

汚染物質拡散の数値解法について(その 2)

堀 口 孝 男*

1. は し が き

加速 Liebmann 法を適用して、ある初期濃度分布から数10 tidal cyclesにわたる拡散状況を検討することは前回において試みられた。今回の場合は、対象をやはり東京湾とし、湾内には人工島を2個所に置き、また河川から汚染を考慮することにして多摩川、隅田川、江戸川の3河川を同時に挿入している。このような地形を設定したのは、将来、東京湾に横断橋を計画し、ベースとなる人工島を設置した場合、物質拡散に対する大局的な推定をあらかじめ検討するためのものであり、また河川を含めたのは、河川と海域を一体として考えた場合の潮汐による拡散状況の推定を試みたものである。

ここで取扱った3河川は、河口密度流の分類からすれば緩混合型または緩混合型と強混合型の中間に位置するものとみなされるが、このような分類型には河水と海水の密度差による垂直安定度が関係してくるため、理論的には取扱いがなかなかむずかしい。このため、この数値計算では強混合型のように鉛直方向には濃度が一樣になるものとして計算を行なっている。

2. 計算方法

対象とする水域は東京湾と3河川があり、さらに湾内には人工島を設定しているのので、まず潮汐の計算を行なう必要がある。湾内の潮汐は elementary method を用い、次の運動方程式と連続方程式を差分化して求められる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial t} &= -g(h+\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\tau_b^{(x)}}{\rho_w} \\ &\quad + fM_y - (h+\zeta) \left\{ \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial(UV)}{\partial y} \right\} \\ \frac{\partial M_y}{\partial t} &= -g(h+\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\tau_b^{(y)}}{\rho_w} \\ &\quad - fM_x - (h+\zeta) \left\{ \frac{\partial(UV)}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} \right\} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

ここで、 x, y 軸は平均海面上に、 z 軸は鉛直下方を正にとる。 f は Coriolis の係数、 ρ_w は海水の密度、 τ_b は

海底の摩擦応力、 $z=h(x, y)$ は海底を表わし、 $z=-\zeta$ (x, y, t) は海面を示す。また M_x, M_y は

$$M_x = \int_{-\zeta}^h v dz = (h+\zeta)U$$

$$M_y = \int_{-\zeta}^h u dz = (h+\zeta)V$$

と表現される流量であり、 U, V は x, y 方向の平均流速を示すことになる。

河川の潮汐は時間ステップ Δt を湾と河川とも同一にしても、河川内の距離のステップ Δs を小さくとれること、後述する汚染物質の拡散計算において、河口の点における流量を河川を対象とする計算と湾を対象とする計算とにおいて同等の量にすることにより、同一の濃度を使用することができる、などの利点があるので characteristic method を用いることにした。characteristic method による方法は次のように表わされる。

dimensional value には*印をつけ、平均海面を x^* 軸として上流側にとり、 y^* 軸は鉛直上向きに正、水底を $y^*=-h^*$ 、水面を $y^*=\eta^*$ 、 b^* を河川の幅とする。運動方程式は

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + g^* \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} = -\frac{f|u^*|u^*}{\eta^*+h^*} \dots (2)$$

$$\text{ここで、 } f = \frac{g^* n^2}{(h^* + \eta^*)^{1/3}}$$

n : Manning の粗度係数

連続の方程式は

$$\frac{\partial \{(h^* + \eta^*)u^*b^*\}}{\partial x^*} + b^* \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} = 0 \dots (3)$$

式(2)、(3)の方程式を無次元化するため、 $x^*=l^*x$ 、 $c_0^*=\sqrt{g^*h_0^*}$ 、 $t^*=T^*t$ 、 $\eta^*=h_0^*\eta$ 、 $h^*=h_0^*h$ 、 $u^*=c_0^*u$ 、 $l^*=c_0^*T^*$ とおき、

$$c = \sqrt{h+\eta} = \frac{c^*}{c_0^*}, \quad \frac{1}{b^*} \frac{\partial b^*}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

と表わすならば、式(2)、(3)は無次元の方程式となり、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + 2c \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{fl^*}{h_0^*} \frac{|u|u}{c^2} \dots (4)$$

$$2 \frac{\partial c}{\partial t} + 2u \frac{\partial c}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -cu \frac{\partial B}{\partial x} \dots (5)$$

式(4)、(5)両式の和および差をつくり差分化すれば、

$$2 \left\{ (c_{ij} + u_{ij}) \frac{c_{ij} - c_{i,j-1}}{\Delta x} + \frac{c_{i+1,j} - c_{ij}}{\Delta t} \right\}$$

* 正会員 運輸省第二港湾建設局 京浜港工事事務所

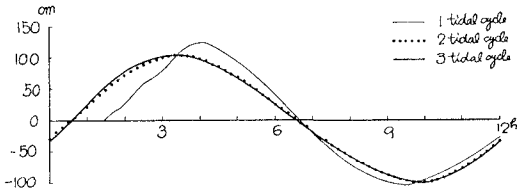


図 3 多摩川上流端の潮位変動

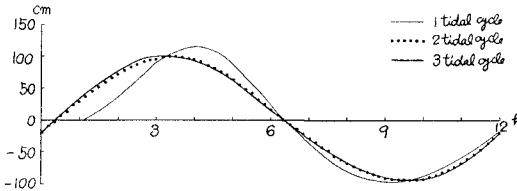


図-4 隅田川河口の潮位変動

行なう。湾内から計算が進行し河口の点において elementary method により水位が計算されると、式(7)を

$$\begin{aligned}
 A &= 1 + \frac{1}{4} \frac{1}{h_{ij}} (K_{ij+1} + K_{ij}) (h_{ij+1} + h_{ij}) \frac{\Delta t}{\Delta s^2} \\
 &\quad + \frac{1}{4} \frac{1}{h_{ij}} (K_{ij} + K_{ij-1}) (h_{ij} + h_{ij-1}) \frac{\Delta t}{\Delta s^2} \\
 &\quad + \frac{1}{4} \frac{1}{h_{ij}} (K_{i-1j} + K_{ij}) (h_{i-1j} + h_{ij}) \frac{\Delta t}{\Delta s^2} \\
 &\quad + \frac{1}{4} \frac{1}{h_{ij}} (K_{ij} + K_{i+1j}) (h_{ij} + h_{i+1j}) \frac{\Delta t}{\Delta s^2} \\
 B &= \frac{\Delta t}{2\Delta s} u_{ij}^{n+1} - \frac{1}{4} \frac{1}{h_{ij}} (K_{ij+1} + K_{ij}) (h_{ij+1} + h_{ij}) \frac{\Delta t}{\Delta s^2} \\
 C &= -\frac{\Delta t}{2\Delta s} u_{ij}^{n+1} - \frac{1}{4} \frac{1}{h_{ij}} (K_{ij} + K_{ij-1}) (h_{ij} + h_{ij-1}) \frac{\Delta t}{\Delta s^2} \\
 D &= \frac{\Delta t}{2\Delta s} v_{ij}^{n+1} - \frac{1}{4} \frac{1}{h_{ij}} (K_{i-1j} + K_{ij}) (h_{i-1j} + h_{ij}) \frac{\Delta t}{\Delta s^2} \\
 E &= -\frac{\Delta t}{2\Delta s} v_{ij}^{n+1} - \frac{1}{4} \frac{1}{h_{ij}} (K_{ij} + K_{i+1j}) (h_{ij} + h_{i+1j}) \frac{\Delta t}{\Delta s^2}
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

n : 時間のステップ, i, j : 距離のステップ

河川における拡散方程式は

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -u \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{b(h+\eta)} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ b(h+\eta) K \frac{\partial S}{\partial x} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

b : 河川の幅

となるから

$$\left. \begin{array}{l} A S_{ij}^{n+1} + B S_{ij+1}^{n+1} + C S_{ij-1}^{n+1} = S_{ij}^n \\ A S_{ij}^{n+1} + D S_{i-1j}^{n+1} + E S_{i+1j}^{n+1} = S_{ij}^n \end{array} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ここで

$$\begin{aligned}
 A &= 1 + \frac{1}{8} \frac{1}{b_{ij}(h+\eta)_{ij}} (K_{ij+1} + K_{ij}) (b_{ij+1} + b_{ij}) \{ (h+\eta)_{ij+1} + (h+\eta)_{ij} \} \frac{\Delta t}{\Delta s^2} \\
 &\quad + \frac{1}{8} \frac{1}{b_{ij}(h+\eta)_{ij}} (K_{ij} + K_{ij-1}) (b_{ij} + b_{ij-1}) \{ (h+\eta)_{ij} + (h+\eta)_{ij-1} \} \frac{\Delta t}{\Delta s^2}
 \end{aligned}$$

または

用いて河口の流速を算定する。これより河川の上流は式(8), (9)の characteristic method を使用する。湾内の格子網よりする河口では、流速は

$$U = \frac{b^*}{\Delta s} \cdot u^* \dots\dots\dots (11)$$

として換算され、流量は同一になるものとして扱っている。なお、河口に潮汐波が達するまでに河川から湾内に流入が続いているが、その値は湾内では水位、流速ともに mm, mm/sec の order であるから無視してさしつかえない。

汚染物質の拡散方程式は前回で示したものと同様で、implicit の解法で進める。すなわち、湾内では

$$\begin{aligned}
 A &= 1 + \frac{1}{8} \frac{1}{b_{ij}(h+\eta)_{ij}} (K_{i-1j} + K_{ij}) (b_{i-1j} + b_{ij}) \{ (h+\eta)_{i-1j} + (h+\eta)_{ij} \} \frac{\Delta t}{\Delta s^2} \\
 &\quad + \frac{1}{8} \frac{1}{b_{ij}(h+\eta)_{ij}} (K_{ij} + K_{i+1j}) (b_{ij} + b_{i+1j}) \{ (h+\eta)_{ij} + (h+\eta)_{i+1j} \} \frac{\Delta t}{\Delta s^2} \\
 B &= \frac{\Delta t}{2\Delta s} u_{ij}^{n+1} - \frac{1}{8} \frac{1}{b_{ij}(h+\eta)_{ij}} (K_{ij+1} + K_{ij}) (b_{ij+1} + b_{ij}) \{ (h+\eta)_{ij+1} + (h+\eta)_{ij} \} \frac{\Delta t}{\Delta s^2} \\
 C &= -\frac{\Delta t}{2\Delta s} u_{ij}^{n+1} - \frac{1}{8} \frac{1}{b_{ij}(h+\eta)_{ij}} (K_{ij} + K_{ij-1}) (b_{ij} + b_{ij-1}) \{ (h+\eta)_{ij} + (h+\eta)_{ij-1} \} \frac{\Delta t}{\Delta s^2} \\
 D &= \frac{\Delta t}{2\Delta s} v_{ij}^{n+1} - \frac{1}{8} \frac{1}{b_{ij}(h+\eta)_{ij}} (K_{ij} + K_{i-1j}) (b_{ij} + b_{i-1j}) \{ (h+\eta)_{ij} + (h+\eta)_{i-1j} \} \frac{\Delta t}{\Delta s^2} \\
 E &= -\frac{\Delta t}{2\Delta s} v_{ij}^{n+1} - \frac{1}{8} \frac{1}{b_{ij}(h+\eta)_{ij}} (K_{ij} + K_{i+1j}) (b_{ij} + b_{i+1j}) \{ (h+\eta)_{ij} + (h+\eta)_{i+1j} \} \frac{\Delta t}{\Delta s^2}
 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (16)$$

で示される。式(12)、(15)の解法には前回同様、加速 Liebmann 法を適用して逐次近似を行なう。この場合、加速 parameter は $\alpha=1.4$ としている。計算の収束は $(\nu+1)$ 次近似と ν 次近似の差 ${}^{\nu}R_{n+1}{}^{ij}$ が $|{}^{\nu}R_{n+1}{}^{ij}| < 10^{-5}$ のとき収束したものとしている。

河口における計算は次のようにして行なった。河川の拡散方程式を図-5のごとく河口の (ij) 点に適用すれば、

$$A S_{ij}^{n+1} + D S_{i-1j}^{n+1} + E S_{i+1j}^{n+1} = S_{ij}^n \dots\dots\dots (17)$$

ここで S_{i+1j}^{n+1} は図中の仮想点の濃度をさし、次式で表わしている。

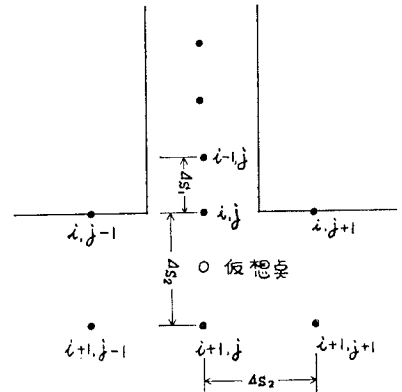


図-5 河口における格子点

$$\begin{aligned}
 S_{i+1j}^{n+1} &= S_{ij}^{n+1} - \left[S_{ij}^{n+1} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{S_{ij}^{n+1} + S_{ij-1}^{n+1} + S_{i+1j-1}^{n+1} + S_{i+1j}^{n+1}}{4} + \frac{S_{ij}^{n+1} + S_{ij+1}^{n+1} + S_{i+1j+1}^{n+1} + S_{i+1j+1}^{n+1}}{4} \right\} \right] \frac{2\Delta s_1}{\Delta s_2} \\
 &= \frac{2\Delta s_2 - 3\Delta s_1}{2\Delta s_2} S_{ij}^{n+1} + \frac{S_{ij-1}^{n+1} + S_{i+1j-1}^{n+1} + S_{i+1j+1}^{n+1} + 2S_{i+1j}^{n+1}}{4} \frac{\Delta s_1}{\Delta s_2}
 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで、 Δs_1 は河川の格子距離、 Δs_2 は湾内の格子間距離を示す。式(18)を式(17)に代入して逐次近似の形で表わせば

$$A {}^{\nu+1}S_{ij}^{n+1} + D {}^{\nu+1}S_{i-1j}^{n+1} + E \cdot \frac{2\Delta s_2 - 3\Delta s_1}{\Delta s_2} {}^{\nu}S_{ij}^{n+1} + E \frac{{}^{\nu}S_{ij-1}^{n+1} + {}^{\nu}S_{i+1j-1}^{n+1} + {}^{\nu}S_{i+1j+1}^{n+1} + 2 {}^{\nu}S_{i+1j}^{n+1}}{4} \cdot \frac{\Delta s_1}{\Delta s_2} = S_{ij}^n \dots\dots\dots (19)$$

ここで、 ${}^{\nu}S_{ij}^{n+1}$ は加速 Liebmann 法の近似から

$${}^{\nu+1}S_{ij}^{n+1} = {}^{\nu}S_{ij}^{n+1} + \alpha {}^{\nu}R_{ij}^{n+1} \dots\dots\dots (20)$$

となり、式(20)を式(19)へ代入して ${}^{\nu}S_{ij}^{n+1}$ を置換するとき、残差 ${}^{\nu}R_{ij}^{n+1}$ は通常正負に繰返して現われるものであるから、これに1より大きい加速 parameter が作用することは収束をむしろ遅らせるような作用を起こす。このため、河口の点においては $\alpha=1.0$ として Gauss-Seidel 流の計算を行なっている。

その他、湾の境界における計算方法、拡散係数、物質総量保存のための smoothing など前回と同様に取扱っている。計算の収束条件は行和判定条件、列和判定条

件いずれを使用しても、湾内における B,C,D,E の各係数の絶対値は 0.2 程度以下にとどめる必要がある。河川においては B,C もしくは D,E と方程式に含まれる係数の数は減少してくるが、この場合にあってはやはり 0.2 程度以下になるように Δt , Δs を流速に対して選定することが必要で、そうでないときは計算の途中で収束しなくなることがある。これは収束条件が十分条件であるため、拘束性が不足していることに起因するものと考えられる。

3. 計算結果の検討

今回の計算では汚染源は点源とし、湾内では濃度単位

で 0.01, 河川では江戸川, 隅田川で 0.008, 多摩川で 0.004 の量が Δt sec ごとに継続的に増加するものとした。湾内の汚染源は京浜工業地帯と京葉工業地帯の前面に設定し, 河川では江戸川, 隅田川に関し河口より 8 000 m の付近に置いて湾内への流下を検討し, 多摩川では上流端より 4 000m の付近に置いて河川内の変動と湾内から河川への流入がどのようになるかを検討している。計算は 7 tidal cycles ぐらいで汚染物質が湾口に達するので, 10 tidal cycles で打ち切っている。拡散計算に使用した諸元は $\Delta t=600$ sec, 湾内の $\Delta s=3\ 000$ m, 江戸川, 隅田川の $\Delta s=1\ 600$ m, 多摩川の $\Delta s=800$ m, 河川内の拡散係数は河口では湾の境界と同じ値 $K=10\ 000$ (C.G.S 単位) をとり, それより上流には線型的に減少させて $K=1\ 000$ (C.G.S 単位) となるようにしている。

図-6, 図-7 は 5 tidal cycles 近傍で, 6 時間の間隔をへだてた湾内の拡散状況を示したものである。図からみると京浜工業地帯前面からの拡散性はかなり大きく, それに比して京葉工業地帯の汚染は停滞的であり, 人工島の影響がいくぶん現われているようである。河川からの影響は江戸川, 隅田川とともに同様な傾向を示しており, 多摩川はむしろ京浜工業地帯からの拡散域のなかに含まれ, 河川内に侵入する結果となる。

図-8 はほぼ 5 tidal cycles を経過したときの多摩川の濃度分布を示したもので, 横軸は河口から上流端までの距離を表わし, 縦軸は濃度単位を示している。横軸に記入されている数字は, 汚染点源における Δt sec ごとの濃度増加を表わしたものである。多摩川の流速はゲートを閉じている関係から値が小さいので, 濃度の peak

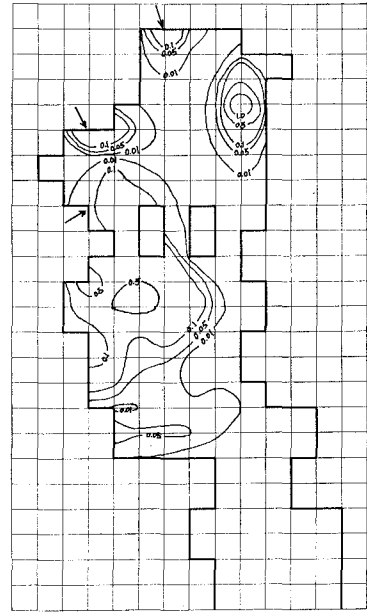


図-7 湾内の拡散, 60 hour (5 Tidal Cycles)

はあまり大きな移動を生じていない。河口寄りの濃度は湾内から流入してきたもので, 河川内の濃度と結びついて図のように表現されている。

一方, 江戸川, 隅田川は汚染点源に同じ条件を付しており, また流速も多摩川に比して同程度に大きいので, 拡散現象はまったく同様な傾向を表わす結果となった。

図-9 は両河川のうち隅田川を例にとって示したもので, 上げ潮によりもっとも上流まで汚染物質がさかのぼ

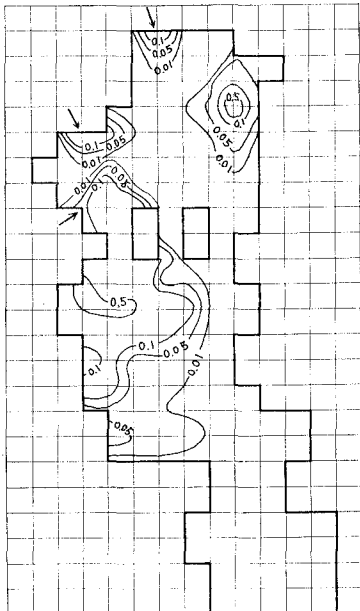


図-6 湾内の拡散 54 hour (4.5 Tidal Cycles)

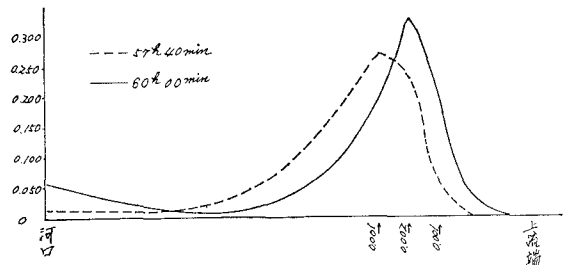


図-8 多摩川の濃度分布

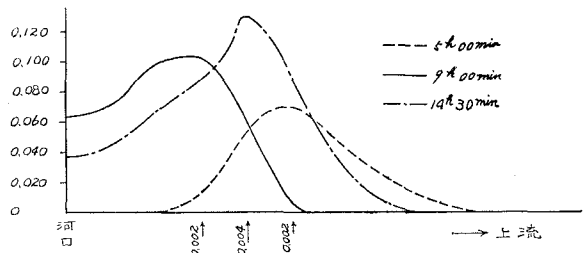


図-9 隅田川の濃度分布

り(5時間の経過), 下げ潮によって下流に流下して一部湾内へ流入し(9時間の経過), 再び上げ潮で上流に移動する現象を示したものである。なお, 図-8 の縦軸, 横軸は図-8 と同じ表現をしており, ただ点源からの増加量が異なっているだけである。

4. む す び

前回と今回における計算条件の設定により, 現在, 実現の可能性がある港湾計画などを含めた地形条件に関して, 大局的な拡散現象を推定する方法はある程度検討されたものと考えられる。これらの計算では計算費用を節減するため, Δt , Δs などを可能なかぎり大きくとっているが, 本格的な港湾計画, 地域開発計画などを検討するときは, 費用の許すかぎり小さ目にとることが望まし

い。これは点源から汚染物質が継続的に排出されるとき, その周辺で濃度単位がきわめて大きくなるので, Δt , Δs が大きいと拡散の状況がとび過ぎて必ずしも適切な表示とはならないからである。

この計算は前回同様 I. B. M. 360-75 を使用している。計算にあたっては資料の整理, 図化, 計算方法の比較などに関し, 横浜調査設計事務所調査課職員 平出友信君の協力を受けている。

参 考 文 献

- 1) 堀口孝男・高隆二: 湾および河川網に侵入する津波の計算, 第12回海岸工学講演会講演集, 1965.
- 2) 堀口孝男: 汚染物質拡散の数値解法について, 第16回海岸工学講演会講演集, 1969.
- 3) 森口繁一・高田勝: 数値計算法 I, II, 現代応用数学, 岩波書店, 1957.