

矩形断面をもつ浮体の浅海波による自由運動—1. 理論—

井 島 武 士*・田 淵 幹 修**・湯 村 や す***

1. 概 要

波による浮体の運動は船舶運動学において、主として無限水深の波による船の運動として研究され、主要な運動外力を波による exciting force と、浮体運動による radiation force に分け、おのおの運動形式に対応する付加質量と減衰力をあらかじめ想定して運動を調べるという方法が多く、浅海における浮体の運動を取扱ったものは少ない。本文では、浅海部における矩形断面の浮体が微小振幅波によって行なう運動を2次元運動として取扱い、境界条件を正しく満足する解を求めて、浮体による波の反射効果、浮体の heaving, swaying および rolling motion の運動振幅、あるいは浮体重心の移動軌跡などを求めたものである。

ここでは浮体が mooring force 等による拘束力を受けない場合を示したが、微小運動の範囲内では一般に拘束力は浮体変位に比例するから、類似の方法で容易に解明される。また浮体が岸壁付近にあってその反射波の影響を受ける場合についても同じ方法で解くことができるのでその例を示した。これらの結果は港内に碇泊している船舶の運動あるいはポンツーンによる浮防波堤の効果等についての考え方に応用することができる。

2. 進行波による運動

Fig. 1 に示すように一定水深 h の浅海部に幅 $2l$ 、吃水 qh ($1 > q > 0$) の矩形浮体がある場合、右方からの周波数 $\sigma (=2\pi/T, T$ は周期) の入射波による自由運動と波の反射および通過について考える。運動は非圧縮性完

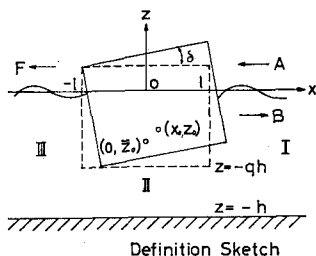


Fig. 1

全流体における2次元の速度ポテンシャル $\phi(x, z; t) = \phi(x, z)e^{i\sigma t}$ をもつ微小振幅波による運動と仮定する。座標系は図に示すように原点を静水面に、波の進行方向に平行に水平軸 (x 軸)、鉛直上方に z 軸を取る。静止状態における浮体の重心は点 $(0, \bar{z}_0)$ にあり、入射波 A によって反射波 B と通過波 F を生じ、浮体の重心は (x_0, z_0) に移動するとともに、角度 ω だけ回転するものとす。

(1) 境界条件と速度ポテンシャル

静止位置からの浮体重心の水平および鉛直変位と回転角 δ の振幅をそれぞれ ξ, η および δ とすると次の関係にある。

$$x_0 = \xi e^{i\sigma t}, z_0 = \bar{z}_0 + \eta e^{i\sigma t}, \delta = \omega e^{i\sigma t} \dots \dots \dots (1)$$

このとき浮体の右・左側面と底面の方程式は第1近似では次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} x &= \pm l + \{\xi - \omega(z - \bar{z}_0)\} e^{i\sigma t} \\ z &= -qh + (\eta + \omega) e^{i\sigma t} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

境界面の方程式 $F(x, z; t) = 0$ に対する運動学的条件式は $DF/Dt = 0$ で表わされることから、流体の水平および鉛直流速を u, w とすると、各面における運動学的境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} x = \pm l \text{ で } u &= i\sigma\{\xi - \omega(z - \bar{z}_0)\} e^{i\sigma t} \\ z = -qh \text{ で } w &= i\sigma(\eta + \omega) e^{i\sigma t} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

図のように $x = \pm l$ と $z = -qh$ で分けられる流体域 I, II, III における流体運動の速度ポテンシャルをそれぞれ $\phi_1(x, z), \phi_2(x, z)$ および $\phi_3(x, z)$ とすると、これらはそれぞれ次の Laplace の方程式を満足する。

$$\partial^2 \phi_i / \partial x^2 + \partial^2 \phi_i / \partial z^2 = 0 \quad (i=1, 2, 3) \dots \dots \dots (4)$$

ϕ_1 および ϕ_3 に対する水面および水底条件は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} z=0 \text{ で } \partial \phi_i / \partial z &= \sigma^2 \phi_i / g \\ z=-h \text{ で } \partial \phi_i / \partial z &= 0 \quad (i=1, 3) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

これに対する ϕ_1 と ϕ_3 はそれぞれ次の形で表わされる。

$$\begin{aligned} \phi_1(x, z) &= (Ae^{ik(x-l)} + Be^{-ik(x-l)}) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k_n(x-l)} \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \\ &\dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部水工土木科

** 正会員 九州大学助手 工学部水工土木科

*** 九州大学研究補助員

$$\begin{aligned}\phi_3(x, z) = & F e^{ik(x+l)} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh k_n h} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} G_n e^{k_n(x+l)} \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \\ & \dots\dots\dots(7)\end{aligned}$$

ここで k および k_n は次式で決まる固有値で, C_n と G_n は浮体による scattering wave を表わす (g は重力の加速度)

$$\frac{\sigma^2 h}{g} = k n h \tanh k h = -k_n h \tan k_n h \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots(8)$$

$\phi_2(x, z)$ に対する条件式は式 (3) の第 2 式と水底条件と与えられ次のようである。

$$\left. \begin{aligned} z = -qh \text{ で } \partial \phi_2 / \partial z &= i \sigma (\eta + \omega x) \\ z = -h \text{ で } \partial \phi_2 / \partial z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

上の第 1 式の右辺を $|x| < l$ の区間でフーリエ展開すると

$$i \sigma \eta = 4 i \sigma \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s+1)\pi} \cdot \cos \frac{(2s+1)\pi}{2l} x; \quad i \sigma \omega = 8 i \sigma \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s+1)^2 \pi^2} \cdot \sin \frac{(2s+1)\pi}{2l} x \dots\dots\dots(10)$$

であるから, 式 (9) の条件を満足する式 (4) の一般解として ϕ_2 を次の形におくことができる。

$$\begin{aligned}\phi_2(x, z) = & \sum_{s=0}^{\infty} \left[\left(D_s \frac{\cosh \bar{S} x}{\cosh \bar{S} l} + E_s \frac{\sinh \bar{S} x}{\sinh \bar{S} l} \right) \cos \bar{S} (z + q h) \right. \\ & \left. + 2 i (-1)^s \frac{h}{l} \left\{ \eta \sigma h \cos \mu_s x + \omega \sigma l^2 \left(\frac{h}{l} \right)^2 \cdot \frac{\sin \mu_s x}{\mu_s h} \right\} \cdot \frac{\cosh \mu_s (z+h)}{(\mu_s h)^2 \sinh \bar{\mu}_s h} \right] \dots\dots\dots(11)\end{aligned}$$

ここで, $\bar{S} = s \pi / q h$, $\bar{q} = 1 - q$, $\mu_s = (2s+1)\pi / 2l$, $\bar{\mu}_s = \bar{q} \eta_s$ (s は整数)

上式の右辺第 1 項の D_s , E_s は任意定数で, この項は $z = -qh$ および $-h$ で $\partial \phi_2 / \partial z = 0$ を満足する一般解でこれと式 (9) を満足する特解としての第 2 項の和は, 式 (9) を満足する Laplace の方程式の一般解を表わすことができる。

(2) 浮体の運動方程式

浮体の質量を M , 重心に関する慣性モーメントを I , 浮体の右と左の側面および底面に作用する流体の圧力をそれぞれ p_1 , p_3 および p_2 とすると, 浮体の水平, 鉛

直および回転に関する運動方程式は第 1 近似では次のようである。

$$M \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \int_{-qh}^0 (p_3 - p_1) dz \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$M \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \int_{-l}^l p_2 dx - Mg \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$\begin{aligned} I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = & \int_{-qh}^0 (p_1 - p_3) (z - \bar{z}_0) dz \\ & + \int_{-l}^l p_2 (x - x_0) dx \quad \dots\dots\dots(14)\end{aligned}$$

流体内の圧力 p は密度 ρ の流体では $p = -\rho \partial \Phi / \partial t - \rho g z$ の関係で与えられるから式 (6), (7), (11) から

$$p_3 - p_1 = i \rho \sigma e^{i \sigma t} \left[(A + B - F) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh k h} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n - G_n) \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \right] \dots\dots\dots(15)$$

$$\begin{aligned} p_2 = & -i \rho \sigma \phi_2(x, -qh) e^{i \sigma t} + \rho g q h - \rho g (\eta + \omega x) e^{i \sigma t} \\ = & -i \rho \sigma e^{i \sigma t} \sum_{s=0}^{\infty} \left[D_s \frac{\cosh \bar{S} x}{\cosh \bar{S} l} + E_s \frac{\sinh \bar{S} x}{\sinh \bar{S} l} + 2 i (-1)^s \frac{h}{l} \left\{ \eta \sigma h \cos \mu_s x + \omega \sigma l^2 \left(\frac{h}{l} \right)^2 \frac{\sin \mu_s x}{\mu_s h} \right\} \frac{\coth \bar{\mu}_s h}{(\mu_s h)^2} \right] \\ & + \rho g q h - \rho g (\eta + \omega x) e^{i \sigma t} \dots\dots\dots(16)\end{aligned}$$

また,

$$M = 2 \rho q h \cdot l, \quad I = r \cdot 2/3 \cdot \rho q h l^3 \quad (r \text{ は浮体により異なる定数}) \quad \dots\dots\dots(17)$$

とすると, 式 (15), (16), (17) を式 (12)~(14) に代入して,

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 1 / \left\{ q - \frac{1}{\sigma^2 h / g} + 2 \left(\frac{h}{l} \right)^2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\coth \bar{\mu}_s h}{(\mu_s h)^3} \right\}, \quad \beta = 1 / \left\{ r q - \frac{1}{\sigma^2 h / g} + 6 \left(\frac{h}{l} \right)^4 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\coth \bar{\mu}_s h}{(\mu_s h)^5} \right\} \\ f_0 &= \frac{1}{2q} \cdot \frac{\sinh \bar{\lambda}_0 - \sinh \lambda_0}{\lambda_0 \cosh \lambda_0}, \quad f_n = \frac{1}{2q} \cdot \frac{\sin \bar{\lambda}_n - \sin \lambda_n}{\lambda_n \cos \lambda_n}, \quad H_s = \frac{\tanh \bar{S} l}{\bar{S} l}, \quad I_s = 3 \frac{l}{h} \cdot \frac{\bar{S} l \coth \bar{S} l - 1}{(\bar{S} l)^2} \\ g_0 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{l} \left\{ \frac{q \lambda_0 \sinh \bar{\lambda}_0 + \cosh \bar{\lambda}_0 - \cosh \lambda_0}{\lambda_0^2 \cosh \lambda_0} - \left(\frac{\bar{z}_0}{h} + \frac{1}{\sigma^2 h / g} \right) \frac{\sinh \lambda_0 - \sinh \bar{\lambda}_0}{\lambda_0 \cosh \lambda_0} \right\} \\ g_n &= \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{l} \left\{ \frac{q \lambda_n \sin \bar{\lambda}_n - \cos \lambda_n + \cos \bar{\lambda}_n}{\lambda_n^2 \cos \lambda_n} - \left(\frac{\bar{z}_0}{h} + \frac{1}{\sigma^2 h / g} \right) \frac{\sin \lambda_n - \sin \bar{\lambda}_n}{\lambda_n \cos \lambda_n} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

ただし $\lambda_0 = k h$, $\lambda_n = k_n h$, $\bar{\lambda}_0 = \bar{q} \lambda_0$, $\bar{\lambda}_n = \bar{q} \lambda_n$

とおくと, ε , η および ω は速度ポテンシャルの定数項により, 次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \sigma l = & i \left[f_0 (A + B - F) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n (C_n - G_n) \right], \quad \eta \sigma h = i \alpha \sum_{s=0}^{\infty} H_s \cdot D_s \\ \omega \sigma l^2 = & i \beta \left[g_0 (A + B - F) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n (C_n - G_n) + \sum_{s=0}^{\infty} I_s \cdot E_s \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

(3) 定数の決定

$x = \pm l$ の境界面においては、浮体の側面における運動学的条件と流体域 I と II および II と III の間の mass flux と energy flux の連続性の条件とから次の関係式が成り立たねばならない。

(i) $x = l$ では

$$0 > z > -qh \text{ で } \partial \phi_1 / \partial x = i \sigma \{ \xi - (z - \bar{z}_0) \omega \} \dots\dots\dots (20)$$

$$-qh > z > -h \text{ で } \phi_1 = \phi_2 \text{ および } \partial \phi_1 / \partial x = \partial \phi_2 / \partial x \dots\dots\dots (21)$$

(ii) $x = -l$ では

$$0 > z > -qh \text{ で } \partial \phi_3 / \partial x = i \sigma \{ \xi - (z - \bar{z}_0) \omega \} \dots\dots\dots (22)$$

$$-qh > z > -h \text{ で } \phi_3 = \phi_2, \text{ および } \partial \phi_3 / \partial x = \partial \phi_2 / \partial x \dots\dots\dots (23)$$

上の各式に式 (6), (7), (11) を代入し、加減整理すると、

$$\begin{aligned} (A - B - F) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + i \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + G_n) \frac{k_n \cos k_n(z+h)}{k \cos k_n h} \\ = 0 \quad (0 > z > -qh) \\ = 2 \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ -i \frac{\bar{S} h}{kh} D_s \tanh \bar{S} l \cdot \cos \bar{S}(z+qh) - 2 \frac{\eta \sigma h}{kh} \cdot \frac{h}{l} \cdot \frac{\cosh \mu_s(z+h)}{\sinh \bar{\mu}_s h} \right\} \\ (-qh > z > -h) \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A - B + F) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + i \sum_{n=1}^{\infty} (C_n - G_n) \frac{k_n \cos k_n(z+h)}{k \cos k_n h} = 2 \frac{\sigma}{k} \{ \xi - (z - \bar{z}_0) \omega \} \quad (0 > z > -qh) \\ = 2 \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ -i \frac{\bar{S} h}{kh} E_s \coth \bar{S} l \cdot \cos \bar{S}(z+qh) \right\} \\ (-qh > z > -h) \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

$$(A + B + F) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + G_n) \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} = 2 \sum_{s=0}^{\infty} D_s \cos \bar{S}(z+qh) \quad (-qh > z > -h) \dots\dots\dots (26)$$

$$\begin{aligned} (A + B - F) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n - G_n) \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \\ = 2 \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ E_s \cos \bar{S}(z+qh) + 2 i \omega \sigma l^2 \cdot \left(\frac{h}{l} \right)^3 \cdot \frac{\cosh \mu_s(z+h)}{(\mu_s h)^3 \sinh \bar{\mu}_s h} \right\} \\ (-qh > z > -h) \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

$0 > z > -h$ では関数系 $\cosh k(z+h)$, $\cos k_n(z+h)$ は完全直交系であり、 $-qh > z > -h$ では $\cos \bar{S}(z+qh)$ は完全直交系であるから、式 (24), (25) には各項に $\cosh k(z+h)$ および $\cos k_n(z+h)$ を乗じて $z = -h$ から 0 まで、式 (26), (27) の各項には $\cos \bar{S}(z+qh)$ を乗じて $z = -h$ から $-qh$ までの積分を行なって

$$\left. \begin{aligned} P_{0s} &= \frac{2 \sinh \bar{\lambda}_0}{N_0 \lambda_0 \sinh \lambda_0} \cdot \frac{\bar{S} l \tanh \bar{S} l}{1 + (s \pi / \bar{\lambda}_0)^2} \cdot \frac{h}{l}, \quad P_{ns} = \frac{2 \sin \bar{\lambda}_n}{N_n \lambda_n \sin \lambda_n} \cdot \frac{\bar{S} l \tanh \bar{S} l}{1 - (s \pi / \bar{\lambda}_n)^2} \cdot \frac{h}{l} \\ Q_{0s} &= \frac{2 \sinh \bar{\lambda}_0}{N_0 \lambda_0 \sinh \lambda_0} \cdot \frac{\bar{S} l \coth \bar{S} l}{1 + (s \pi / \bar{\lambda}_0)^2} \cdot \frac{h}{l}, \quad Q_{ns} = \frac{2 \sin \bar{\lambda}_n}{N_n \lambda_n \sin \lambda_n} \cdot \frac{\bar{S} l \coth \bar{S} l}{1 - (s \pi / \bar{\lambda}_n)^2} \cdot \frac{h}{l} \\ R_{0s} &= \frac{\sinh \bar{\lambda}_0}{\bar{\lambda}_0 \cosh \lambda_0} \cdot \frac{1}{1 + (s \pi / \bar{\lambda}_0)^2}, \quad R_{ns} = \frac{\sin \bar{\lambda}_n}{\bar{\lambda}_n \cos \lambda_n} \cdot \frac{1}{1 - (s \pi / \bar{\lambda}_n)^2} \\ a_0 &= 4 \frac{h}{l} \cdot \frac{\sinh \bar{\lambda}_0}{N_0 \lambda_0 \sinh \lambda_0} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\coth \bar{\lambda}_0 - \coth \bar{\mu}_s h}{\frac{\lambda_0}{(\mu_s h / \lambda_0)^2} - 1}, \quad a_n = 4 \frac{h}{l} \cdot \frac{\sin \bar{\lambda}_n}{N_n \lambda_n \sin \lambda_n} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\cot \bar{\lambda}_n + \coth \bar{\mu}_s h}{1 + (\mu_s h / \lambda_n)^2} \\ b_0 &= 2 \frac{h}{l} \left(\frac{\sinh \lambda_0 - \sinh \bar{\lambda}_0}{N_0 \lambda_0 \sinh \lambda_0} \cdot \frac{\bar{z}_0}{l} - \frac{q \lambda_0 \sinh \bar{\lambda}_0 + \cosh \bar{\lambda}_0 - \cosh \lambda_0}{N_0 \lambda_0^2 \sinh \lambda_0} \cdot \frac{h}{l} \right), \quad N_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2 \lambda_0}{\sinh 2 \lambda_0} \right) \\ b_n &= 2 \frac{h}{l} \left(\frac{\sin \lambda_n - \sin \bar{\lambda}_n}{N_n \lambda_n \sin \lambda_n} \cdot \frac{\bar{z}_0}{l} - \frac{q \lambda_n \sin \bar{\lambda}_n - \cos \bar{\lambda}_n + \cos \lambda_n}{N_n \lambda_n^2 \sin \lambda_n} \cdot \frac{h}{l} \right), \quad N_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2 \lambda_n}{\sin 2 \lambda_n} \right) \\ d_0 &= 2 \frac{h}{l} \cdot \frac{\sin \lambda_0 - \sinh \bar{\lambda}_0}{N_0 \lambda_0 \sinh \lambda_0}, \quad d_n = 2 \frac{h}{l} \cdot \frac{\sin \lambda_n - \sin \bar{\lambda}_n}{N_n \lambda_n \sin \lambda_n}, \quad e_s = 4 \cdot \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{h}{l} \right)^3 \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(\mu_r h)^2 \{ (\mu_r h)^2 + (\bar{S} h)^2 \}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

とおくと次の関係式を得る。

$$A - (B + F) = -i \sum_{s=0}^{\infty} P_{0s} \cdot D_s - a_0 \eta \sigma h, \quad C_n + G_n = - \sum_{s=0}^{\infty} P_{ns} \cdot D_s + i a_n \eta \sigma h \dots\dots\dots (29)$$

$$A - (B - F) = -i \sum_{s=0}^{\infty} Q_{0s} \cdot E_s + d_0 \xi \sigma l + b_0 \omega \sigma l^2, \quad C_n - G_n = - \sum_{s=0}^{\infty} Q_{ns} \cdot E_s - i d_n \xi \sigma l - i b_n \omega \sigma l^2 \dots\dots\dots (30)$$

$$D_s = R_{0s} (A + B + F) + \sum_{n=1}^{\infty} R_{ns} (C_n + G_n), \quad E_s = R_{0s} (A + B - F) + \sum_{n=1}^{\infty} R_{ns} (C_n - G_n) - i e_s \omega \sigma l^2 \dots\dots\dots (31)$$

上式の $\eta \sigma h$, $\xi \sigma l$ および $\omega \sigma l^2$ に式 (19) を用いると、速度ポテンシャルの定数に関する次の関係式を得る。

$$(B+F)/A - i \sum_{s=0}^{\infty} (P_{0s} + \alpha a_0 H_s) \cdot D_s/A = 1, \quad (C_n + G_n)/A + \sum_{s=0}^{\infty} (P_{ns} + \alpha a_n H_s) \cdot D_s/A = 0$$

$$(n=1, 2, 3, \dots)$$

$$[1 + i(d_0 f_0 + \beta b_0 g_0)](B-F)/A + i \sum_{n=1}^{\infty} (d_0 f_n + \beta b_0 g_n)(C_n - G_n)/A - i \sum_{s=0}^{\infty} (Q_{0s} - \beta b_0 I_s) \cdot E_s/A$$

$$= 1 - i(d_0 f_0 + \beta b_0 g_0)$$

$$(f_0 d_n + \beta g_0 b_n)(B-F)/A - (C_n - G_n)/A + \sum_{r=1}^{\infty} (d_n f_r + \beta b_n g_r)(C_r - G_r)/A - \sum_{s=0}^{\infty} (Q_{ns} - \beta b_n I_s) \cdot E_s/A$$

$$= -(f_0 d_n + \beta g_0 b_n), \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$R_{0s}(B+F)/A + \sum_{n=1}^{\infty} R_{ns} \cdot (C_n + G_n)/A - \varepsilon_s \cdot D_s/A = -R_{0s}, \quad (s=0, 1, 2, \dots)$$

$$(R_{0s} + \beta g_0 e_s)(B-F)/A + \sum_{n=1}^{\infty} (R_{ns} + \beta e_s g_n)(C_n - G_n)/A - \varepsilon_s \cdot E_s/A + \sum_{r=0}^{\infty} \beta e_s \cdot I_r \cdot E_r/A$$

$$= -(R_{0s} + \beta g_0 e_s), \quad (s=0, 1, 2, \dots)$$

ただし $\varepsilon_0=2, \varepsilon_s=1, (s=1, 2, 3, \dots)$

.....(32)

上式は $(B \pm F)/A, (C_n \pm G_n)/A, D_s/A$ および E_s/A に関する連立方程式であるから、これらを数値的に解くことによって、入射波 A に対する定数が決まることになる。

入射波を $\zeta_i = a \cos(kx + \sigma t)$ とおくときは

$$A = i a g e^{i k l / \sigma} \dots \dots \dots (33)$$

として A が決まり、速度ポテンシャルはすべて確定する。

注：式(18)と(28)において、 $s=0$ に対しては

$$P_{00} = P_{n0} = 0, \quad Q_{00} = \frac{2 \sinh \bar{\lambda}_0}{N_0 \lambda_0 \sinh \lambda_0} \cdot \frac{h}{l}$$

$$Q_{n0} = \frac{2 \sin \bar{\lambda}_n}{N_n \lambda_n \sin \lambda_n} \cdot \frac{h}{l},$$

$H_0=1, I_0=l/h$ となることに注意を要する。また $q=0$ の場合は水面に浮いた薄い剛体板の場合に対応するが、このときは

$\bar{q}=1, \bar{\lambda}_0=\lambda_0$, etc. となり、 $g_0=g_n=0$ であるが、 $f_0=f_n=1/2$ となる。

(4) 波の変形と浮体の運動

以上のようにして定数が決まると、浮体の重心の運動は式(19)と式(1)から、次式の実数部分で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_0}{a} &= -\frac{1}{\sigma^2 h/g} \cdot \frac{h}{l} \left[f_0 \left(1 + \frac{B-F}{A} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{C_n - G_n}{A} \right] \cdot e^{i(kl + \sigma t)} \\ \frac{z_0 - \bar{z}_0}{a} &= -\frac{\alpha}{\sigma^2 h/g} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} H_s \cdot \frac{D_s}{A} \cdot e^{i(kl + \sigma t)} \\ \frac{\delta l}{a} &= -\frac{\beta}{\sigma^2 h/g} \cdot \frac{h}{l} \left[g_0 \left(1 + \frac{B-F}{A} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \frac{C_n - G_n}{A} + \sum_{s=0}^{\infty} I_s \cdot \frac{E_s}{A} \right] \cdot e^{i(kl + \sigma t)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

領域 I と III における水面波形は $\zeta(x, t) = -\partial \phi / g \partial t (z=0)$ として求められ、浮体の water line の変動は式(2)で $q=0$ において示される。ゆえに上記の入射波に対しては、それぞれ次式の実数部分で表わされる。

$$\frac{\zeta_1(x, t)}{a} = \left[e^{i k(x-l)} + \frac{B}{A} \cdot e^{-i k(x-l)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{A} e^{-k_n(x-l)} \right] \cdot e^{i(kl + \sigma t)} \dots \dots \dots (35)$$

$$\frac{\zeta_2(x, t)}{a} = \frac{i}{\sigma^2 h/g} \left(\frac{\eta \sigma h}{A} + \frac{\omega \sigma l^2}{A} \cdot \frac{h}{l} \cdot \frac{x}{l} \right) \cdot e^{i(kl + \sigma t)} \dots \dots \dots (36)$$

$$\frac{\zeta_3(x, t)}{a} = \left[\frac{F}{A} e^{i k(x+l)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n}{A} \cdot e^{k_n(x+l)} \right] \cdot e^{i(kl + \sigma t)} \dots \dots \dots (37)$$

浮体による波の反射率 K_R と通過率 K_T とは次式で表わされる。

$$K_R = |B/A|, \quad K_T = |F/A| \dots \dots \dots (38)$$

浮体の側面に作用する流体圧力 p_1, p_3 およびその合力 P_H は静水圧を除くと次式のようなのである。

$$\frac{p_1}{\rho g a} = \left[\left(1 + \frac{B}{A} \right) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{A} \cdot \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \right] \cdot e^{i(kl + \sigma t)} \dots \dots \dots (39)$$

$$\frac{P_{H1}}{\rho g a \cdot q h} = 2 \left[f_0 \left(1 + \frac{B}{A} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{A} \cdot f_n \right] \cdot e^{i(kl + \sigma t)} \dots \dots \dots (40)$$

p_3 および P_{H3} は上式で $(1+B/A), C_n/A$ の代りに $F/A, G_n/A$ において表わされる。

浮体底面に対する流体圧力 p_2 と合力 P_{V2} は次のようである。

$$\frac{p_2}{\rho g a} = \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{D_s}{A} \cdot \frac{\cosh \bar{S}_s x}{\cosh \bar{S}_l} + \frac{E_s}{A} \cdot \frac{\sinh \bar{S}_s x}{\cosh \bar{S}_l} + 2i(-1)^s \left\{ \frac{h}{l} \cdot \frac{\eta \sigma h}{A} \cos \mu_s x + \left(\frac{h}{l} \right)^3 \cdot \frac{\omega \sigma l^2}{A} \cdot \frac{\sin \mu_s x}{\mu_s h} \right\} \coth \bar{\mu}_s h \right] \right\} \frac{1}{(\mu_s h)^2}$$

$$-\frac{i}{\sigma^2 h/g} \left(\frac{\eta \sigma h}{A} + \frac{h}{l} \cdot \frac{\omega \sigma l^2}{A} \cdot \frac{x}{l} \right) \left\} e^{i(kl + \sigma t)} \dots\dots\dots (41)$$

$$\frac{P_{V_2}}{2 \rho g a l} = \left[\sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{\sinh \bar{S} l}{\bar{S} l} \cdot K_s + 2i \left(\frac{h}{l} \right)^2 \frac{\coth \bar{\mu}_s h}{(\mu_s h)^3} \cdot \frac{\eta \sigma h}{A} \right\} - \frac{i}{\sigma^2 h/g} \cdot \frac{\eta \sigma h}{A} \right] \cdot e^{i(kl + \sigma t)} \dots\dots\dots (42)$$

また浮体重心に対する流体圧力の全モーメント T は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{T}{\rho g a h l} = & \frac{l}{h} \left[-\frac{1}{2} b_0 \left(1 + \frac{B-F}{A} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \frac{C_n - G_n}{A} + 2 \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{\bar{S} l \coth \bar{S} l - 1}{(\bar{S} l)^2} \cdot \frac{E_s}{A} \right. \right. \\ & \left. \left. + 2i \left(\frac{h}{l} \right)^5 \frac{\cosh \bar{\mu}_s h}{(\mu_s h)^5} \cdot \frac{\omega \sigma l^2}{A} \right\} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sigma^2 h/g} \cdot \frac{h}{l} \cdot \frac{\omega \sigma l^2}{A} + 2iq \frac{1}{\sigma^2 h/g} \cdot \left(\frac{h}{l} \right)^2 \cdot \frac{\xi \sigma l}{A} \right] \cdot e^{i(kl + \sigma t)} \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

上の各式で $\xi \sigma l/A$, $\eta \sigma h/A$ および $\omega \sigma l^2/A$ は式 (19) で与えられる。

3. 反射波による運動 (岸壁の影響)

Fig. 2 に示すように $x = -pl$ ($p > 1$) に鉛直壁があって波を反射する場合を考える。このときは領域 I, II の速度ポテンシャルは式 (6), (11) の形であるが, 領域 III では,

$$x = -pl \quad \text{で} \quad \partial \phi_s / \partial x = 0 \dots\dots\dots (44)$$

の条件が入るため, 式 (7) の代りに次の形を取ることとなる。

$$\phi_s(x, z) = F \frac{\cos k(x + pl)}{\cos k \bar{p} l} \cdot \frac{\cosh k(z + h)}{\cosh k h} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{\cosh k_n(x + pl)}{\cosh k_n \bar{p} l} \cdot \frac{\cos k_n(z + h)}{\cos k_n h} \dots\dots\dots (45)$$

$$\text{ただし} \quad \bar{p} = p - 1$$

浮体の周辺の境界条件と浮体の運動については, 上の場合と全く同じ形で与えられる。そこで $x = \pm l$ での境界条件式 (20)~(23) に式 (6), (11), (45) を代入して, 同様の計算を行なうと, 定数係数に関する連立方程式は式 (32) に対応して次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} B/A + i F/A \cdot \tan \bar{p} k l - i \sum_{s=0}^{\infty} (P_{0s} + \alpha a_0 H_s) \cdot D_s/A &= 1 \\ C_n/A + G_n/A \cdot \tanh \bar{p} k_n l + \sum_{s=0}^{\infty} (P_{ns} + \alpha a_n H_s) \cdot D_s/A &= 0, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ \{1 + i(d_0 f_0 + \beta b_0 g_0)\} B/A - i(\tan \bar{p} k l + d_0 f_0 + \beta b_0 g_0) \cdot F/A + i \sum_{n=1}^{\infty} (d_0 f_n + \beta b_0 g_n) (C_n - G_n)/A \\ &\quad - i \sum_{s=0}^{\infty} (Q_{0s} - \beta b_0 I_s) \cdot E_s/A = 1 - i(d_0 f_0 + \beta b_0 g_0) \\ (f_0 d_n + \beta g_0 b_n) \cdot (B - F)/A - C_n/A + \tanh \bar{p} k_n l \cdot G_n/A + \sum_{r=1}^{\infty} (d_n f_r + \beta b_n g_r) (C_r - G_r)/A \\ &\quad - \sum_{s=0}^{\infty} (Q_{ns} - \beta b_n I_s) \cdot E_s/A = -(f_0 d_n + \beta g_0 b_n), \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ R_{0s} \cdot (B + F)/A + \sum_{n=1}^{\infty} R_{ns} (C_n + G_n)/A - \varepsilon_s D_s/A &= -R_{0s}, \quad (s=0, 1, 2, \dots) \\ (R_{0s} + \beta g_0 e_s) (B - F)/A + \sum_{n=1}^{\infty} (R_{ns} + \beta e_s g_n) (C_n - G_n)/A - \varepsilon_s \cdot E_s/A + \sum_{r=0}^{\infty} \beta e_r I_r \cdot E_r/A \\ &= -(R_{0s} + \beta g_0 e_s), \quad (s=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

$$\text{ただし} \quad \varepsilon_0 = 2, \quad \varepsilon_s = 1, \quad (s=1, 2, \dots)$$

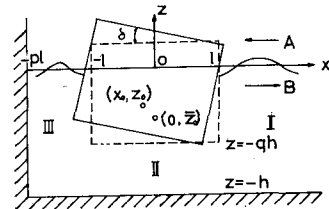
上式は式 (32) と異なり, $(B \pm F)/A$, $(C_n \pm G_n)/A$ の形にならないから, 未知数 B/A , C_n/A ($n=1, 2, 3, \dots$), F/A , G_n/A ($n=1, 2, 3, \dots$) および D_s/A , E_s/A ($s=0, 1, 2, \dots$) に関する連立方程式として解くことができる。

このようにして定数が決まると, 領域 I の水面波形と浮体の water line は式 (35), (36) と同じ形で表わされ, 領域 III では次のように表わされる。

$$\frac{\zeta_s(x, t)}{a} = \left[\frac{F}{A} \cdot \frac{\cos k(x + pl)}{\cos \bar{p} k l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n}{A} \cdot \frac{\cosh k_n(x + pl)}{\cosh \bar{p} k_n l} \right] \cdot e^{i(kl + \sigma t)} \dots\dots\dots (47)$$

特に $x = -l$ と $x = -pl$ では

$$\left| \frac{\zeta_s(-l)}{a} \right| = \left| \frac{F}{A} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n}{A} \right|, \quad \left| \frac{\zeta_s(-pl)}{a} \right| = \left| \frac{F}{A} \cdot \frac{1}{\cos \bar{p} k l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n}{A} \cdot \frac{1}{\cosh \bar{p} k_n l} \right| \dots\dots\dots (48)$$



Definition Sketch

Fig. 2

浮体重心の運動と回転および浮体の各面に作用する流体圧力の式は、すべて進行波の場合と同じ式が用いられる。

4. 検証式

上記の計算は式(32)または式(46)の連立方程式を解く必要上電子計算機によらねばならないが、計算上のミスを除くことと、計算精度を見る必要があるが、それには $x=\pm l$ における境界条件(20)~(23)が数値的に成立しているか否かを調べるのが便利である。 $x=\pm l$ における速度ポテンシャルは式(6), (7), (11)から

$$\frac{\phi_1(l)}{A} = \left(1 + \frac{B}{A}\right) \cdot \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{A} \cdot \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \quad (0 > z > -h) \dots\dots\dots (49)$$

$$\frac{\phi_2(\pm l)}{A} = \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{D_s + E_s}{A} \cdot \cos \bar{S}(z+qh) \pm 2i\omega\sigma l^2 \cdot \left(\frac{h}{l}\right)^3 \cdot \frac{\cosh \mu_s(z+h)}{(\mu_s h)^3 \sinh \bar{\mu}_s h} \right\} \quad (-qh > z > -h) \dots\dots\dots (50)$$

$$\frac{\phi_3(-l)}{A} = \frac{F}{A} \cdot \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n}{A} \cdot \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \quad (0 > z > -h) \dots\dots\dots (51)$$

$-qh > z > -h$ の任意の z に対して式(49)と(50)および(50)と(51)は等しい値を与えるべきである。式(49), (51)は $0 > z > -qh$ の区間で浮体側面への圧力分布を与える。 $x=\pm l$ における水平流速は、

$$\frac{l}{A} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(l) = i \frac{l}{h} \cdot kh \left[\left(1 - \frac{B}{A}\right) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + i \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{k_n h \cos k_n(z+h)}{kh \cos k_n h} \right] \quad (0 > z > -h) \dots\dots\dots (52)$$

$$\frac{l}{A} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(\pm l) = \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \bar{S}l \left(\pm \frac{D_s}{A} \tanh \bar{S}l + \frac{E_s}{A} \coth \bar{S}l \right) \cos \bar{S}(z+qh) \mp 2i \frac{\eta \sigma h}{A} \cdot \frac{\cosh \mu_s(z+h)}{\mu_s h \sinh \bar{\mu}_s h} \right\} \quad (-qh > z > -h) \dots\dots\dots (53)$$

$$\frac{l}{A} \cdot \frac{\partial \phi_3}{\partial x}(-l) = i \frac{l}{h} \cdot kh \left[\frac{F}{A} \cdot \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n}{A} \frac{k_n h \cos k_n(z+h)}{kh \cos k_n h} \right] \quad (0 > z > -h) \dots\dots\dots (54)$$

$-qh > z > -h$ の任意の z に対して式(52)と(53)および式(53)と(54)は等しくなければならない。また $0 > z > -qh$ に対しては式(52), (54)は浮体側面の水平速度の式(20), (22)に等しくなければならぬ。

すなわち

$$\frac{l}{A} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(\pm l) = i \left(\frac{\xi \sigma l}{A} - \frac{h}{l} \cdot \frac{z - \bar{z}_0}{h} \cdot \frac{\omega \sigma l^2}{A} \right), \quad (0 > z > -qh) \dots\dots\dots (55)$$

が成り立つべきである。

5. 計算結果

式(17)の r を1.0とし、浮体重心を $\bar{z}_0 = -\frac{3}{4}qh$ にあるときを仮定し、 $l/h=0.5$, および1.0の場合につき、 $\sigma^2 h/g$ を0~2.0については0.1ごと、2.0~4.0では0.2ごとおよび $\sigma^2 h/g=4.5$ および5.0について計算を行ない、式(38)による反射率、式(34)による swaying, heaving および rolling の振幅の絶対値を示すとそれぞれ Fig. 3 (a), (b), Fig. 4 (a), (b), Fig. 5 (a), (b) および Fig. 6 (a), (b) のようである。

反射率については、いずれも $\sigma^2 h/g$ が大きくなるとともに最終的には反射率は1に近づくが、その様子は吃水 q によって異なり、吃水が小さいときは1に接近するが、吃水が大きくなると一度1に近づいた後0に戻り、次に急速に1に接近する形を示す。これは浮体の運動と入射波との位相関係によるもので、この変化は l/h が大きいとき ($l/h=1.0$) 著しい。すなわち自由浮体においては、その防波堤効果は幅と吃水によって決まる特定の周期よりも短い周期の波に対して十分期待することができることがわかる。

浮体の運動振幅について見ると、swaying motion については、特に卓越した振幅を与える frequency は存在しないが、おのおのの吃水について振幅0を与える

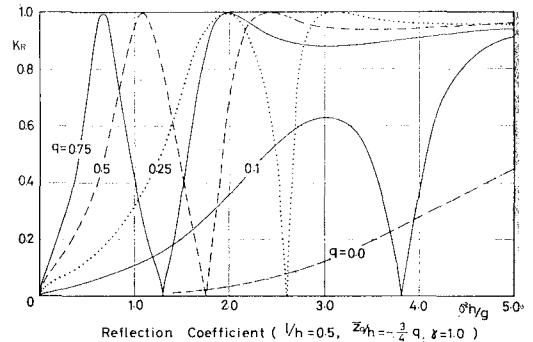


Fig. 3 (a)

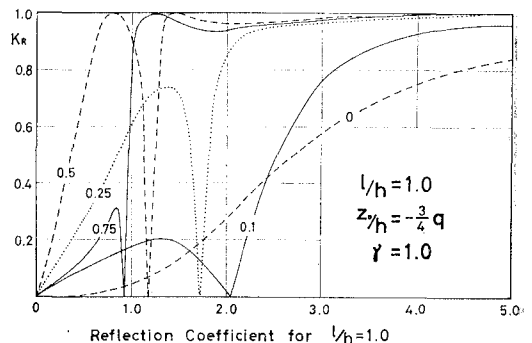


Fig. 3 (b)

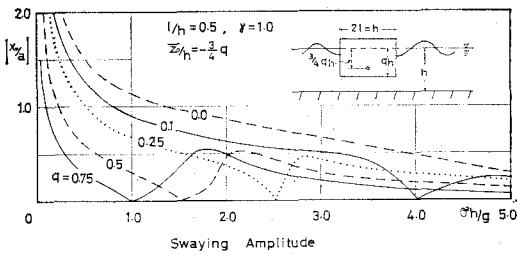


Fig. 4 (a)

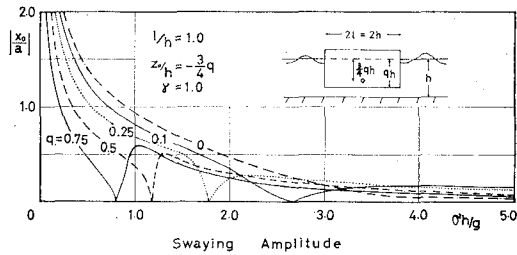


Fig. 4 (b)

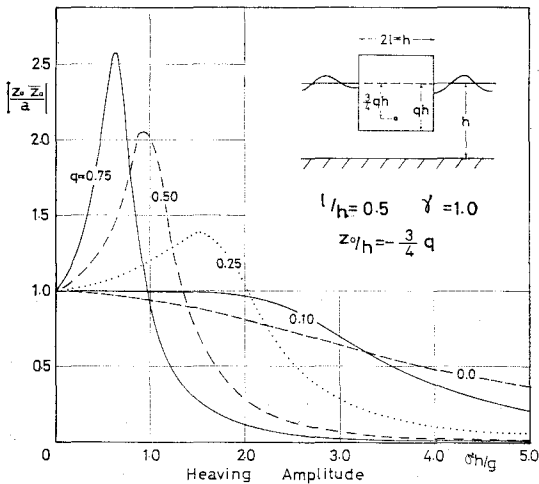


Fig. 5 (a)

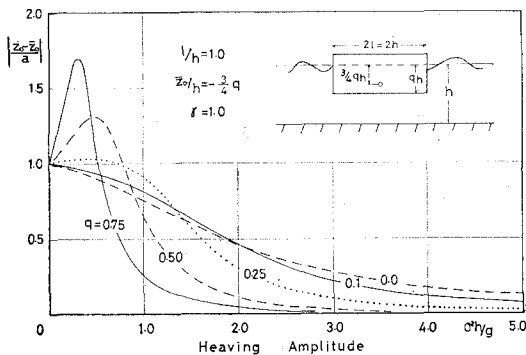


Fig. 5 (b)

nodal frequency が存在し、それは反射率 0 を与える frequency とほぼ一致する。heaving motion と rolling motion に対しては、吃水が大きいほど明瞭な卓越振幅を与える frequency が存在し、rolling amplitude の peak を生ずる frequency は反射率 0 を与える frequency にほぼ一致する。そして heaving amplitude の peak は、その frequency よりも小さい frequency において生ずることがわかる。

浮体の幅が大きくなると、反射率 0 の点は low frequency の方に移るとともに rolling および heaving の卓越する frequency も低い方に移り、さらに各運動の振幅は減少し、浮体幅の増加とともに運動は安定に近づくことがわかる。

同じ幅の浮体では、吃水が深くなると一般に swaying の振幅は減少し、rolling の振幅の peak は $q=0.5, 0.75$ の付近で大きく、heaving の振幅の peak は吃水とともに増大することとなる。特に注意すべきは波長の長い浅海波 ($\sigma^2 h/g \rightarrow 0$ のとき) に対しては heaving の振幅は入射波の振幅と等しい値に近づく ($(z_0 - \bar{z}_0)/a \rightarrow 1$) が、

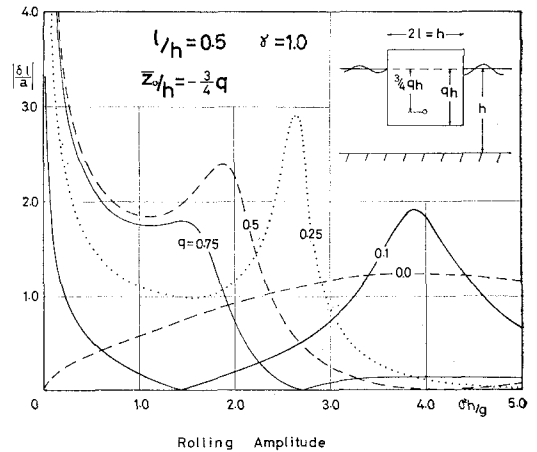


Fig. 6 (a)

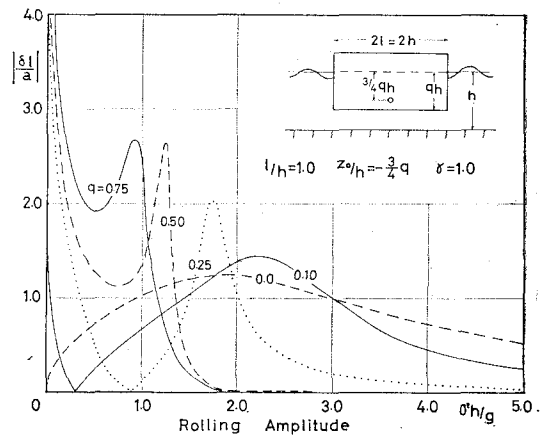


Fig. 6 (b)

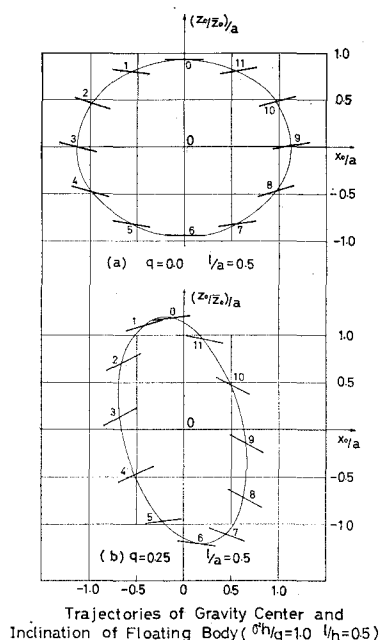


Fig. 7

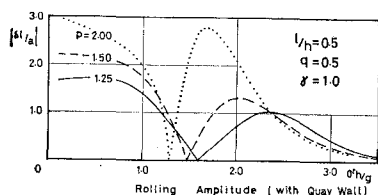


Fig. 8

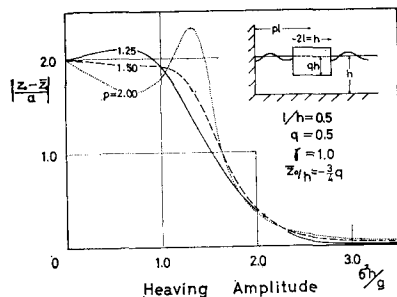


Fig. 9

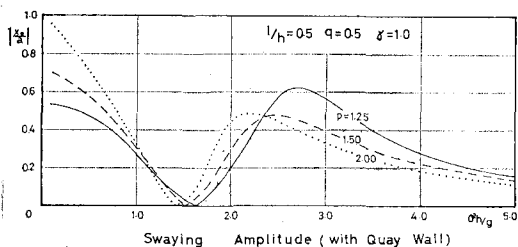


Fig. 10

swaying および rolling の振幅は大きな値となり、特に、吃水が小さいときに著しい。これは港内の surging による船の運動に関係が深い。

なお、 $l/h=0.5$, $\sigma^2 h/g=1.0$ の場合 $q=0$ および 0.5 , $a/l=0.5$ に対する $\sigma t=30^\circ$ ごとの浮体重心の移動軌跡とその位置での回転角度 δ を示すと Fig. 7 のようで、吃水が浅いときは水平軸をもつ楕円軌道に近いが、吃水が深くなると傾いた軸をもつ楕円軌道を示すことがわかる（楕円上の番号は $\sigma t=0^\circ, 30^\circ, \dots$ の位置、そこでの実線は浮体の water line の傾きを示す）。

岸壁がある場合の例として、 $l/h=0.5$, $q=0.5$ について $p=1.25, 1.50$ および 2.00 に対して浮体運動の振幅を計算すると Fig. 8, 9 および 10 のようである。これらによると浮体の運動は岸壁からの距離によって変化し、特に $\sigma^2 h/g$ が小さいときに著しい。おのおのの運動振幅の peak は、浮体重心と岸壁との距離が入射波の波長の $1/4 \cdot n$ 倍にあるときに起こり、たとえば heaving の振幅は $1/4$ 波長の距離において peak を示すことになる。

進行波の場合と比較して著しい相違は、heaving の振幅が $\sigma^2 h/g \rightarrow 0$ において 2 倍となること、また rolling と swaying の振幅は $\sigma^2 h/g \rightarrow 0$ において $0 \sim 2$ 程度の有限値に近づき、進行波に対するように著しく大きな値に達することがないことである。

6. む す び

上記の計算は既述のように $r=1.0$ すなわち断面の回転半径を $l/\sqrt{3}$ とし、浮心と重心間の距離（静止時）を $1/4 \cdot qh$ と仮定した場合であるから、これらの変化によって運動に多少の変化を生ずることになる。さらに、mooring force が作用する場合も同様である。これらの諸条件についてはなお検討を進める予定である。なお上記の計算結果に対しては、実験によりこれを確かめる必要があり、現在進行中であり、次の機会に報告したい。

参 考 文 献

- 1) 井島武士 (1971): “最近の波浪理論における境界値問題の解法とその応用”, 水工学夏期研修会講演集, 土木学会
- 2) 井島武士, 他 (1971): “水底または水中の柱の鉛直振動による波の発生”, 九州大学工学集報, 第44巻3号.
- 3) 田才福造 (1959): “船の上下動揺並びに縦動揺における減衰力および付加質量について”, 造船協会論文集, 第105号.
- 4) 田才福造・高木又男 (1969): “規則波中の応答理論および計算法”, 日本造船学会耐航性に関するシンポジウム.
- 5) Korvin-Kroukovsky, B. V. (1961): “Theory of Sea Keeping”, Soc. Naval Arch. Mari. Eng. New York.