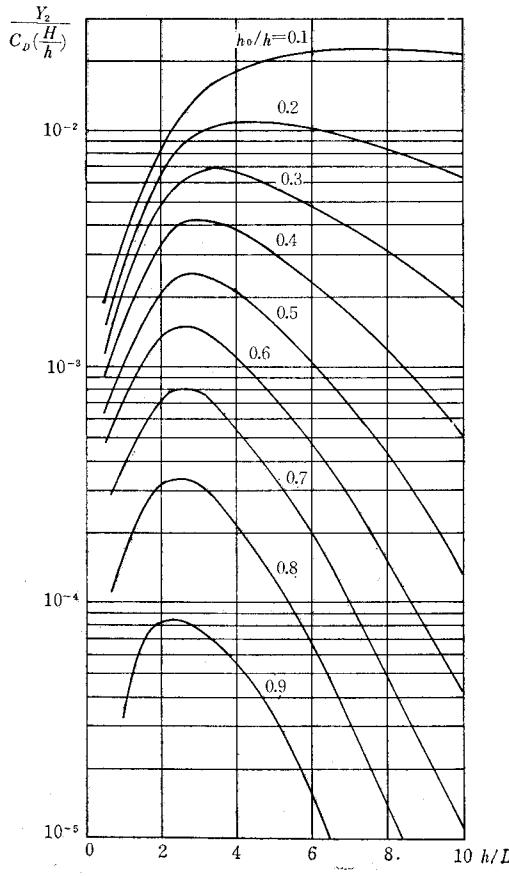


図-3

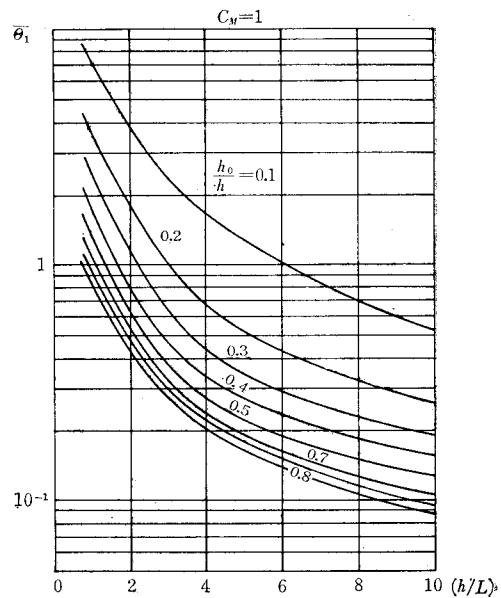


図-4

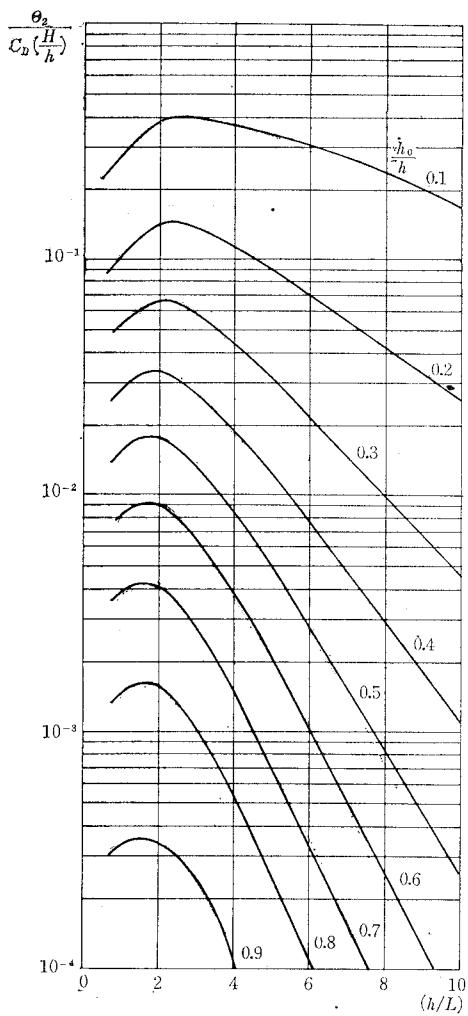


図-5

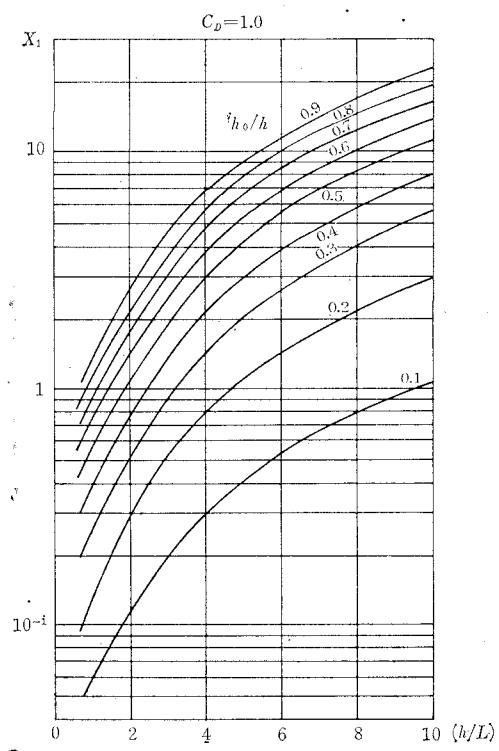


図-6

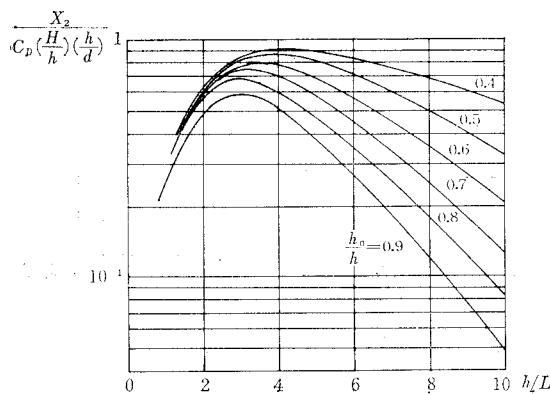


図-7 (a)

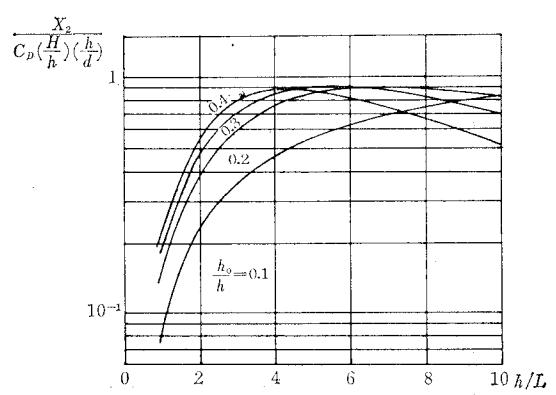


図-7 (b)

振幅を決める式(18)の各 $\bar{Y}_1 \sim \bar{X}_2$ までの値と応答関数 H_1, H_2 , 位相角 φ_1, φ_2 について数値計算をした。その結果を図に示したのが図-2~図-9までである。

(1) 鉛直運動(図-2, 3)

\bar{Y}_1 は式(8)の値を $C_M=1$ とした場合で計算し, \bar{Y}_2 は $\bar{Y}_2/C_D(H/h)$ として計算したものをプロットしている。図からもわかるごとく \bar{Y}_2 は \bar{Y}_1 に比してかなり小さい値を取っている。浮体の吃水が深いほど \bar{Y}_1, \bar{Y}_2 は小さくなっている。 \bar{Y}_1 については H/h の小さい所と大きい所で大きくなる傾向を示している。

(2) 回転運動(図-4, 5)

この場合も前の場合と同様に図-5は $\theta_2/(H/h)C_D$ を縦軸としてある。この場合も C_D の値によるが θ_1 のほうが θ_2 より大きな値を示している。吃水の影響は θ_2 においてかなり顕著である。いずれも h/L の増加によって減少している。

(3) 水平運動(図-6, 7)

図-7の縦軸は $\bar{X}_2/C_D(H/h) \cdot (h/d)$ を示している。 X_1 は h_0 の増加にしたがって増加する傾向を示し (h/L) の増加につれて増加している。

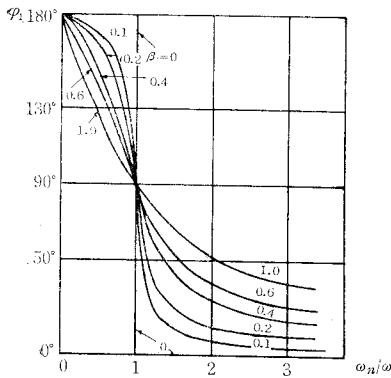
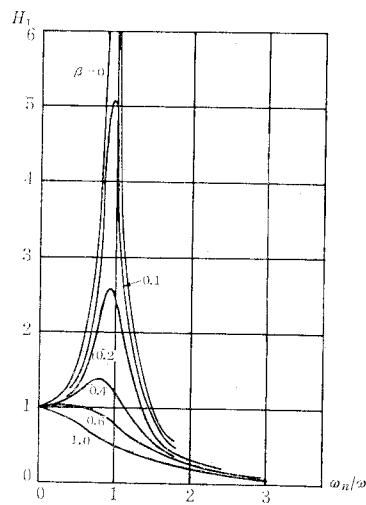


図-8

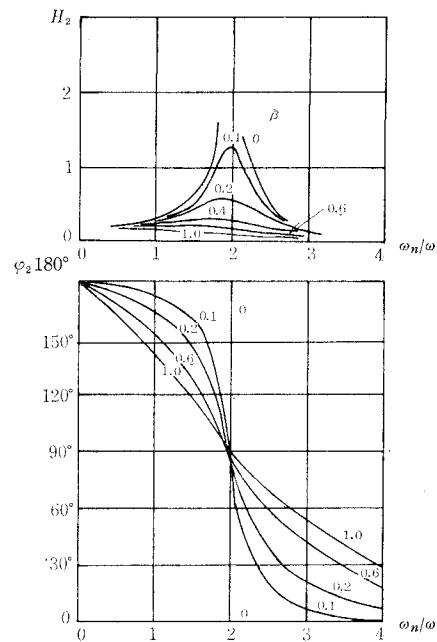


図-9

(4) 応答関数 H_1 と位相角 φ

共振点が $\omega_0/\omega=1, \omega_0/\omega=2$ の場合の2つがあるのでそれぞれ図-8, 9のごとくなる。図-8のほうは一般的振動の共振曲線と全く同じである。

6. まとめ

結局、ポンツーンの運動は、波の特性による $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{X}_1, \bar{X}_2$ の値と系の振動特性による $H_1, H_2, \varphi_1, \varphi_2$ の値、波長と板の長さとの関係 (l/L) の値によって支配されている。一般にポンツーンの吃水の深さが深いほど鉛直、回転運動が小さく、水平運動が大きくなる傾向を示す。模型実験（一部年次講演会1971年に発表）も並行して行ない、現在、運動を支配する力として考えた、浮力の増減、形状抵抗による力、慣性力による力、のいずれが支配的なのかについて整理を進めている。また、ポンツーンの運動と同時にアンカーに働く力（ポンツーンの動きによって）の解析も進めている。いずれまとまりしだい別の機会に発表したいと考えている。なお本年は浮子に抵抗をつけた模型実験および解析を計画している。

参考文献

- 1) Proceeding of OECON 1968.
- 2) 本間 仁: 水理学 丸善.
- 3) Buoy Technology, 1964 Buoy Technology Symposium.
- 4) 高橋利衛: 振動工学演習(I), オーム社.
- 5) 土木学会: 振動便覧.
- 6) Transactions 2nd International Buoy Technology Symposium (1967).