水面上の弾性板の波による振動

日 野 幹 雄*・鵜 飼 恵 三**

1. まえがき

日本のような狭い国土に広大な面積を必要とする構造物を建設することは，すでに限界に来ている。その一つの対策として，これらを海上に建設することが考えられる。しかしながら，巨大な構造物を海上につくる場合，特に，波と構造物（板）との相互干渉についてのみ注目すれば，構造物を剛体とするこれまでの仮定では不十分ではないかと思われる。そこで本論文では，板を一般の構造力学で用いる弾性ばりと仮定して，弾性ばりと微小振幅波との相互作用について2次元的に考察してみた。特に注意したのは，板を弾性ばりと考えることによって板と波との共鳴現象が起こるのではないかということである。これについては，理論計算の結果から起こりうることがわかった。

一般的にいって，板を剛体と仮定した場合には数式的に簡単に解けるものでも，板を弾性板と考えると，かなりめんどうになり，さらには変数分離の方法だけでは解けない問題もでてくる。したがって本論文では，板と波との相互干渉のうち最も取扱いやすいと思われた“鉛直壁にとりつけられた水面上の水平弾性板と微小振幅波との相互干渉”について考えた。

2. 水平弾性板（はり）をもつ岸壁に対する解

（1） 仮定と説明

用いた主な仮定は次のようである。

イ）板は Euler-Bernoulli はりであり，曲げ剛性は一定。

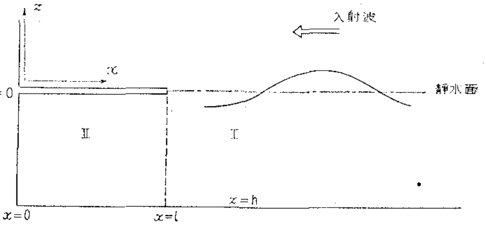
ロ）水は2次元完全流体とし，速度ポテンシャルがある。

ハ）板と水とはその境界で相互作用中も密着している。

ニ）板のそれ自身の重量による変位はゼロ。つまり，板は最初水平状態である。

ホ）板の変位（振幅）は小とし，水に対しては微小振幅波理論が適用できる。

以上の仮定のもとに図—1 に示すような岸壁に波が入射する場合を考える。この図で，板は水面にあり，座標軸は静水面を基準にしてとり，板の長さ l，曲げ剛性



図—1

EI，水深 h，板の x 方向の単位長さあたりの密度を ρ_p とする。流体域を2つにわけ，$0\leqq x\leqq l$ の領域をII，$l\leqq x$ の領域をIとし，そこでの速度ポテンシャルを ϕ_{II}，ϕ_{I} としよう。

（2） 領域 II について

基本式はポテンシャル式である。つまり

$$\frac{\partial^2\phi_{\text{II}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_{\text{II}}}{\partial y^2}=0 \cdots\cdots (1)$$

水面，水底および岸壁での境界条件は

$$\left.\begin{aligned} &P=EI\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}+\rho_p\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} && (2)\\ &\frac{\partial\phi_{\text{II}}}{\partial t}+g\eta+\frac{P}{\rho}=0 && (3)\\ &\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\partial\phi_{\text{II}}}{\partial z} && (4)\end{aligned}\right\}\quad (z=0)$$

$$\frac{\partial\phi_{\text{II}}}{\partial z}=0 \qquad (z=-h) \cdots\cdots (5)$$

$$\frac{\partial\phi_{\text{II}}}{\partial x}=0 \qquad (x=0) \cdots\cdots (6)$$

ただし，P は水圧，η は水面変動（板の変位）。

この境界値問題を変数分離つまり，$\phi_{\text{II}}=X(x)\cdot Z(z)\cdot e^{-i\sigma t}$ と仮定して解くと結局次のようになる。

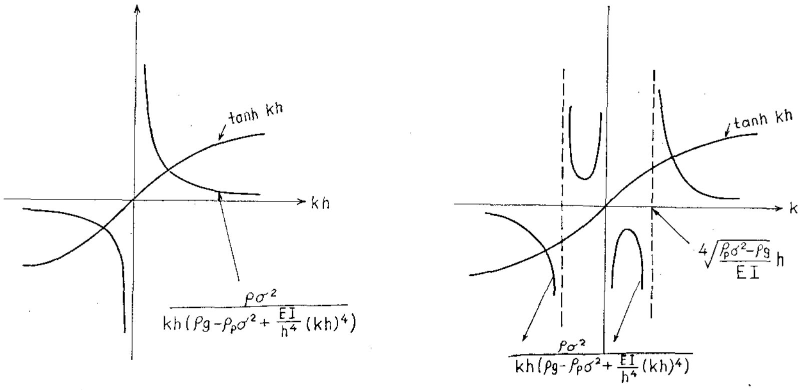
$$\phi_{\text{II}}=e^{-i\sigma t}\left(A\frac{\cosh k_0'(z+h)}{\cosh k_0'x}\cosh k_0'x+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{\cos k_n'(z+h)}{\cos k_n'h}\cosh k_n'x\right) \cdots\cdots (7)$$

ここで，A，B_n は定数であり境界条件より定められる。k_0'，k_n' は水底の境界条件 (5) より次式を満たす。

$$-\sigma^2+g\,k_0'\tanh k_0'h+\frac{EI}{\rho}k_0'^5\tanh k_0'h-\frac{\rho_p}{\rho}\sigma^2 k_0'\tanh k_0'h=0 \cdots\cdots (8)$$

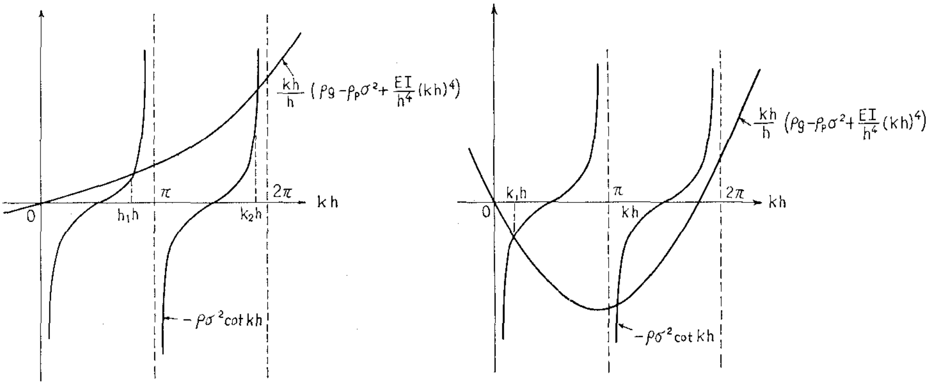
$$-\sigma^2-gk_n'\tan k_n'h-\frac{EI}{\rho}k_n'^5\tan k_n'h+\frac{\rho_p}{\rho}\sigma^2 k_n'\tan k_n'h=0 \cdots\cdots (9)$$

* 正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科
** 東京工業大学大学院学生



(イ)　$\rho g-\rho_p\sigma^2\geqq 0$　　(ロ)　$\rho g-\rho_p\sigma^2<0$

図—2



(イ)　$\rho g-\rho_p\sigma^2>0$　　(ロ)　$\rho g-\rho_p\sigma^2>0$

図—3

式 (8), (9) の方程式の 根のようすを 図—2, 図—3 に示した。

(3) 領域 I について

I の領域の水面には板がないのだから，$\rho_p=0$, $EI=0$ の場合である。

基本式は

$$\frac{\partial^2\phi_{\mathrm{I}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_{\mathrm{I}}}{\partial y^2}=0 \quad\cdots\cdots(10)$$

水面および水底での境界条件は

$$\frac{\partial\phi_{\mathrm{I}}}{\partial t}+g\,\eta=0$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\partial\phi_{\mathrm{I}}}{\partial z}$$

あるいは上二式をまとめて

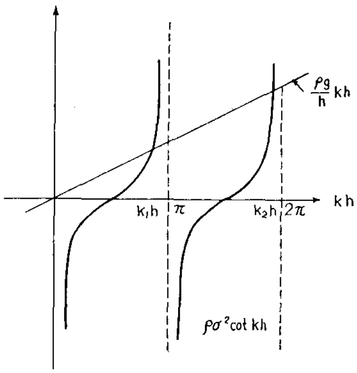
$$\frac{\partial^2\phi_{\mathrm{I}}}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi_{\mathrm{I}}}{\partial z}=0 \qquad (z=0)\quad\cdots\cdots(11)$$

$$\frac{\partial\phi_{\mathrm{I}}}{\partial z}=0 \qquad (z=-h)\quad\cdots\cdots(12)$$

以上の条件のほかに，$x\to\infty$ で ϕ_{I} が存在することを考慮して解くと，ϕ_{I} は次のようになる。

$$\phi_{\mathrm{I}}=e^{-i\sigma t}\left(C\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0h}e^{-ik_0x}+D\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0h}e^{ik_0x}+\sum_{n=1}^{\infty}E_n\frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_nh}e^{-k_nx}\right) \quad\cdots\cdots(13)$$

ここで，C, D, E_n は定数であり，k_0, k_n は次式を満



図—4

たす。

$$-\sigma^2+gk_0\tanh k_0h=0 \quad\cdots\cdots(14)$$

$$\sigma^2+gk_n\tan k_nh=0 \quad\cdots\cdots(15)$$

式 (15) の根の様子を 図—4 に示した (図—3 と比較)。

(4) 領域 I と II の接続

ϕ_{I}, ϕ_{II} は領域IとIIの境界で次の条件を満たす。

速度の連続 $\dfrac{\partial\phi_{\mathrm{I}}}{\partial x}=\dfrac{\partial\phi_{\mathrm{II}}}{\partial x}$ $(x=l)\cdots\cdots(16)$

ポテンシャルの連続 $\phi_{\mathrm{I}}=\phi_{\mathrm{II}}$ $(x=l)\cdots(17)$

式 (17) に式 (7), (13) を代入して

$$A\frac{\cosh k_0'(z+h)}{\cosh k_0'h}\cos k_0'l+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{\cos k_n'(z+h)}{\cos k_n'h}\cosh k_n'l=(Ce^{-ik_0l}+De^{ik_0l})\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0h}-\sum_{n=1}^{\infty}E_nk_n\frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_nh}e^{-k_nl} \quad\cdots\cdots(18)$$

式 (16) に式 (17), (18) を代入して

$$-k_0'A\frac{\cosh k_0'(z+h)}{\cosh k_0'h}\sin k_0'l+\sum_{u=1}^{\infty}B_nk_n'\frac{\cos k_n'(z+h)}{\cos k_n'h}\sin k_n'l=ik_0(-Ce^{-ik_0l}+De^{ik_0l})\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_o h}-\sum_{n=1}^{\infty}E_nk_n\frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_nh}e^{-k_nl}h \quad\cdots\cdots(19)$$

式 (18), (19) の両辺に $\cos k_n(z+h)$ をかけて $-h$ から 0 まで z に関して積分すると, $\cosh k_0(z+h)$, $\cos k_1(z+h)$, 等の直交性より

$$A\alpha_0\cos k_0'l+\sum_{s=1}^{\infty}B_s\alpha_{s,n}\cosh k_s'l=E_ng_ne^{-k_nl} \quad\cdots\cdots(20)$$

$$-k_0'A\alpha_0\sin k_0'l+\sum_{s=1}^{\infty}B_sk_s'\alpha_{s,n}\sinh k_{s,}l=-k_nE_ng_ne^{-k_nl} \quad\cdots\cdots(21)$$

ここで,

$$\alpha_0=(k_0'\tanh k_0'h\cdot\cos k_nh+k_n\sin k_nh)/(k_0'^2+k_n^2) \quad\cdots\cdots(22)$$

$$\alpha_{s,s}=(k_s'\tan k_s'h\cdot\cos k_nh-k_n\sin k_nh)/(k_s'^2-k_n^2) \quad\cdots\cdots(23)$$

$$g_0=\left(h+\frac{1}{2k_0}\sinh 2k_0h\right)\Big/2\cosh k_0h \quad\cdots\cdots(24)$$

$$g_n=\left(h+\frac{1}{2k_n}\sin 2k_nh\right)\Big/2\cos k_nh \quad\cdots\cdots(25)$$

式 (18), (19) の両辺に $\cosh k_0(z+h)$ をかけて $-h$ から 0 まで z について積分すると,

$$A\beta_0\cos k_0'l+\sum_{s=1}^{\infty}B_s\beta_s\cosh k_s'l=(Ce^{-ik_0l}+De^{ik_0l})g_0 \quad\cdots\cdots(26)$$

$$-k_0'A\beta_0\sin k_0'l+\sum_{s=1}^{\infty}B_sk_s'\beta_s\sinh k_s'l=ik_0(-Ce^{-ik_0l}+De^{ik_0l})g_0 \quad\cdots\cdots(27)$$

ここで,

$$\beta_0=(k_0'\tanh k_0'h\cosh k_0h-k_0\sinh k_0h)/(k_0'^2-k_0^2) \quad\cdots\cdots(28)$$

$$\beta_s=(k_s'\tan k_s'h\cosh k_0h+k_0\sinh k_0h)/(k_0^2+k_s'') \quad\cdots\cdots(29)$$

式 (20), (21) より E_n を消去すると,

$$A\alpha_0(k_n\cos k_0'l-k_0'\sin k_0'l)+\sum_{s=1}^{\infty}B_s\alpha_{sh}(k_n\cosh k_s'l+k_s'\sinh k_s'l)=0 \quad\cdots\cdots(30)$$

式 (26), (27) より D を消去すると,

$$A\beta_0(ik_0\cos k_0'l+k_0'\sin k_0'l)+\sum_{s=1}^{\infty}B_s\beta_s(ik_0\cosh k_s'h-k_s'\sinh k_s'l)=2ik_0Ce^{-ik_0l}g_0 \quad\cdots\cdots(31)$$

なお, C は入射波項の係数で既知である。

式 (30), (31) をまとめると

$$A\xi_n+\sum_{s=1}^{\infty}B_s\delta_{s,n}=0 \quad (n=1, 2, 3, \cdots)\cdots\cdots(32)$$

$$A\xi_0+\sum_{s=1}^{\infty}B_s\delta_{s,0}=\varepsilon \quad\cdots\cdots(33)$$

ここで,

$$\xi_0=\beta_0(ik_0\cos k_0'l+k_0'\sin k_0'l) \quad\cdots\cdots(34)$$

$$\xi_n=\alpha_0(k_n\cos k_0'l-k_0'\sin k_0'l) \quad\cdots\cdots(35)$$

$$\delta_{s,0}=\beta_s(ik_0\cosh k_s'l-k_s'\sinh k_s'l) \quad\cdots\cdots(36)$$

$$\delta_{s,n}=\alpha_{s,n}(k_n\cosh k_s'l+k_s'\sinh k_s'l) \quad\cdots\cdots(37)$$

$$\varepsilon=2ik_0Ce^{-ik_0l}g_0 \quad\cdots\cdots(38)$$

(5) 板に対する解

(1)～(4) までは水に対する解析であるがこのままでは不十分である。というのは, 板に対する境界条件が考慮されていないからである。つまり, 板は, 一端固定・他端自由のはりの条件を満たさねばならない。このため, 水面変位 (板の変位でもある) $\eta(x, t)$ を板の境界条件をみたすような直交関数に展開することを考える。

式 (2), (3) より P を消去すると,

$$EI\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}+\rho_p\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+\rho g\eta=-\rho\frac{\partial\phi_{\mathrm{II}}}{\partial t} \quad\cdots\cdots(39)$$

式 (7) より

$$-\rho\frac{\partial\phi_{\mathrm{II}}}{\partial t}=i\rho\sigma e^{-i\sigma t}(A\cos k_0'x+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cosh k_n'x)=\psi(x)e^{-i\sigma t} \quad\cdots\cdots(40)$$

ここで

$$\psi(x)=i\rho\sigma(A\cos k_0'x+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cosh k_n'x)$$

$$\eta=v(x)e^{-i\sigma t} \quad\cdots\cdots(41)$$

とおくと式 (39), (40) より

$$\frac{d^4v}{dx^4}-\frac{1}{EI}(\rho_p\sigma^2-\rho g)v=\frac{\psi(x)}{EI} \quad \cdots\cdots(42)$$

いま,

$$\lambda^4=\frac{\rho_p\sigma^2-\rho g}{EI} \cdots\cdots(43)$$

とおくと上式は

$$\frac{d^4v}{dx^4}-\lambda^4 v=\frac{\psi(x)}{EI} \cdots\cdots(44)$$

式 (44) の解を次の式 (45), (46) の条件のもとで解く。

$$v'(x)=0,\ v(x)=0 \qquad (x=0)\cdots\cdots(45)$$

$$v''(x)=0,\ v'''(x)=0 \qquad (x=l)\cdots\cdots(46)$$

この問題を解くために, 境界条件 (45), (46) のもとで次の方程式を満たすような $v_n(x)$ を求める。

$$\frac{d^4v_n}{dx^4}-\zeta_n{}^4v_n=0 \quad (\zeta_n \text{ は定数})\cdots\cdots(47)$$

結果だけを示すと,

$$v_n(x)=\text{const.}\left\{\cosh\zeta_n x-\cos\zeta_n x+\frac{\sin\zeta_n l-\sinh\zeta_n l}{\cosh\zeta_n l+\cos\zeta_n l}\cdot(\sinh\zeta_n x-\sin\zeta_n x)\right\} \cdots\cdots(48)$$

ここで,

$$1+\cosh\zeta_n l\cos\zeta_n l=0 \quad (n=1, 2, \cdots) \cdots\cdots(49)$$

式 (49) の根 ζ_n のうち正のものだけをとり, 小さいほうから $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ という記号で表わす。$\{v_n(x)\}$ は直交系をなすから, $v_n(x)$ は正規化しておくのが便利である。今後 $v_n(x)$ は正規化されているものとして取り扱う。もとの問題にもどって, 式 (49) の解が次のように書けるものと仮定する。

$$v(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n v_n(x) \quad (\gamma_n \text{ は定数}) \cdots\cdots(50)$$

$\int_0^l \{(44)\times v_n(x)-(47)\times v(x)\}dx$ の演算を行うと $\{v_n(x)\}$ の正規直交性を利用して,

$$\gamma_n=\frac{1}{\gamma_n{}^4-\lambda^4}\int_0^l\frac{\psi(x)}{EI}v_n(x)dx \cdots\cdots(51)$$

式 (41), (50), (51) より

$$\eta(x,t)=e^{-i\sigma t}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n v_n(x) \cdots\cdots(52)$$

$v(x)$ は式 (45), (46) を満たし, よって, $\eta(x,t)$ も板の境界条件を満たす。

以上が板に対する解である。

(6) 板と水との接続

いままでは, 水の場合と板の場合とを別個に求めてきたが両者の性質 (変位や鉛直方向速さ等) は水面 $z=0$ で一致する必要がある (仮定 (ハ) より)。この関係を与えるのが式 (4) である。この条件を満たせば, すべての境界条件を満たす解が得られる。

式 (52) より

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=-i\sigma e^{-i\sigma t}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n v_n$$

式 (7) より

$$\left(\frac{\partial\phi_{\text{II}}}{\partial z}\right)_{z=0}=e^{-i\sigma t}\Big(h_0'A\tanh k_0'h\cos k_0'x-\sum_{n=1}^{\infty}k_n'B_n\tan k_n'h\cosh k_n'x\Big)$$

これらを式 (4) に代入して

$$-i\sigma\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n v_n=k_0'A\tanh k_0'h\cos k_0'x-\sum_{n=1}^{\infty}k_n'\beta_n\tan k_n'h\cosh k_n'x$$

上式の両辺に v_n をかけて 0 から l まで x で積分すると

$$-i\sigma\gamma_n=\int_0^l\Big(k_0'A\tanh k_0'h\cos k_0'x-\sum_{s=1}^{\infty}k_s'B_s\tan k_s'h\cosh k_s'x\Big)v_n dx \cdots\cdots(53)$$

式 (51) より

$$\gamma_n=\frac{i\rho\sigma}{EI(\lambda_n{}^4-\lambda^4)}\int_0^l\Big(A\cos k_0'x+\sum_{s=1}^{\infty}B_s\cosh k_0'x\Big)v_n dx \cdots\cdots(54)$$

式 (53), (54) より γ_n を消去すると

$$\frac{\rho\sigma^2}{EI(\lambda_n{}^4-\lambda^4)}\int_0^l\Big(A\cos k_0'x+\sum_{s=1}^{\infty}B_s\cosh k_0'x\Big)v_n(x)dx=\int_0^l\Big(k_0'A\tanh k_0'h\cos k_0'x-\sum_{s=1}^{\infty}k_s'B_s\tan k_s'h\cosh k_s'x\Big)v_n(x)dx \quad (55)$$

式 (8), (9) を利用して式 (55) を変形すると

$$\int_0^l\Big\{k_0'(k_0'^4-\lambda_n{}^4)\tanh k_0'h\,A\cos k_0'x+\sum_{s=1}^{\infty}k_s'(\lambda_n{}^4-k_s'^4)\tan k_s'h\,B_s\cosh k_s'x\Big\}\times v_n(x)dx=0 \cdots\cdots(56)$$

$$(n=1, 2, 3, \cdots)$$

$\lambda^4=\lambda_n{}^4$ のときは式 (56) は次のようになる

$$\int_0^l\Big(A\cos k_0'x+\sum_{s=1}^{\infty}B_s\cosh k_s'x\Big)v_n(x)dx=0 \cdots\cdots(57)$$

以上の結果より, 式 (32), (33), (56) を満たすような $A, B_1, B_2, \cdots$ が得られると, すべての境界条件を満たす解を得ることができる。

3. 計　　算

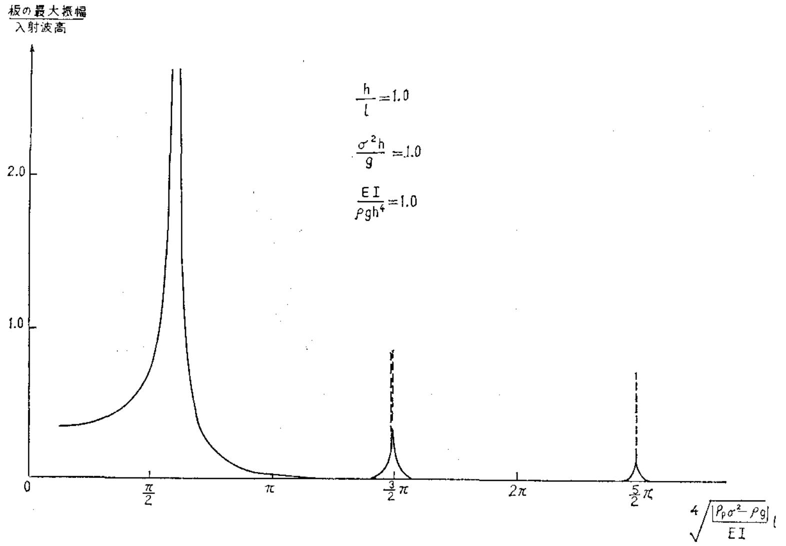
(1) 方　　法

計算に必要な式は (32), (33), (56) である。これらから得られる方程式の個数と未知量 $A, B_1, B_2, \cdots$ の個

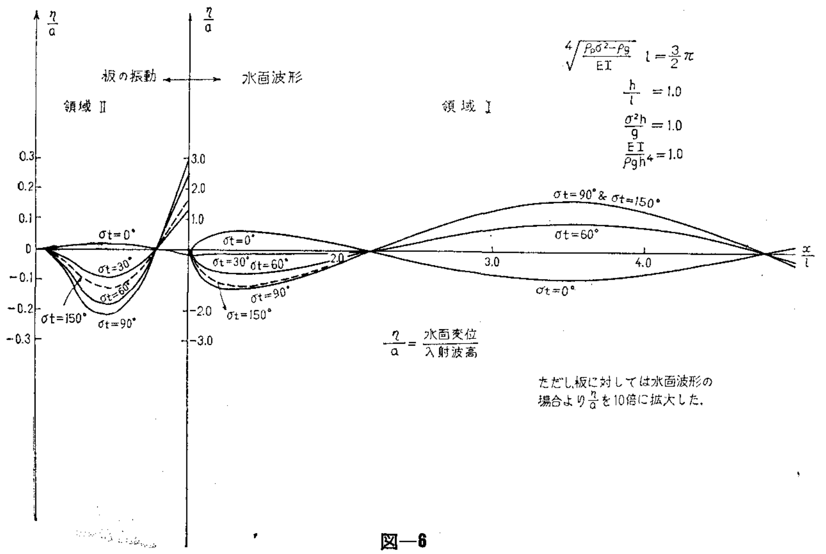
数とを一致させ，連立一次方程式をつくれば原理的に計算可能となる。方程式の個数および，それらを式 (32)，(33) から何個，式 (56) から何個とるかは問題となるのだが，ここでは式 (32) から4個 ($n=1, 2, 3, 4$)，式 (33) から1個，式 (56) から4個 ($n=1, 2, 3, 4$) の計9個より計算した。そして，板の振動および領域Ⅰでの波形の変化を調べた。なお，与えられるべき定数として，E, I, ρ_p, h, l, σ がありこれらが各々変化する場合についてすべて計算結果を導くべきではあるが，今回の報告では $EI/\rho gh^4=1.0$, $\sigma^2h/g=1.0$, $h/l=1.0$ とし $(\rho_p\sigma^2-\rho g)\cdot l^4/EI$ が変化する場合を取り扱った。これは，他のすべての定数 ($E, I, \cdots$ 等) が一定で板の密度だけが変わるような場合である。

（2） 計算結果

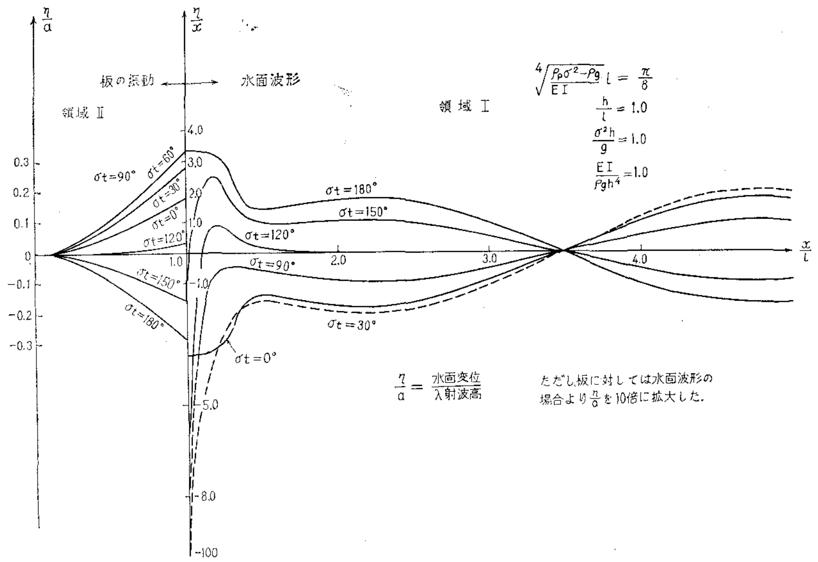
板の最大振幅と入射波高との比が $\mathrm{RLF}=\sqrt[4]{(\rho_p\sigma^2-\rho g)l^4/EI}$ によってどのように変わるかを示したのが図―5である。この図からもわかるように共振は $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi, \cdots$ の付近で生ずる。正確には $(\lambda_n l)^4=\mathrm{RLF}$ のときに起こる。ここで $1+\cosh\lambda_n l\cos\lambda_n t=0$ であり，$\lambda_1 l=1.8751$, $\lambda_2 l=4.6941, \cdots$ となる。図―4からわかるようにRLFが π をこえると共振点付近を除いて振幅はほとんど0である。これは，RLFの増加がこの場合には板の密度の増加を意味することより明らかである。次に，図―6，図―7は領域Ⅰでの波形の変化と領域Ⅱの板の振動をおのおの $\mathrm{RLF}=\frac{\pi}{8}$, $\frac{3}{2}\pi$ の場合について示



図―5



図―6



図―7

したものである。この2つが代表的な波形を示している。両図より，板の振動と，水の波の変形項（式（13）の右辺第3項）の位相が180°ずれていることがわかる。また図―6より板の先端付近では，波高が入射波高の2.0倍を十分こえることがある。図―6，図―7の2つの波形を比べるとこれも位相がちょうど180°（半波長）ずれているのがわかる。計算の結果から，RLFが第二次共振点以下の場合（RLF＜$\lambda_2 l$≒$3/2\pi$）には，波の波形は図―6に近くて，RLFが$\lambda_2 l$より大であると（ただし，RLF＜3πの範囲までしか計算しなかった）波の波形は図―7に近いといえそうな結論が出たが断定はできぬ。

参考文献

1) 井島武士：海岸工学，朝倉書店
2) 犬井鉄郎：応用偏微分方程式論，岩波書店
3) 鵜飼恵三：東工大卒業論文，昭和45年度