

数値波動解析法とその応用

— 構造物周辺の波 —

伊藤 喜行*・谷本 勝利**

1. はじめに

任意境界水域における波動問題の解法として、数値波動解析法を新たに提唱した。この方法は、未知関数として水位変動と表面粒子速度のみを含む変形された運動方程式と連続の方程式を、与えられた境界条件のもとに初期状態から出発して、差分法によって解くものである。

この論文では、まず本解析法の基礎となる方程式の誘導を示し、半無限堤や島堤などの回折波に関する解析解と結果を比較して、その実用性を確認したのち、任意形状防波堤および任意反射率防波堤周辺の波高分布、直立物体に作用する波力などを求める問題への応用例を掲げた。

2. 基礎方程式

ここで取り扱うのは非圧縮性理想流体の一定水深水域における微小振幅波動で、無渦運動を仮定する。最終的に導かれる表面基礎方程式は、表面での未知関数のみを含む方程式で、これを基礎として以後の計算を行なうという意味で、このように名づけたものである。

(1) 運動および連続方程式と境界条件

運動および連続方程式、表面および底面における境界条件は、非線型項を省略して次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$p|_{z=\eta} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$w|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \dots\dots\dots (4)$$

$$w|_{z=-h} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

(2) 表面基礎方程式

数値計算を容易に実行できるようにするため、式(1)～(5)から表面基礎方程式を導く。この際、変形を容易にするため、速度ポテンシャルの場合運動を考える。

一定水深水域における速度ポテンシャルは、底面条件式(5)を考慮して次のように与えられる。

$$\phi = \psi(x, y, t) \cosh k(h+z) \dots\dots\dots (6)$$

ここに k は定数であり、その物理的意味については後に考察する。

式(6)を用いて、速度成分をそれぞれ次のように書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} u_0(x, y, t) \\ v &= \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} v_0(x, y, t) \\ w &= \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} w_0(x, y, t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 u_0, v_0, w_0 はそれぞれ表面における粒子速度成分である。

次に圧力 p は、式(6)を運動方程式に代入し積分することによって、

$$-\cosh k(h+z) \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \dots\dots\dots (8)$$

となるから、自由水面の条件式(3)を用いて次のように与えられる。

$$p = \rho g \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \eta(x, y, t) - \rho g z \dots\dots\dots (9)$$

式(7)における w_0 は表面の境界条件式(4)で与えられているから、結局もとの基礎方程式における未知関数 u, v, w および p を、定数 k と表面での未知関数 u_0, v_0 および η によって表わすことができた。これらを式(1)の第1、第2式および式(2)へ代入することによって、新しい未知関数についての運動方程式と連続方程式が次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\frac{1}{k} \tanh kh \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

これが、本解析法における表面基礎方程式である。

一方、式(1)の第3式からは定数 k に対する条件式として、

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -kg \tanh kh \cdot \eta \dots\dots\dots (11)$$

が得られる。これは、 η が周期 $T (= 2\pi/\sigma)$ を有するとき、

* 正会員 工博 運輸省港湾技術研究所 水工部

**正会員 運輸省港湾技術研究所 水工部

$$\sigma^2 = kg \tanh kh \dots\dots\dots (12)$$

となることを示し、 $k=2\pi/L$ とおけば、微小振幅波理論における周期と波長の周知の関係と一致する。

任意波形の場合は、このような成分波の合成と考えればよい。

3. 数値計算の方法

実際の数値計算は、無次元化した表面基礎方程式を差分方程式に変換して、与えられた初期条件と境界条件のもとに、水位と速度成分をある時間間隔で交互に解いて行く方法で行なう。その方法は、筆者らが長周期波に対する防波堤の効果に関する計算^{1)~4)}で行なったものと原理的に同じである。

そこでは、問題の対象領域において、純粋な入射波によって計算を実行できるように、その領域から十分離れたところに仮想境界と称する計算上の境界を設けている。くわしくは、上述文献を参照されたい。また、本解析法における表面基礎方程式の無次元化およびその差分化などについては、文献 5) を参照されたい。

任意反射率を有する境界については後述する。

なお、本論文における計算では、原則として格子間隔、時間間隔を次のようにとっている。

$$\Delta x = \Delta y = \frac{L}{15} (= \Delta s)$$

$$\Delta t = \frac{T}{24}$$

4. 解析解との比較

波の回折については、半無限堤に対する Sommerfeld の解⁶⁾や、島堤に対し Mathieu 方程式を解いたもの⁷⁾などが得られており、それらの結果は、実験とよく一致することがすでに確かめられている。このような解析解の得られる条件について、数値波動解析法を適用して結果を比較すれば、その実用性が検討できる。そのため、次のように、三つのケースに対し計算を実施して、防波堤に沿う波高分布を比較してみた。

(1) 半無限堤直角入射

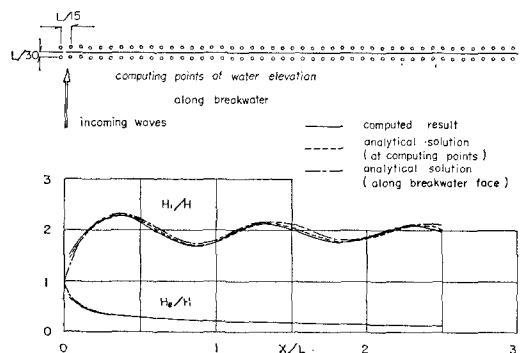


図-1 半無限堤に沿う波高分布

図-1 に、この場合の結果を示す。数値解法においては有限差分であるため、防波堤に沿う水位計算点は $\Delta s/2$ (この場合は $L/30$) だけ離れた地点となる。解析解については、防波堤にぴったり沿う結果(一点鎖線)と水位計算点での結果(点線)の両方を示してある。

(2) 島堤直角入射

長さ2波長の島堤に、波が直角に入射する場合を計算の対象とする。この場合、現象は堤中央を通る垂線に対称であるから、鏡像の原理によってそこに直立の壁があると考え、半分の領域だけ計算しても結果は同じである。図-2 に、解析解との比較を示す。堤端付近での不一致は、その計算位置の相違によるものと思われる。

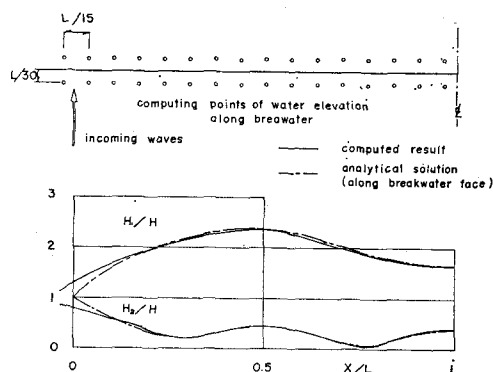


図-2 島堤に沿う波高分布

(3) 半無限堤斜め入射 ($\theta=45^\circ$)

波の入射方向に対する斜め防波堤を階段状に近似して計算を行なう。その結果を図-3 に示す。ここでは、防

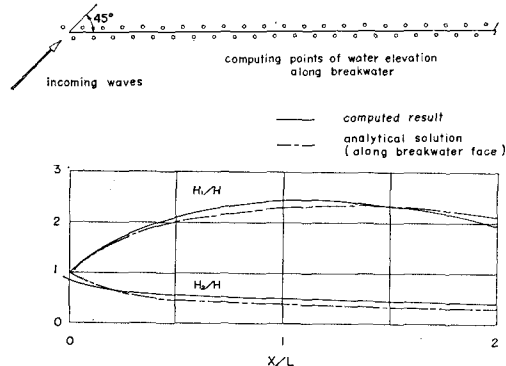


図-3 斜め入射波による波高分布

波堤を階段状の中心を通る直線として描いている。解析解との間にやや相違が認められるが、きわめて簡単な近似法として許容される程度の差であり、格子間隔を細かくすることによって、精度を向上させることができよう。

5. 任意形状防波堤周辺の波高分布への応用

従来、解析的には解けなかったような任意形状防波堤周辺の波高分布をこの数値波動解析法の簡単な応用とし

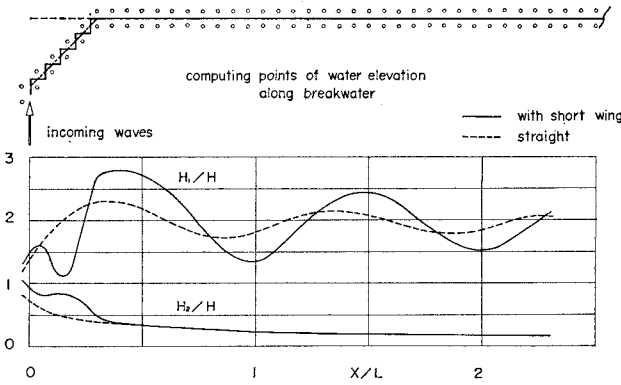


図-4 ハネを有する半無限堤

て、求めることができる。

ここではその一例として、図-4 上図に示すような法線に対する計算を実施して、同下図に示す波高分布を得た。この計算例では、ハネ出した部分の長さは $L/2.5$ であり、最大波高は隅角部付近で約 $2.7 H_i$ となっている。

6. 任意反射率を有する防波堤への応用

回折波等の取り扱いにおけるもう一つの困難な問題点であった境界条件の質的な面、すなわち任意反射率を有する防波堤に対しては、造波板方式と名づけた計算方式を編み出した。以下、その考え方と適用例を示す。

(1) 造波板方式による計算法

まず簡単のため、直線状の完全反射性防波堤について、造波板方式の原理を説明する。

速度ポテンシャル ϕ は、防波堤がない場合の入射波の速度ポテンシャル ϕ_i と防波堤があることによって生ずる擾乱波の速度ポテンシャル ϕ_d の和で表わされる。

$$\phi = \phi_i + \phi_d \quad \dots\dots\dots (13)$$

さらに、擾乱波は堤前面と背面で造られる波の和と考えられ、それぞれの波の速度ポテンシャルを ϕ_f および ϕ_r とおけば、 ϕ_d は次のようになる。

$$\phi_d = \phi_f + \phi_r \quad \dots\dots\dots (14)$$

堤両面で造られる波というのは、いまの場合前面では入射波を反射させ、背面では入射波を打ち消すような波と考えられるから、それぞれ次の条件を満たす波を起こしてやればよい。

$$\left. \frac{\partial \phi_f}{\partial s} \right|_s = \left. \frac{\partial \phi_i}{\partial s} \right|_s, \quad \left. \frac{\partial \phi_f}{\partial n} \right|_s = - \left. \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right|_s \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\left. \frac{\partial \phi_r}{\partial s} \right|_s = - \left. \frac{\partial \phi_i}{\partial s} \right|_s, \quad \left. \frac{\partial \phi_r}{\partial n} \right|_s = - \left. \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right|_s \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 s は防波堤に沿う周辺、 n はそれに直角方向を表わす。

このように、防波堤は特殊な造波板として置き

換えられるので、この原理を取り入れた計算方式を造波板方式と名づけた。

本方式では、次のような順序で計算を行えばよい。

- (i) 防波堤が無い状態での入射波のみによる計算
 - (ii) (i)の結果、防波堤に相当する境界で得られた速度から、式(15)、(16)で変換された速度をその位置で与え、それを境界条件とする計算
 - (iii) (i)と(ii)の同時結果の和
- このようにして計算した完全反射の場合の結果は、通常方式によるものと全く一致した。

防波堤前面に沿って、任意反射率 $r(s)$ が分布する場合には、式(15)の第2式の代りに、

$$\left. \frac{\partial \phi_f}{\partial n} \right|_s = -r(s) \left. \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right|_s \quad \dots\dots\dots (17)$$

とおけばよい。

なおこのような方式は、境界に垂直な成分を有する到達波の速度が既知の場合にのみ、単純に適用できる。上記の例では、造波板としての防波堤背面あるいは前面で造られた波は、それぞれ他面に到達しても、堤に沿って進行する波となるだけで垂直成分を持たない。したがって、純粋な入射波のみ考慮すればよかったのである。しかしながら、たとえば二重防波堤のように、他境界からの擾乱波が垂直成分を有して到達する場合には、各時刻ごとの繰り返し計算が必要となる。

(2) 消波工を有する防波堤への適用例

適用例として、次の二ケースを示す。

- (i) 全法線にわたり完全消波の半無限堤
- (ii) 堤頭部半波長のみ完全消波、他は完全反射の半無限堤

波の入射方向は、いずれも防波堤に対し直角とする。計算結果は、図-5 に全法線完全反射の場合と合わせて示してある。防波堤前面に沿う波高比の分布は、(i)

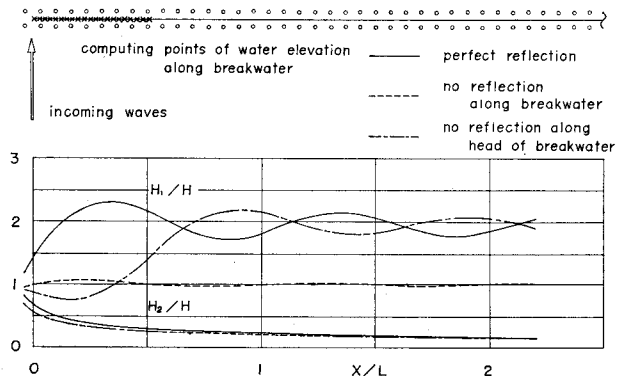


図-5 消波工を有する半無限堤

の場合, 1を中心としたわずかな波状分布, (ii)の場合, 堤頭部付近で約 1, 完全反射の部分で2を中心とした波状分布となっている。背面に沿っては, 完全反射の場合に比較して, 若干減少するにすぎない。

7. 直立物体に作用する波力への応用

水位変動に伴う圧力差としての直立物体に作用する波力は, 次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \oint_s \int_{-h}^{\eta} p dz l(s) ds = \frac{\rho g}{k} \tanh kh \oint_s \eta_s l(s) ds \\ F_y &= \oint_s \int_{-h}^{\eta} p dz m(s) ds = \frac{\rho g}{k} \tanh kh \oint_s \eta_s m(s) ds \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

ここに, s は直立物体の周辺を表わし, (l, m) はその内法線方向余弦である。

したがって, 与えられた直立物体に対し, その周辺上での水位を数値波動解析法で求めればよい。

適用例として, 図-6 に示すような無限長直立壁前での長矩形形状物体を取りあげる。これは, 栈橋に係留され

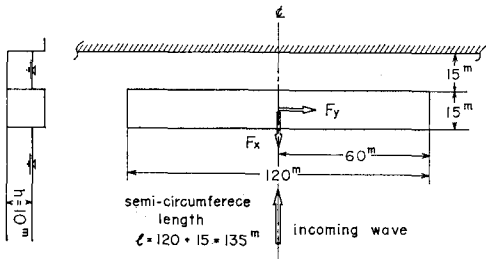


図-6 直立矩体の配置

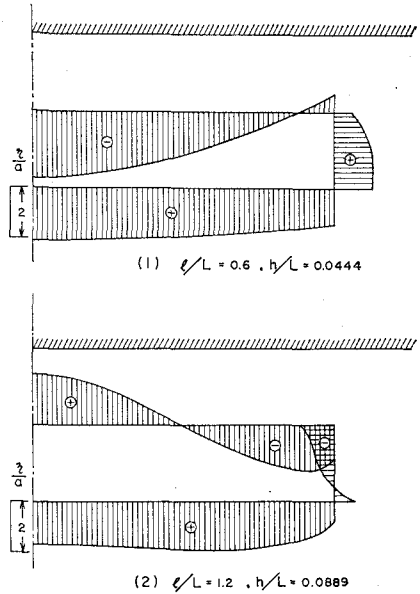


図-8 最大波力作用時の水位分布

た船舶に作用する全波力を求めるために行なった, 一つの取り扱いである。直立壁に直角に入射する波による最大波力を種々の周期の波について計算して, 直立壁がない状態での同様な結果と比較したものが, 図-7 である。図-8 には, 最大波力時の周辺同時水位分布の例を示した。

背後に直立壁がある場合(定常波中)と, ない場合(進行波中)では, かなり作用する波力の大きさも違ってくるのが認められる。

参考文献

- 1) 運輸省港湾局調査設計室: 長周期波に対する防波堤の効果に関する計算, 1962.
- 2) 伊藤喜行・土岐祥介・森平倫生: 同上(第2報), 港湾技術研究所報告, 第3巻7号, 1965.
- 3) 伊藤喜行・木原 力: 同上(第3報)一模型実験との比較一, 港湾技術研究所報告, 第7巻第4号, 1968.
- 4) 伊藤喜行・谷本勝利・木原 力: 同上(第4報)一1968十勝沖地震津波に対する大船渡津波防波堤の効果一, 港湾技術研究所報告, 第7巻第4号, 1968.
- 5) 伊藤喜行・谷本勝利: 新しい方法による波動の数値計算一防波堤周辺の波高分布への適用一, 港湾技術研究所報告, 第10巻第2号, 1971.
- 6) たとえば, 森平倫生・奥山育英: 海の波の回折計算法と回折図, 港湾技研資料, No. 21, 1965.
- 7) 合田良実・吉村知司・伊藤正彦: 島堤による波の反射と回折, 港湾技術研究所報告, 第10巻第2号, 1971.

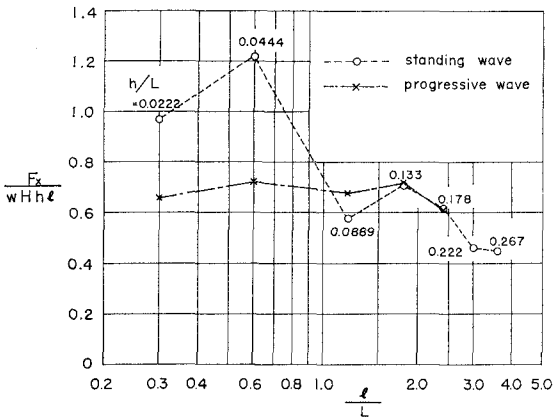


図-7 最大波力