

# 流水中の重力拡散

首 藤 伸 夫\*

## 1. 緒 言

水平方向に流れている塩水中へ、水底より鉛直上向きに淡水が放出された場合の拡散希釈の現象を取扱かう。淡水は放出時の初速および密度差のため鉛直上方に上昇しようとするが、周囲水が水平方向に動いている影響をうけて、放出水の経路はしだいに水平方向にと曲げられていく。放出された淡水は、このような経路をたどりながら、塩水と混合し、その比重は重くなっていく。もし、放出水中に、放出水の運動とは関係のないオーダーで何かの物質が入っていたとすると、物質濃度の低減は、密度差の低減と等しい。

放出水と周囲水の混合を支配する主な原因は、放出口近辺では、この両水間に存在する速度差であろう。この速度差によって起された乱れが混合の様子を決定する。混合が進むにつれ、放出初速および密度差の影響は小さくなり、周囲水中にもともと存在している乱流の影響の方が大きくなるに違いない。本論文の対象は放出口の近辺で、周囲水中の乱流がそれほど問題とならない場所での拡散希釈である。

Fan<sup>1)</sup> は、この種の実験をきわめて広範囲にわたって行なっている。理論的解析にあたっての Fan の考え方は Morton<sup>2)</sup> 等の考え方によっている。すなわち、放出水と周囲水の混合は、この両水間に存在する速度差に比例するとおく。ある地点での放出水の平均速度の方向は、放出水脈の中心軸の接線方向に平行である。一方、周囲水の方は水平方向に動いている。この両水の速度のベクトル差に比例して混入が生ずるとした。このとき、混入係数  $\alpha$  が実験によってきめられるべき定数として残る。また、放出水に対する運動の方程式をたてるにあたっては、放出水を柱にみたて、これに働く力を抗力係数  $C_d$  を介して想定した。 $C_d$  の値は、実験値からきめられる。この Fan の扱いでは、解析的な解をうることができず、さまざまな  $\alpha$  および  $C_d$  の組合せに対して数値解をもとめておき実験値と比較するという面倒な手続きをふまねばならなかった。

Slawson and Csanady<sup>3)</sup> は、煙突の煙の経路に対し、Fan の仮定よりもっと簡単な仮定より出発することとし

た。すなわち、混合希釈の主原因は、放出水のもっている密度差であり、この密度差によって生ずる鉛直方向流速に比例した混入が生ずるとおく。これももちろん、Morton 等の仮定の一変形であることには変わりがない。この仮定にしたがうと簡単な解析解がえられ、経路に関しては十分な説明をあたえるといわれている。

本論文は Slawson 等の立場をとり、これをさらに拡張しようとするものである。放出水の経路のみならず、放出水の幅や厚さ、放出水の密度変化まで説明することを試みた。実験によってきめるべき定数は混入係数  $\alpha$  だけではない。実際の放出口位置とは異なった場所に仮想原点を想定した。仮想原点をもちこむことにより、放出初速の影響および解析にあたっての仮定が成立しない領域での混合の影響を、この仮想原点のなかに入れてしまうこととした。仮想原点の位置は、実験的に決定される。

## 2. 理論的取扱い

放出水内での速度分布および密度分布は、実は簡単ではない。実測例を図-1 に示す。この例は簡単な方であって、放出口をもっと離れると、非常に複雑になる。理論解析にあたっては、放出水脈の断面は円形であり、密度および速度の分布形状は帽子型であるとする。ガウス分布であるとの想定もよく行なわれているが、対象とする密度差や速度差が断面内での最大値（放出水脈の軸上での値）のみであり、また分布形状がどの断面でも相似であれば、分布形状の差は大きな問題ではない。単に混入係数の値に影響するだけである。

周囲水の水平流速  $U$  は時間的空間的に一様であるとす。

放出水の軸に沿った長さを  $S$  とし、これに沿った接線流速を  $U_j$ 、放出水脈の断面の径を  $D$  とする。軸方向の流量は  $\pi D^2 U_j / 4$  だが、これの変化は  $|U_j - U|$  に比例する混入量  $\pi D \alpha |U_j - U|$  によって生ずる。したがって、

$$\frac{d}{dS} (\pi D^2 U_j) = 4 \pi D \alpha |U_j - U|$$

が流量の連続を示すことになる。放出水の軸がかなり水平に近いと仮定すると、 $U_j$  の水平成分は周囲水の流速  $U$  にほぼ等しく、速度差は鉛直方向流速  $w$  のみが寄与して生ずる。このとき、

\* 正会員 中央大学助教授 理工学部土木工学科

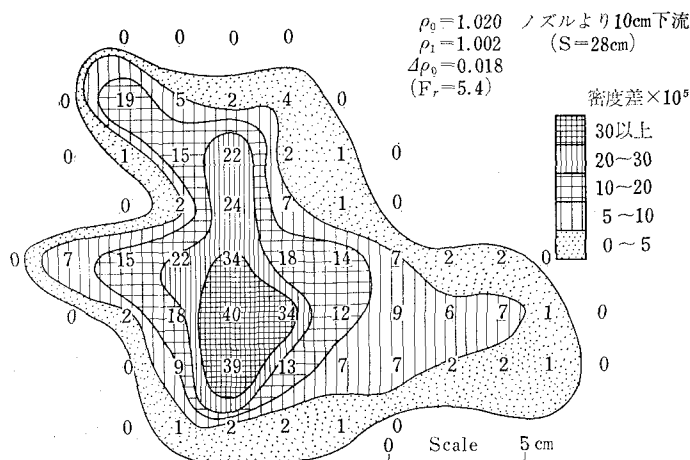


図-1 密度分布の実測例

$$U \frac{d}{dx} (D^2) = 4\alpha Dw \quad \dots\dots\dots (1)$$

で近似される。

同様の仮定のもとで考えると、水平方向の運動量の連続の式は無視してよく、鉛直方向に関しては、

$$U \frac{d}{dx} (D^2 w) = \frac{4\rho}{\rho} g D^2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

が成立する。密度差の連続（あるいは物質量の連続）から、

$$\frac{d}{dx} (UD^2 \Delta \rho) = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

が、また放出水の経路をきめる式として、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{U} \quad \dots\dots\dots (4)$$

が与えられる。ここで、 $\alpha$ は混入係数、 $U$ は周囲水の水平流速、 $w$ は放出水の鉛直流速、 $\rho$ は密度、 $4\rho$ は密度差、 $g$ は重力の加速度、 $D$ は放出水の断面の径、 $x, y$ は座標系で通常のようにとる。

式(3)から

$$UD^2 \frac{4\rho}{\rho} g \equiv w_0 D_0^2 \frac{4\rho_0}{\rho} g \equiv \text{const.} = F \quad \dots\dots\dots (5)$$

がえられる。つまり、運ばれていく密度欠損の総量は変化しないことを意味する。ここで、 $w_0$ は放出初速、 $D_0$ は放出口の径、 $4\rho_0$ は放出時の密度差である。

式(5)を式(2)に代入し、 $D^2 = A$ として、式(1)、(2)を連立させて解くと、

$$\frac{1}{3} A^{3/2} = \alpha \frac{U}{F} (Aw)^2 + \text{const} \quad \dots\dots\dots (6)$$

がえられる。仮想原点では  $A=0$  となるので、

$$w = \sqrt{3\alpha^{-1/2} \left( \frac{F}{U} \right)^{1/2}} A^{-1/4} \quad \dots\dots\dots (7)$$

をうる。これを式(1)に入れて

$$D = 3^{1/3} \alpha^{1/3} \left( \frac{F}{U^3} \right)^{1/3} (x - x_0)^{2/3} \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。 $x_0$ は仮想原点の位置を示している。これは、さらに

$$\frac{D}{l} = 3^{1/3} \alpha^{1/3} \left[ \frac{x}{l} - \frac{x_0}{l} \right]^{2/3} \quad \dots\dots\dots (9)$$

と書きなおすことができる。ここで  $l$  は、

$$\begin{aligned} l &= \frac{F}{U^3} = \frac{1}{U^3} w_0 D_0^2 \frac{4\rho_0}{\rho} g \\ &= \frac{w_0}{U} D_0 \frac{\frac{4\rho_0}{\rho} g D_0}{U^2} = k D_0 F_{ru}^{-2} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

で表わされる特性長である。 $k=w_0/U$ は速度比、 $F_{ru}$ は  $U$ を用いたフルード数である。また  $kF_{ru}=F_{rw_0}$ で、 $w_0$ をもちいたフルード数である。

式(7)、(8)から

$$w = 3^{-2/3} \alpha^{-2/3} F^{1/3} (x - x_0)^{-1/3} \quad \dots\dots\dots (11)$$

であるので、これを式(4)に入れ経路をとくと、

$$\frac{y - y_0}{l} = \frac{3^{1/3}}{2} \alpha^{-2/3} \left[ \frac{x - x_0}{l} \right]^{2/3} \quad \dots\dots\dots (12)$$

が経路をあたえる式となる。

希釈率は式(5)、(8)を使って、

$$\begin{aligned} \frac{4\rho}{4\rho_0} &= \frac{w_0}{U} \frac{D_0^2}{D^2} = \frac{w_0}{U} \frac{D_0^2}{3^{2/3} \alpha^{2/3} l^{2/3} (x - x_0)^{4/3}} \\ &= 3^{-2/3} \alpha^{-2/3} k \cdot \frac{F_{ru}^{4/3} D_0^2}{k^{2/3} D_0^{2/3} (x - x_0)^{4/3}} \\ &= 3^{-2/3} \alpha^{-2/3} k^{1/3} F_{ru}^{4/3} \left[ \frac{x - x_0}{D_0 - D_0} \right]^{-4/3} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる。

### 3. 実験装置と実験方法

実験は中央大学理工学部水理実験室の長さ 7.6m、幅 1.2m、深さ 0.6m の水路で行なった。この水路の下部には、同長同幅の深さ 1.0m の塩水タンクがついている。この塩水タンクから高水槽に塩水をポンプで汲みあげ、水路の始端にパイプで導びく。このパイプ路の中間にベンチュリー管をつけ流量の測定を行なうことができるようになっている。水路に入った塩水は整流装置を通過してながれる。水深の調節は他端のゲートで行なわれる。流入端から 2.8m の場所の水路中央の水底から淡水が連続放出される。放出水量の調節は定ヘッド・タンクによった。

実験中の水深は 39cm であった。

周囲水の流速は、ベンチュリー管による流量測定、サーミスター流速計による流速測定、表面浮子の写真測定

によってきめた。サーミスター流速計による流速分布の例を図-2に示す。サーミスター流速計による測定は、水路横断方向に間隔10cmごとに11個の測点をもうけ、各測点では深さ方向に5点(水底より5cm, 10cm, 20cm, 30cm, 35cm)の位置で測定した。各点での測定では読取時間間隔は2secとし、60個の測定値を読み取り、これを平均することにした。この60個の読取値の最大値最小値の差は、最大で1cm/sec程度であった。サーミスター流速計による流速測定値から流量を算定すると、ベンチュリー管による流量よりも常に大きなものとなった。したがって、平均流速としてはベンチュリー管による値を採用し、サーミスター流速計の値は水路内の流速分布が一樣になるように整流装置の調節を行なうためにのみ使用した。

放出水の経路をきめるためには、水路横および上方からの写真測定によった。放出水中にはウォーター・ブルーを混入しておいた。

希釈率の測定には、蛍光度および電導度の測定を行った。放出水中に蛍光染料(ローダミンB)を入れておき、放出水脈の軸線上と思われる点から、ピペット、およびサイフォンで採水した。ピペットでは瞬間的な採水、サイフォンでは連続的な採水が行なわれたことになる。採水された試料の蛍光度測定にはターナー社のⅢ型蛍光度計を使用した。電導度は、東亜電波製のDM-3型を使用して測定した。

本論文の実験値、および本論文で使用したFanの実験値の範囲は次のとおりであった。

$$\Delta\rho_0/\rho=0.001\sim0.148$$

$$D_0=0.5\sim1.0\text{ cm}$$

$$k=3\sim16$$

$$F_{ru}=0.45\sim10$$

$$F_{rw_0}=1.3\sim40$$

$$R_e=\frac{w_0 D_0}{\nu}=640\sim18\,000$$

## 4. 実験結果

### (1) 放出水の経路

放出水の経路を、Fanの実験値を使い、 $y/l$ と $x/l$ の関係として示すと図-3のとおりとなる。放出口のごく近くでは、放出初速の影響が残っており、しかも放出水脈の軸が水平に近いという仮定が成立しないので、当然式(12)のような関係はなりたたない。まず鉛直に近く急上昇し、しだいにまげられて、ついには $2/3$ 乗則にしたがうのが、図-3からみられるであろう。しかも、 $2/3$ 乗則に到達するまでの経路は、 $F_{ru}$ ごとくことになっている。 $F_{ru}$ は、周囲水の水平流速と放出水の浮力とが放出水経路におよぼす効果の比とみなしてよい。仮想原点は $F_{ru}$ の関数として与えられるであろう。数回の試行の結果、簡単な表現でしかも実験点のバラツキを少なく表示するためには、

$$y_0=0, \quad \frac{x_0}{l}=-0.7F_{ru}^3 \dots\dots\dots (14)$$

とおけばよいことがわかった。

このような仮想原点を入れて整理しなおすと、図-4をうる。放出水経路は

$$\frac{y}{l}=1.5\left[\frac{x}{l}+0.7F_{ru}^3\right]^{2/3} \dots\dots\dots (15)$$

で与えられる。これは、

$$\frac{y}{D_0}=1.5k^{1/3}F_{ru}^{-2/3}\left[\frac{x}{D_0}+0.7F_{rw_0}\right]^{2/3} \dots\dots\dots (I)$$

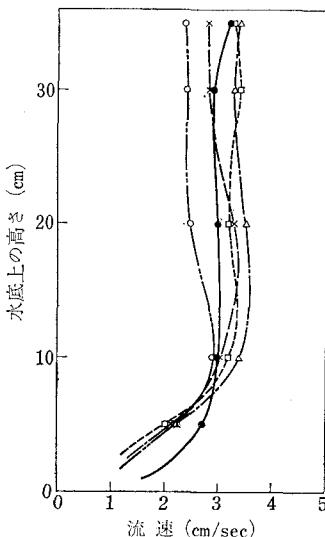


図-2 流速分布の実測例

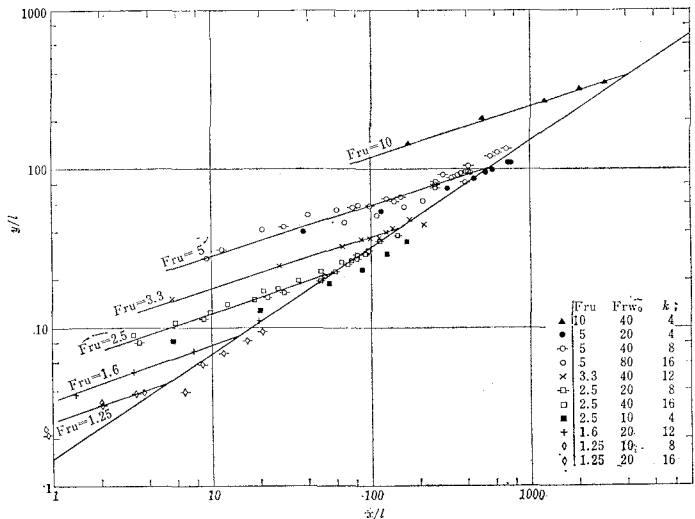
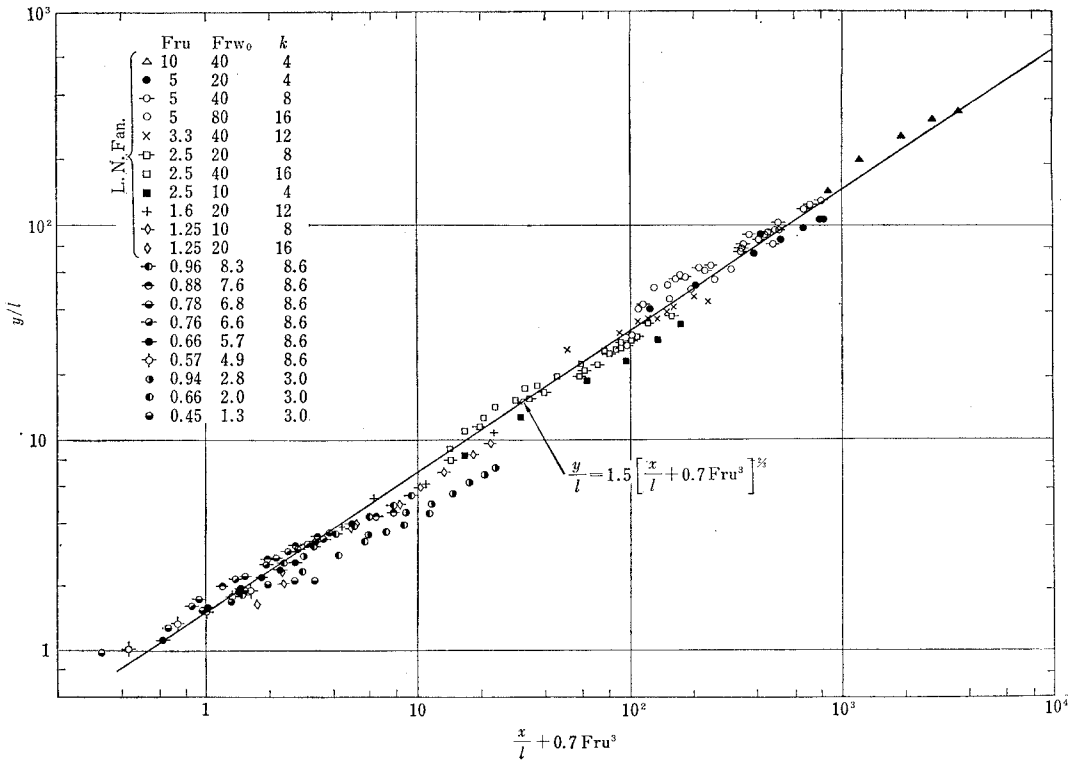


図-3 移出水の経路



図—4 放出水の経路(仮想原点を考えに入れたもの)

とも書ける。仮想原点の表示のかきかえは、次の項に示されている。

## (2) 希釈率

希釈率は、式(13)で与えられる。仮想原点の表示を書きなおすと、

$$\begin{aligned}
 -\frac{x_0}{D_0} &= -\frac{x_0}{l} \frac{l}{D_0} = 0.7 Fru^3 \cdot k Fru^{-2} \\
 &= 0.7 \frac{w_0}{U} Fru = 0.7 \frac{w_0}{U} \frac{U}{\sqrt{\frac{\Delta \rho_0}{\rho} g D_0}} \\
 &= 0.7 \frac{w_0}{\sqrt{\frac{\Delta \rho_0}{\rho} g D_0}} = 0.7 Fru w_0
 \end{aligned}$$

である。

図—5に実験値を示すが、図中の実線は実験式

$$\frac{\Delta \rho_0}{\Delta \rho} = k^{1/3} Fru^{4/3} \left[ \frac{x}{D_0} + 0.7 Fru w_0 \right]^{-4/3} \dots (II)$$

を表わしている。

## (3) 放出水の幅

放出水の幅  $b$  は、鉛直上方より撮影した写真にうつっている放出水の外縁によってきめた。もし、放出水が円形断面をしているものとする、これは断面の径に相当する。図—6は実験結果であるが、図中白い実験点はまだ水表面に到達していないもの、黒く塗った実験点は水表面に到達後のものである。

水表面に到達するまでは

$$b \propto x^{2/3}, \dots (16)$$

到達後は

$$b \propto x \dots (17)$$

であることがわかる。式(17)は、放出点近くでの水平乱流拡散の結果と同じである。

水表面到達前の実験結果は、

$$\frac{b}{l} = \left[ \frac{x}{l} + 0.7 Fru^3 \right]^{2/3} \dots (18)$$

で与えられる。これは、また、

$$\frac{b}{D_0} = k^{1/3} Fru^{-2/3} \left[ \frac{x}{D_0} + 0.7 Fru w_0 \right]^{2/3} \dots (III)$$

ともかける。

## (4) 放出水の厚さ

横方向から撮影した写真上で、放出水脈の軸に垂直にはかった放出水外縁間の距離を放出水の厚さ  $h$  とする。図—7は実験結果である。白印、黒印の意味は前項とおなじである。表面到達後、厚さは一時減少し、約6割に減ずると、その後はほぼ一定値となる。

水表面到達前の実験結果は、

$$\frac{h}{l} = 0.8 \left[ \frac{x}{l} + 0.7 Fru^3 \right]^{2/3} \dots (19)$$

とも、また、

$$\frac{h}{D_0} = 0.8 k^{1/3} Fru^{-2/3} \left[ \frac{x}{D_0} + 0.7 Fru w_0 \right]^{2/3} \dots (IV)$$

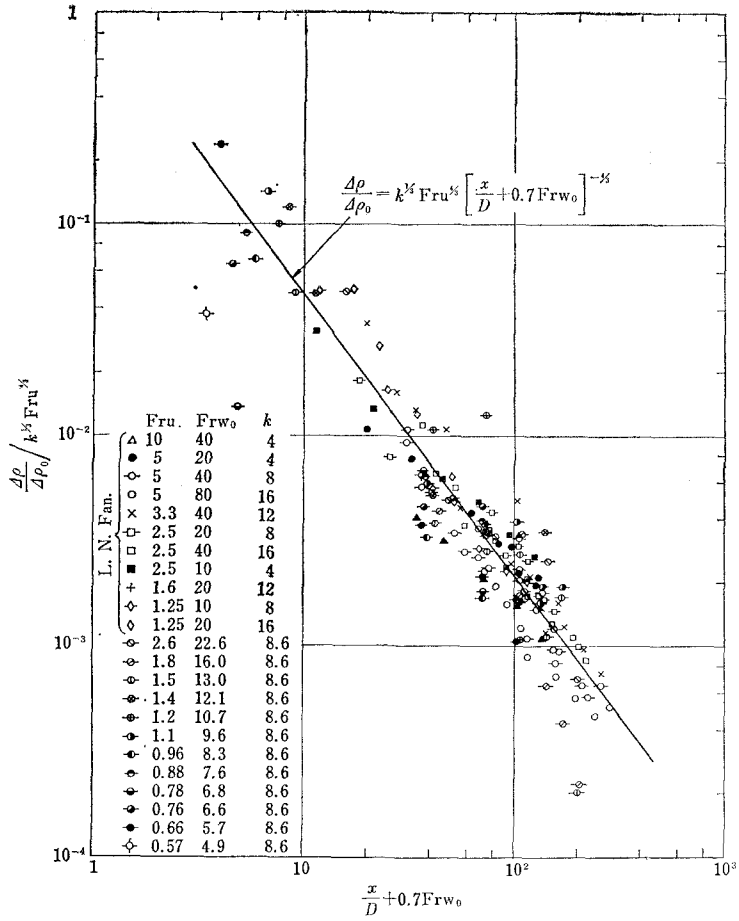


図-5 希釈率

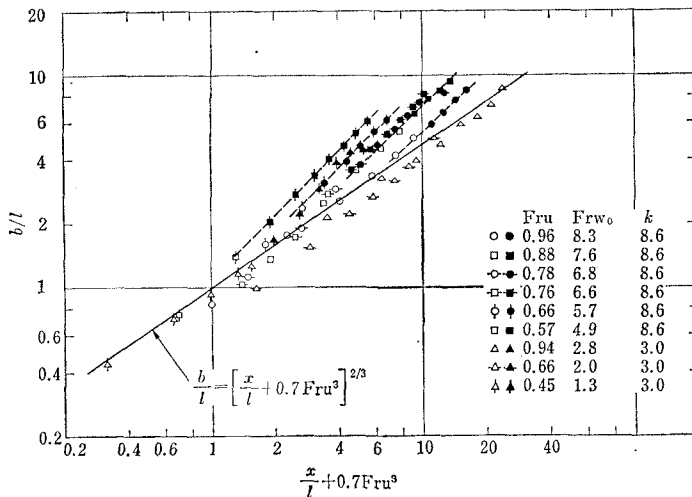


図-6 放出水の幅

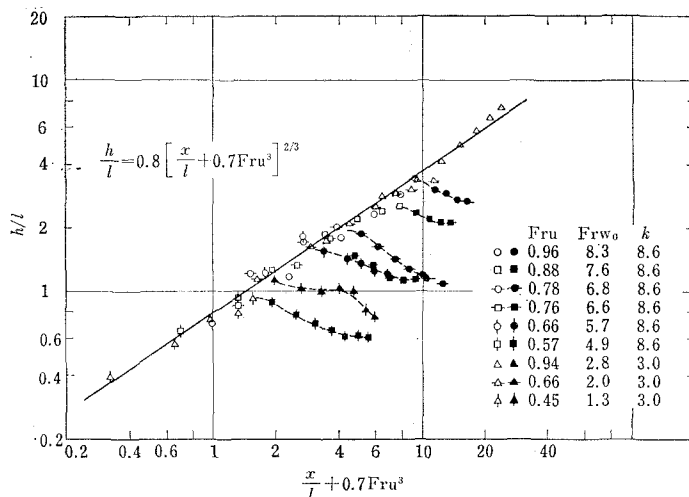


図-7 放出水の厚さ

とも、表わされる。

#### (5) 混入係数 $\alpha$

式(12)と式(15), 式(13)と式(II), 式(9)と式(18)または式(19)の係数をくらべると, 混入係数 $\alpha$ の値をきめることができる。その結果

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 0.33 \text{ (経路, 希釈率, 幅より)} \\ \alpha &= 0.17 \text{ (厚さより)} \end{aligned} \right\} \dots\dots (20)$$

となった。この値は静水中に放出された場合の値 0.08 程度にくらべるとかなり大きい。Fan は,  $\alpha=0.4\sim0.5$  の程度であるとしている。

## 5. 結 論

一様な水平流速をもつ塩水中へ, 水底から淡水が放出されたとき, その経路は式(I), 希釈率は式(II), 放出水の幅は式(III), 放出水の厚さは式(IV)で表わされることがわかった。水表面に到達してのちは, 水平拡散として扱ってよいが, 水平拡散の出発点となるべき値は, 本論文の結果を使って計算できる。したがって, 従来の計算方法に存在した矛盾はとりのぞくことができる。従来は, 水表面に到達するまでは周囲水は流動していないとする Abraham の式, 表面到達後は水平流による乱流拡散とすることが多かった。

本論文の方法によると, このような点に改善を加えることができる。ただし, 放出口の位置が非常に深いと,

放出水が表面に到達する以前に, 周囲水の乱流構造が拡散希釈を支配するようなことがおこる。本論文の結果はこのような時にはつかえない。本論文の結果の適用範囲を明確にすることは, まだ今後に残された問題のひとつである。

〔記〕 本研究に対し, 文部省より科学研究費(代表者: 東洋大本間 仁教授), また原子力安全研究協会より委託研究費をうけた。実験にあたっては, 昭和43年度には, 当時中央大学学生であった加固哲夫, 栗城義親, 鯉淵 毅, 田原達人, 村田 稔, 昭和44年度には, 浅香 智, 川村直久, 林 恵明, 松室能生の諸君の協力をえた。また, 林 泰造教授には, 有益なご討議をいただいた。

以上ここに記して謝意を表する。

## 参 考 文 献

- 1) L. N. Fan: Turbulent buoyant jets into stratified or flowing ambient fluid, Report No. KH-R-15, W. M. Keck Lab. of Hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology, June 1967.
- 2) Morton, B. R., G. I. Taylor and J. S. Turner: Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources, Proc. Roy. Soc. London, A 234, pp. 1~23, 1956.
- 3) Slawson, P. R. and G. T. Csanady: On the mean path of buoyant, bent-over chimney plumes, J. Fluid Mech., Vol. 28, Part 2, pp. 311~322, 1967.