

流れを遡る波のエネルギーの減衰について (II)

岩 崎 敏 夫*・佐 藤 道 郎**

1. ま え が き

前報¹⁾で、水深が一樣な流れを波が遡上する場合について実験的に波高減衰を調べ、流れが無い場合に比べて流速が大きくなると波高の減衰が著しくなることを示した。また、この波高の減衰が底面のごく近傍に形成される波の境界層内での波のエネルギーの逸散ならびに層外の内部摩擦による波のエネルギーの逸散によるものとして、後者について波が流れの渦動粘性によりエネルギーを逸散すると考え計算を行ない、波高変化が指数関数的であることを示し、波高減衰率を求めた。

波の減衰を考える場合に境界摩擦が重要な問題となるわけであるが、この点に関し流れが無い場合に関しては今日まで多くの研究成果が蓄積されてきているけれども波と流れの共存する場合に関する研究はほとんど見当たらないようである。これを解決していくためには、波と流れの共存下における境界層の乱流構造の実態を明らかにしていくことが重要な課題であろう。

本報告では、波の境界層内でも流れの渦動粘性の効果によって波エネルギーが逸散すると考えて計算を行なうことにより、流速が増大すると波高減衰率が増大するのは境界摩擦によるのか、あるいは、内部摩擦によるものなのかという点について考察を試みた。

2. 理 論

前報〔以下〔I〕とする〕同様に図-1のような水深一樣な流れを波が遡上する場合について考える。

x 軸を水底にとり、 y 軸をそれに垂直にとると、 x 方向の線型化された運動方程式は次式で表わされる。

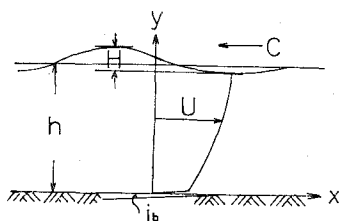


図-1

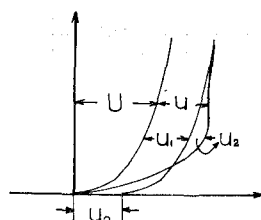


図-2

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} = g i_b - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 u, v はそれぞれ x, y 方向の波の速度成分、 U は流れの速度、 t は時間、 p は圧力、 τ はせん断応力、 g は重力加速度、 i_b は底勾配、 ρ は密度、である。

τ を次のように表わす。

$$\tau = \rho N \frac{\partial (U+u)}{\partial y} = \rho N \frac{\partial U}{\partial y} + \rho N \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_c + \tau_w \quad \dots\dots\dots (2)$$

τ_c に関しては、水深を h で表わして

$$\tau_c = \tau_{c0} (1-y/h) \quad \tau_{c0} = \rho g h i_b \quad \dots\dots\dots (3)$$

とすれば、

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_c}{\partial y} = -g i_b \quad \dots\dots\dots (4)$$

となるから、式(1)は次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_w}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (5)$$

いま、

$$\left. \begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ v &= v_1 + v_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

とおいて、 u_1, v_1 を〔I〕の式(41)、(42)で表わされるものとし(図-2)、式(5)に代入して薄い境界層内について考えて、層内の運動を水平運動とみなして y 方向速度成分を無視し、 $\partial u_1 / \partial y \approx 0$ として、境界層の外縁との圧力の連続を考慮して次式が得られる。

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + U \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(N \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(7)に

$$u_2 = \text{Re} \{ \hat{u}_2 \cdot e^{i(m x - \omega t)} \}$$

とおいて代入すれば次式を得る。ただし、 $\hat{u}_2$ は u_2 の振幅、 $m = 2\pi/L$ 、 $\omega = 2\pi/T$ 、 L は波長、 T は周期、 $i = \sqrt{-1}$ 、

* 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 東北大学助手 同

Re は real part の意である。

$$\frac{d}{dy} \left(N \frac{d\hat{u}_2}{dy} \right) + i\omega \left(1 - \frac{U}{C} \right) \hat{u}_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

U_0 を表面流速として

$$\hat{u}_2 = \hat{u}_{20} + \left(\frac{U_0}{C_0} \right) \hat{u}_{21} + \left(\frac{U_0}{C_0} \right)^2 \hat{u}_{22} + \dots \quad \dots\dots (9)$$

と表わし式(8)に代入して次式を得る。 C は波速である。

$$\left\{ \frac{d}{dy} \left(N \frac{d\hat{u}_{20}}{dy} \right) + i\omega \hat{u}_{20} = 0 \quad \dots\dots\dots (10) \right.$$

$$\left. \frac{d}{dy} \left(N \frac{d\hat{u}_{21}}{dy} \right) + i\omega \hat{u}_{21} = i\omega \left(\frac{U}{U_0} \right) \hat{u}_{20} \quad \dots\dots\dots (11) \right.$$

境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_{20} &= -\hat{u}_1|_{y=0} = -\hat{u}_0 & \text{at } y=0 \\ \hat{u}_{20} &\rightarrow \infty & \text{as } y \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_{21} &= 0 & \text{at } y=0 \\ \hat{u}_{21} &\rightarrow \infty & \text{as } y \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

式(10), (11)で U と N を与えれば解かれることになるわけであるが、ここでは、[I]と同様に U が次式で表わされるような場合について計算をおこなう。

$$U = \begin{cases} (U_*^2/\nu) \cdot y & (0 \leq y \leq y_s) \quad \dots\dots\dots (14) \\ \{5.5 + (1/\kappa) \ln(U_* y/\nu)\} U_* & (y_s \leq y) \quad \dots\dots (15) \end{cases}$$

ここに、 κ はKármán定数(=0.4)、 U_* は摩擦速度

$$u = u_1 + u_2$$

($=\sqrt{\tau_{c0}/\rho}$)、 ν は動粘性係数、 y_s は粘性底層の厚さ(=11.6 ν/U_*)である。

N は式(2), (3)から、 $y/h \ll 1$ を考慮に入れて次のようにとる。

$$N = \begin{cases} \nu & (0 \leq y \leq y_s) \quad \dots\dots\dots (16) \\ \kappa U_* y & (y_s \leq y) \quad \dots\dots\dots (17) \end{cases}$$

式(10), (11)に代入して解くべき式は次のとおりである。

$$\left\{ \frac{d^2 \hat{u}_{20}}{dy^2} + \frac{i\omega}{\nu} \hat{u}_{20} = 0 \quad (0 \leq y \leq y_s) \quad \dots\dots\dots (18) \right.$$

$$\left. \frac{d^2 \hat{u}_{20}}{dy^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{d\hat{u}_{20}}{dy} + \frac{i\omega}{\kappa U_*} \cdot \frac{1}{y} \cdot \hat{u}_{20} = 0 \quad (y_s \leq y) \quad \dots\dots\dots (19) \right.$$

$$\left\{ \frac{d^2 \hat{u}_{21}}{dy^2} + \frac{i\omega}{\nu} \hat{u}_{21} = \frac{i\omega}{\nu} \cdot \frac{U}{U_0} \cdot \hat{u}_{20} \quad (0 \leq y \leq y_s) \quad \dots\dots\dots (20) \right.$$

$$\left. \frac{d^2 \hat{u}_{21}}{dy^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{d\hat{u}_{21}}{dy} + \frac{i\omega}{\kappa U_*} \cdot \frac{1}{y} \cdot \hat{u}_{21} = \frac{i\omega}{\kappa U_*} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{U}{U_0} \cdot \hat{u}_{20} \quad (y_s \leq y) \quad \dots\dots (21) \right.$$

境界条件(12), (13)のほかに次の条件が付加される。

「 $y=y_s$ で $\hat{u}_{20}$, $d\hat{u}_{20}/dy$, $\hat{u}_{21}$, $d\hat{u}_{21}/dy$ がそれぞれ連続」 $\dots\dots\dots (22)$

計算結果は最終的に次のように表わされる。

$$\begin{aligned} & u_1 - \hat{u}_0 Re \left[\frac{H_0^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \cos \beta_1(y_s - y) + \frac{\beta_2}{\beta_1 \sqrt{y_s}} H_1^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \sin \beta_1(y_s - y)}{H_0^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \cos \beta_1 y_s + \frac{\beta_2}{\beta_1 \sqrt{y_s}} H_1^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \sin \beta_1 y_s} \right. \\ & \quad - \frac{\beta_1}{\left\{ H_0^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \cos \beta_1 y_s + \frac{\beta_2}{\beta_1 \sqrt{y_s}} H_1^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \sin \beta_1 y_s \right\}^2} \\ & \quad \times \left\{ \left(H_0^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \cos \beta_1(y_s - y) + \frac{\beta_2}{\beta_1 \sqrt{y_s}} H_1^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \sin \beta_1(y_s - y) \right) \right. \\ & \quad \times \int_0^{y_s} \frac{U}{C} \left\{ H_0^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \cos \beta_1(y_s - \xi) + \frac{\beta_2}{\beta_1 \sqrt{y_s}} H_1^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \sin \beta_1(y_s - \xi) \right\} \sin \beta_1 \xi d\xi \\ & \quad + \left(H_0^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \cos \beta_1 y_s + \frac{\beta_2}{\beta_1 \sqrt{y_s}} H_1^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \sin \beta_1 y_s \right) \int_y^{y_s} \frac{U}{C} \left\{ H_0^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \right. \\ & \quad \times \cos \beta_1(y_s - \xi) + \frac{\beta_2}{\beta_1 \sqrt{y_s}} H_1^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \sin \beta_1(y_s - \xi) \left. \right\} \sin \beta_1(y - \xi) d\xi \left. \right\} e^{i(m x - \omega t)} \\ & \quad (0 \leq y \leq y_s) \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & u_1 - \hat{u}_0 Re \left[\frac{H_0^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y})}{H_0^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \cos \beta_1 y_s + \frac{\beta_2}{\beta_1 \sqrt{y_s}} H_1^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \sin \beta_1 y_s} \right. \\ & \quad \frac{H_0^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y}) \int_y^{y_s} \frac{U}{C} \left\{ H_0^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \cos \beta_1(y_s - \xi) + \frac{\beta_2}{\beta_1 \sqrt{y_s}} H_1^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \sin \beta_1(y_s - \xi) \right\} \sin \beta_1 \xi d\xi}{\left\{ H_0^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \cos \beta_1 y_s + \frac{\beta_2}{\beta_1 \sqrt{y_s}} H_1^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \sin \beta_1 y_s \right\}^2} \\ & \quad + \frac{i\pi\beta_2^2}{2} \int_y^{y_s} \frac{U}{C} \left\{ H_0^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y}) \cdot H_0^{(2)}(2\beta_2 \sqrt{\xi}) - H_0^{(2)}(2\beta_2 \sqrt{y}) \cdot H_0^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{\xi}) \right\} d\xi \left. \right] e^{i(m x - \omega t)} \\ & \quad (y_s \leq y) \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

ここに,

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} e^{i(\pi/4)} \dots\dots\dots (25)$$

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{\omega}{\kappa U_*}} e^{i(\pi/4)} \dots\dots\dots (26)$$

$H_0^{(1)}(z)$, $H_0^{(2)}(z)$ はそれぞれ, 第1種および第2種の Hankel 関数。

この計算結果をもとに境界層における波の逸散エネルギー E_{dB} を求める。

境界層厚さを δ として次式で与えられる ([I] の (49))

$$E_{dB} = - \int_0^\delta u \frac{\partial \tau_w}{\partial y} dy \approx - \int_0^\delta u \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho N \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) dy$$

$$\begin{aligned} E_{dB} &= \mu u_1 \frac{\partial u_2}{\partial y} \Big|_{y=0} \\ &= \frac{\mu}{2} \hat{u}_0^2 \cdot \text{Re} \left\{ \beta_1 \frac{H_0^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \sin \beta_1 y_s - \frac{\beta_2}{\beta_1 \sqrt{y_s}} H_1^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \cos \beta_1 y_s}{H_0^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \cos \beta_1 y_s + \frac{\beta_2}{\beta_1 \sqrt{y_s}} H_1^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \sin \beta_1 y_s} \right. \\ &\quad \left. - \beta_1^2 \frac{\int_0^{y_s} \left(\frac{U}{C} \right) \left\{ H_0^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \cos \beta_1 (y_s - \xi) + \frac{\beta_2}{\beta_1 \sqrt{y_s}} H_1^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \sin \beta_1 (y_s - \xi) \right\}^2 d\xi}{\left\{ H_0^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \cos \beta_1 y_s + \frac{\beta_2}{\beta_1 \sqrt{y_s}} H_1^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \sin \beta_1 y_s \right\}^2} \right\} \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

$\hat{u}_0$ は次式で与えられる。

$$\hat{u}_0 = \frac{H}{2} \cdot \frac{m(C-U_0)}{\sinh mh} F_1(0) \dots\dots\dots (29)$$

$$F_1(0) = \frac{1}{1 + \frac{U_*}{\kappa m} \int_{y_s}^h \frac{\sinh m(h-t) \sinh mt}{\{C-U_0-(U_*/\kappa) \ln(t/h)\} t^2 \sinh mh} dt} \dots\dots\dots (30)$$

ここに, H は波高。

したがって, 波高変化は C_g を群速度として

$$\frac{d}{dx} (E \cdot C_g) = -E_{dB} \quad E = \frac{1}{8} \rho g H^2 \dots\dots\dots (31)$$

に式 (28), (29) を代入して, $x=0$ で $H=H_0$ として次のように表わされる。

$$H = H_0 e^{-\alpha_1 x} \quad \alpha_2 = G_2 / C_g \dots\dots\dots (32)$$

$$\begin{aligned} G_2 &= \frac{\nu}{2g} \left\{ \frac{m(C-U_0) F_1(0)}{\sinh mh} \right\}^2 \text{Re} \left\{ \beta_1 \frac{H_0^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \sin \beta_1 y_s - \frac{\beta_2}{\beta_1 \sqrt{y_s}} H_1^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \cos \beta_1 y_s}{H_0^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \cos \beta_1 y_s + \frac{\beta_2}{\beta_1 \sqrt{y_s}} H_1^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \sin \beta_1 y_s} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{y_s} \left(\frac{U}{C} \right) \left\{ H_0^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \cos \beta_1 (y_s - \xi) + \frac{\beta_2}{\beta_1 \sqrt{y_s}} H_1^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \sin \beta_1 (y_s - \xi) \right\}^2 d\xi \right\} \\ &\quad \left. \frac{\left\{ H_0^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \cos \beta_1 y_s + \frac{\beta_2}{\beta_1 \sqrt{y_s}} H_1^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \sin \beta_1 y_s \right\}^2}{\left\{ H_0^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \cos \beta_1 y_s + \frac{\beta_2}{\beta_1 \sqrt{y_s}} H_1^{(1)}(2\beta_2 \sqrt{y_s}) \sin \beta_1 y_s \right\}^2} \right\} \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

前報で得た α を α_1 とすれば, 結局, 流れを遡上する波の波高減衰率 α は

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \dots\dots\dots (34)$$

で表わされることになる。

3. 実 験

実験装置および方法は前報同様である。実験時の水深は 10~15 cm, 流速は 6~30 cm/sec, 波の周期は 0.85~1.25 sec, 波高は 1~4 cm の範囲で, 水温は 13~16°C

..... (27)

式 (6), (7) より, 式 (27) は次のように変形される。

$$\begin{aligned} E_{dB} &= - \int_0^\delta u_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho N \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) dy \\ &\quad - \int_0^\delta u_2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) u_2 dy \end{aligned}$$

第2項は周期性から消え, 第1項を部分積分して

$$\begin{aligned} &= - \left[u_1 \cdot \rho N \frac{\partial u_2}{\partial y} \right]_0^\delta \\ &\quad + \int_0^\delta \rho N \cdot \frac{\partial u_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial y} dy \end{aligned}$$

第2項は 0, $\partial u_2 / \partial y|_{y=\delta} \approx 0$ より, 結局 E_{dB} は次式で表わされる。

である。

4. 実験結果ならびに計算結果の検討

流れの場で波高が指数関数的に減衰することは, 順流の場合には Inman & Bowen により, 逆流の場合については中村, 佐々木によって実験的に指摘されているが, 今回の実験結果について片対数紙にプロットしてみるとほぼ直線上にのっており, 波高変化が指数関数的であ

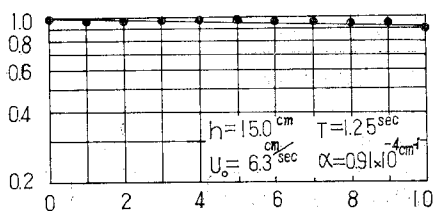
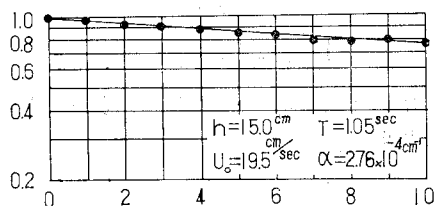
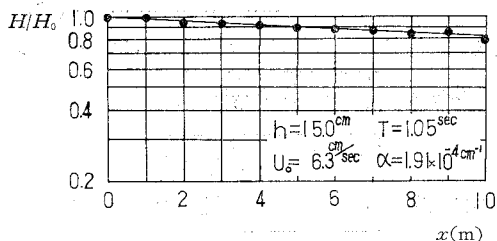


図-3

る、とみなせることが確かめられた(図-3)。

次に、波高減衰率 α が流速の増大とともにどのように変化するかを見るために、流れが無いときの波速 C_0 、波長 L_0 によって無次元化し、横軸に U_0/C_0 、縦軸に $L_0\alpha$ をとり計算例を図-4~6に示した。 α は動粘性係数 ν に関連しているわけだが、ここでは実験時の平均水温 15°C に固定して考える。

この計算例から流速が増大すると波高の減衰が激しくなることがわかる。また、境界摩擦に関する α_2 はあまり流速の変化によって変わらないが、内部摩擦に関する α_1 は流速が小さいときには α_2 にくらべて無視しうけれども U_0/C が $-0.2 \sim -0.3$ あたりからその増大のし

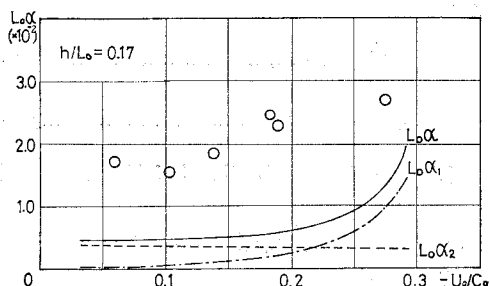


図-4

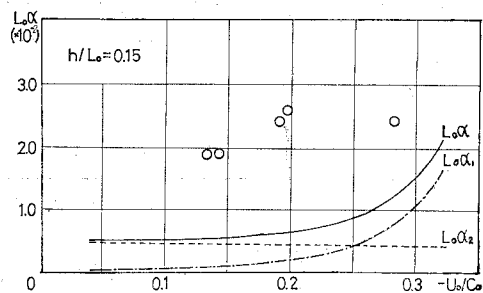


図-5

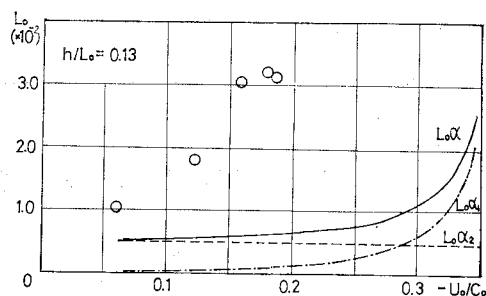


図-6

かたがかなり顕著になり、流速が大きくなると波高減衰率が增大するのは内部摩擦による波エネルギーの逸散の増大によるものであることを示している。

実験結果はデータが不十分で明確ではないが、この計算結果を反映しているものと思われる。なお、計算値と実験値の差異は、主として境界層の扱いにおいて波による乱れを無視していることによるものと考えられる。

境界層での流速分布の計算値を図-7に示す。分布形が $y=y_s$ で折れたようになっているのは流速分布を式(14)、(15)のように与えたことによるものである。

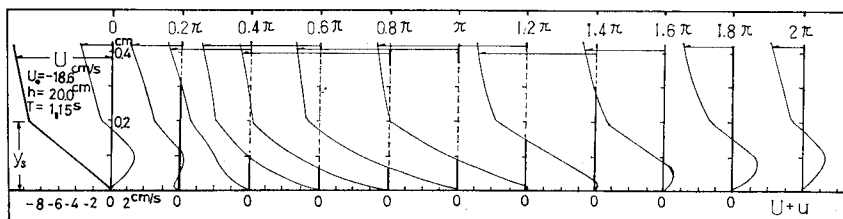


図-7

5. あとがき

流れを遡る波の境界層について、流れの渦動粘性のみを考慮して計算を行ない、前報で得たものと合わせ流れを遡る波の減衰機構に関し若干の考察を加えてみた。

流れに重なった波の境界層の性質を明らかにしていくことは砂の移動の問題とも関連し望まれる。ここで行った計算は境界層での乱れに関し波による効果を無視した扱いであり、特に乱流境界層を形成するような波に対

しては、十分に実際を表現しうるものではないと思われるが、今後、波と流れの共存系での乱流構造の実態を実験的に調べつつ改良していきたいと思う。

参 考 文 献

- 1) 岩崎敏夫・佐藤道郎：流れを遡る波のエネルギーの減衰について，第17回海岸工学講演会論文集，1970.
- 2) Inman & Bowen：Flume experiments on sand transport by waves and currents, Proc. 8th Conf. Coastal Engineering, 137-150, Mexico, 1962.
- 3) 中村充・白石英彦・佐々木泰雄：流れと波による砂移動について (II)；第17回海岸工学講演会論文集，1970.