

水平板による防波堤と岸壁に関する理論的研究 (2)

井島 武士*・尾崎 重雄**・江口 泰彦***・小林 彰****

1. はしがき

前報告“直立消波岸壁に関する研究 (I)”において、水平板をもつ岸壁に対する波の作用について述べたが、それは理論的には水面に固定された水平板に対する波の作用として取扱うことができる。本論文では完全流体の微小振幅波に対し、水平板が1枚の場合と2枚の場合および水平板の下部に空けきと抵抗をもつ物質（たとえば捨石など）が填充されている場合の取扱いと計算の結果を述べる。

2. 水平板による防波堤の理論

図-1 に示すように一定水深 h の流体域の表面に長さ $2l$ の剛体板が固定されているとし、座標系を図のようにとり、流体域を $x = \pm l$ で分け、 $x \geq l$ を領域 I、 $l \geq x \geq -l$ を領域 II、 $x \leq -l$ を領域 III とする。各領域における速度ポテンシャルをそれぞれ ϕ_1 , ϕ_2 および ϕ_3 とすると、それらは Laplace の方程式を満足せねばならない。すなわち

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \dots\dots\dots (1)$$

領域 I と III における水底および水面条件は次のようである。

$$z = -h \text{ で } \frac{\partial \phi_i}{\partial z} = 0; \quad z = 0 \text{ で}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_i}{\partial z} = 0, \quad (i=1, 3) \dots\dots\dots (2)$$

領域 II では次の条件となる。

$$z = -h \text{ で } \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = 0; \quad z = 0 \text{ で } \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = 0 \dots\dots (3)$$

各領域での流体内の圧力と領域 I, III の水面波形はそれぞれ次式で表わされる。

$$\frac{p_i}{\rho} = -\frac{\partial \phi_i}{\partial t} - gz, \quad (i=1, 2, 3);$$

$$\zeta_i = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right)_{z=0} \quad (i=1, 3) \dots\dots\dots (4)$$

上の各式で g は重力の加速度である。

領域 I では周波数 $\sigma (=2\pi/T, T$ は周期) の入射波と反射波、領域 III では通過波があるとする。各領域で水底および水面条件を満足する速度ポテンシャルは次式で与えられる。

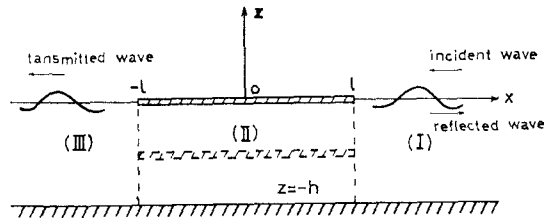


図-1 Breakwater by Horizontal Plate

$$\phi_1(x, z; t) = e^{i\sigma t} \left[(A e^{ikx} + B e^{-ikx}) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k_n x} \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \right] \dots\dots\dots (5)$$

$$\phi_2(x, z; t) = e^{i\sigma t} \sum_{r=0}^{\infty} \left(D_r \cosh \frac{r\pi x}{h} + E_r \sinh \frac{r\pi x}{h} \right) \cos \frac{r\pi z}{h}, \quad (r=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (6)$$

$$\phi_3(x, z; t) = e^{i\sigma t} \left[F e^{ikx} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n e^{k_n x} \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \right] \dots\dots\dots (7)$$

式 (5), (7) における k および k_n は次式により決

まる微分方程式の固有値である。

$$\frac{\sigma^2 h}{g} = kh \tanh kh$$

$$= -k_n h \tanh k_n h, \quad (n=1, 2, \dots) \dots\dots (8)$$

A, B および F はそれぞれ入射波、反射波および通過波を表す定数で、 C_n と G_n は $|x| \rightarrow \infty$ で消滅する

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部水土木工学科

** 正会員 前運輸省第4港湾建設局長

*** 正会員 九州大学助手 工学部水土木工学科

**** 九州大学工学部研究補助員

定常波である。式 (6) の D_r, E_r は境界条件で決まる
定数で r は整数である。

各領域の境界 $x=\pm l$ では質量およびエネルギー流束
の連続により、水平流速と圧力の連続性が成立すべきで
あるから、次の条件式が満足されねばならない。

$$x=l \text{ で } \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x}, \quad \phi_1 = \phi_2 \dots\dots\dots (9)$$

$$x=-l \text{ で } \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = \frac{\partial \phi_3}{\partial x}, \quad \phi_2 = \phi_3 \dots\dots\dots (10)$$

式 (9), (10) に式 (5), (6), (7) を代入すると
次の各式を得る。

$$\begin{aligned} (Ae^{ikl} - Be^{-ikl}) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + i \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-knl} \frac{k_n \cos k_n(z+h)}{k \cos k_n h} \\ = -i \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r\pi}{kh} \left(D_r \sinh \frac{r\pi l}{h} + E_r \cosh \frac{r\pi l}{h} \right) \cos \frac{r\pi z}{h} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$(Ae^{ikl} + Be^{-ikl}) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-knl} \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(D_r \cosh \frac{r\pi l}{h} + E_r \sinh \frac{r\pi l}{h} \right) \cos \frac{r\pi z}{h} \dots\dots\dots (12)$$

$$\begin{aligned} Fe^{-ikl} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} - i \sum_{n=1}^{\infty} G_n e^{-knl} \frac{k_n \cos k_n(z+h)}{k \cos k_n h} \\ = -i \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r\pi}{kh} \left(-D_r \sinh \frac{r\pi l}{h} + E_r \cosh \frac{r\pi l}{h} \right) \cos \frac{r\pi z}{h} \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

$$Fe^{-ikl} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n e^{-knl} \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} = \sum_{r=1}^{\infty} \left(D_r \cosh \frac{r\pi l}{h} - E_r \sinh \frac{r\pi l}{h} \right) \cos \frac{r\pi z}{h} \dots\dots\dots (14)$$

式 (11) と (13) および式 (13) と (15) を加えまたは差し引くと次式を得る。

$$\begin{aligned} \{Ae^{ikl} - (B-F)e^{-ikl}\} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + i \sum_{n=1}^{\infty} (C_n - G_n) e^{-knl} \frac{k_n \cos k_n(z+h)}{k \cos k_n h} \\ = -2i \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r\pi}{kh} E_r \cosh \frac{r\pi l}{h} \cos \frac{r\pi z}{h} \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$\{Ae^{ikl} + (B-F)e^{-ikl}\} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n - G_n) e^{-knl} \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} = 2 \sum_{r=0}^{\infty} E_r \sinh \frac{r\pi l}{h} \cos \frac{r\pi z}{h} \dots\dots\dots (16)$$

$$\begin{aligned} \{Ae^{ikl} - (B+F)e^{-ikl}\} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + i \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + G_n) e^{-knl} \frac{k_n \cos k_n(z+h)}{k \cos k_n h} \\ = -2i \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r\pi}{kh} D_r \sinh \frac{r\pi l}{h} \cos \frac{r\pi z}{h} \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$\{Ae^{ikl} + (B+F)e^{-ikl}\} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + G_n) e^{-knl} \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} = 2 \sum_{r=0}^{\infty} D_r \cosh \frac{r\pi l}{h} \cos \frac{r\pi z}{h} \dots\dots\dots (18)$$

上の各式に $\cos(r\pi z/h)$ を乗じ $z=-h$ から 0 まで積分すると

$$\begin{aligned} \int_{-h}^0 \cos \frac{s\pi z}{h} \cos \frac{r\pi z}{h} dz = 0 \quad (r \neq s); = h/2 \quad (r=s \neq 0); = h \quad (r=s=0) \\ \int_{-h}^0 \cosh k(z+h) \cos \frac{r\pi z}{h} dz = \frac{1}{k} \cdot \frac{\sinh kh}{1 + \left(\frac{r\pi}{kh}\right)^2}, \quad \int_{-h}^0 \cos k_n(z+h) \cos \frac{r\pi z}{h} dz = \frac{1}{k_n} \cdot \frac{\sin k_n h}{1 - \left(\frac{r\pi}{k_n h}\right)^2} \end{aligned}$$

の関係があるから式 (15)~(18) から次式を得る。

$$\{Ae^{ikl} - (B-F)e^{-ikl}\} \frac{\tanh kh}{1 + \left(\frac{r\pi}{kh}\right)^2} + i \sum_{n=1}^{\infty} (C_n - G_n) e^{-knl} \frac{\tan k_n h}{1 - \left(\frac{r\pi}{k_n h}\right)^2} = -ir\pi E_r \cosh \frac{r\pi l}{h} \dots\dots\dots (19)$$

$$\{Ae^{ikl} + (B-F)e^{-ikl}\} \frac{\tanh kh}{1 + \left(\frac{r\pi}{kh}\right)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n - G_n) e^{-kn l} \frac{k}{k_n} \frac{\tan k_n h}{1 - \left(\frac{r\pi}{k_n h}\right)^2} = kh E_r \sinh \frac{r\pi l}{h} \dots\dots\dots (20)$$

$$\{Ae^{ikl} - (B+F)e^{-ikl}\} \frac{\tanh kh}{1 + \left(\frac{r\pi}{kh}\right)^2} + i \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + G_n) e^{-kn l} \frac{\tan k_n h}{1 - \left(\frac{r\pi}{k_n h}\right)^2} = -ir\pi D_r \sinh \frac{r\pi l}{h} \dots\dots\dots (21)$$

$$\{Ae^{ikl} + (B+F)e^{-ikl}\} \frac{\tanh kh}{1 + \left(\frac{r\pi}{kh}\right)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + G_n) e^{-kn l} \frac{k}{k_n} \frac{\tan k_n h}{1 - \left(\frac{r\pi}{k_n h}\right)^2} = kh D_r \cosh \frac{r\pi l}{h} \dots\dots\dots (22)$$

上式からそれぞれ E_r および D_r を消去し

$$Ae^{ikl} = a, \quad Be^{-ikl} = b, \quad Fe^{-ikl} = f, \quad C_n e^{-kn l} = C_n, \quad G_n e^{-kn l} = g_n, \quad \frac{\pi l}{h} = H, \quad \frac{kh}{\pi} = \lambda_0, \quad \frac{k_n h}{\pi} = \lambda_n, \\ F_{r,n} = \frac{\lambda_0^2 + r^2}{\lambda_n^2 - r^2} \cdot \frac{\lambda_n + r \tanh rH}{\sqrt{\lambda_0^2 + (r \tanh rH)^2}}, \quad \phi_{r,n} = \frac{\lambda_0^2 + r^2}{\lambda_n^2 - r^2} \cdot \frac{\lambda_n + r \coth rH}{\sqrt{\lambda_0^2 + (r \coth rH)^2}}, \\ \theta_r = \tan^{-1} \left(\frac{r}{\lambda_0} \tanh rH \right), \quad \varphi_r = \tan^{-1} \left(\frac{r}{\lambda_0} \coth rH \right) \dots\dots\dots (23)$$

とおくと、次の関係式を得る。

$$\frac{b+f}{a} \cdot e^{-i\theta_r} + i \sum_{n=1}^{\infty} F_{r,n} \cdot \frac{C_n + g_n}{a} = e^{i\theta_r} \quad (r=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (24)$$

$$\frac{b-f}{a} \cdot e^{-i\varphi_r} + i \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{r,n} \cdot \frac{C_n - g_n}{a} = e^{i\varphi_r} \quad (r=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (25)$$

とくに $r=0$ に対しては

$$\theta_0 = 0, \quad \varphi_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \tan^{-1} (rH \coth rH / \lambda_0 H) = \tan^{-1} (1 / \lambda_0 H) \\ F_{0,n} = \lambda / \lambda_n, \quad \phi_{0,n} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda_0^2 + r^2}{\lambda_n^2 - r^2} \cdot \frac{\lambda_n + r \coth rH}{\sqrt{\lambda_n^2 + (r \coth rH)^2}} = \frac{\lambda_0^2}{\lambda_n^2} \cdot \frac{1 + \lambda_n H}{1 + (\lambda_n H)^2} \dots\dots\dots (26)$$

式 (24), (25) はそれぞれ $(b+f)/a$ と $(C_u + g_n)/a_n$ および $(b-f)/a$ と $(C_n - g_n)/a$ に関する連立 1 次方程式と見ることができるから、これを解いて b/a , f/a , C_n/a , g_n/a を求めることができる。すると式 (20) と (22) から

$$D_0 = \frac{d_0}{2} = \frac{a}{2\pi^2} \frac{\sigma^2 h}{g} \left[\left(1 + \frac{b+f}{a} \right) \frac{1}{\lambda_0^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n + g_n}{a} \frac{1}{\lambda_n^2} \right] \\ D_r \cosh \frac{r\pi l}{h} = d_r = \frac{a}{\pi^2} \frac{\sigma^2 h}{g} \left[\left(1 + \frac{b+f}{a} \right) \frac{1}{\lambda_0^2 + r^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n + g_n}{a} \frac{1}{\lambda_n^2 - r^2} \right] \\ E_r \sinh \frac{r\pi l}{h} = e_r = \frac{a}{\pi^2} \frac{\sigma^2 h}{g} \left[\left(1 + \frac{b-f}{a} \right) \frac{1}{\lambda_0^2 + r^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n - g_n}{a} \frac{1}{\lambda_n^2 - r^2} \right] \dots\dots\dots (27)$$

したがって入射波を $\zeta_0 = \alpha \cdot \cos(kx + \sigma t)$ とすると

$$a = i\alpha g e^{ikl} / \sigma \dots\dots\dots (28)$$

であるから、各領域の速度ポテンシャルは式 (5), (6), (7) により次のように決まる。

$$\phi_1(x, z; t) = a e^{i\sigma t} \left[\left\{ e^{ik(x-l)} + \frac{b}{a} e^{-ik(x-l)} \right\} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{a} e^{-kn(x-l)} \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \right] \\ \phi_2(x, z; t) = a e^{i\sigma t} \left[\frac{d_0}{2a} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{d_r}{a} \frac{\cosh rHx/l}{\cosh rH} + \frac{e_r}{a} \frac{\sinh rHx/l}{\sinh rH} \right) \cos \frac{r\pi z}{h} \right] \\ \phi_3(x, z; t) = a e^{i\sigma t} \left[\frac{f}{a} e^{ik(x+l)} \frac{\cosh(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{a} e^{kn(x+l)} \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \right] \dots\dots\dots (29)$$

領域 I と III の水面波形は次式の実数部分で与えられる。

$$\zeta_1(x; t) = \alpha \cdot e^{i(kl + \sigma t)} \left\{ e^{ik(x-l)} + \frac{b}{a} e^{-ik(x-l)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{a} e^{-k_n(x-l)} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

$$\zeta_3(x; t) = \alpha \cdot e^{i(kl + \sigma t)} \left\{ \frac{f}{a} e^{ik(x+l)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{a} e^{k_n(x+l)} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

反射率を K_r , 通過率を K_t とすると

$$K_r = |b/a|, K_t = |f/a| \dots\dots\dots (32)$$

水平板に作用する流体の圧力は式 (29) の ϕ_2 を式 (4) に用い $z=0$ において次のようである。

$$\frac{p_2(z=0)}{\alpha \rho g} = e^{i(kl + \sigma t)} \left\{ \frac{d_0}{2a} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{d_r}{a} \frac{\cosh rHx/l}{\cosh rH} + \frac{e_r}{a} \frac{\sinh rHx/l}{\sinh rH} \right) \right\} \dots\dots\dots (33)$$

全圧力を P_u とすると

$$\left| \frac{P_u}{\rho g a \cdot 2l} \right| = \left| \int_{-l}^l \frac{p_2(z=0)}{\rho g a \cdot 2l} dx \right| = \left| \frac{d_0}{2a} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d_r}{a} \cdot \frac{\tanh rH}{rH} \right| \dots\dots\dots (34)$$

3. 水平板をもつ岸壁の理論

図-2 に示すように長さ l の水平板をもつ 鉛直壁を考える。領域Ⅰにおける条件は前とまったく同じであり、速度ポテンシャル ϕ_1 は式 (5) で表わされる。領域Ⅱでは境界条件として式 (3) のほかに $x=0$ で $\partial \phi_2 / \partial x = 0$ が加わることになるから、式 (6) における定数 E_r をすべて 0 において速度ポテンシャルは次のようである。

$$\phi_2(x, z; t) = e^{i\sigma t} \sum_{r=0}^{\infty} D_r \cosh \frac{r\pi x}{h} \cos \frac{r\pi z}{h},$$

$$(r=0, 1, 2, \dots\dots) \dots\dots (35)$$

この2つの速度ポテンシャル ϕ_1, ϕ_2 に対する $x=l$ での条件は式 (9) と同じである。

前とまったく同じ手続きにより $Ae^{ikl} = a, Be^{-ikl} = b, C_n e^{-k_n l} = C_n$ とすると式 (23) と同じ記号を用いて b/a

と C_n/a に関する連立方程式は式 (24) と同じ形で次のようである。

$$\frac{b}{a} e^{-i\theta_r} + i \sum_{n=1}^{\infty} F_{r,n} \frac{C_n}{a} = e^{i\theta_r},$$

$$(r=0, 1, 2, \dots\dots) \dots\dots (36)$$

したがって防波堤に対する計算結果がそのまま用いられ式 (27) に対応して

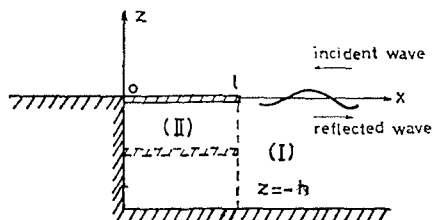


図-2 Quay wall with Horizontal Plate

$$D_0 = \frac{d_0}{2} = \frac{a}{\pi^2} \cdot \frac{\sigma^2 h}{g} \left[\left(1 + \frac{b}{a} \right) \frac{1}{\lambda_0^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{a} \frac{1}{\lambda_n^2} \right]$$

$$D_r \cosh \frac{r\pi l}{h} = d_r = 2 \frac{a}{\pi^2} \cdot \frac{\sigma^2 h}{g} \left[\left(1 + \frac{b}{a} \right) \frac{1}{\lambda_0^2 + r^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{a} \frac{1}{\lambda_n^2 - r^2} \right] \dots\dots\dots (37)$$

となる。前と同様な入射波を仮定し、式 (28) を用いると速度ポテンシャルは

$$\phi_1(x, z; t) = \alpha e^{i\sigma t} \left[\left(e^{ik(x-l)} + \frac{b}{a} e^{-ik(x-l)} \right) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{a} e^{-k_n(x-l)} \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \right] \dots\dots\dots (38)$$

$$\phi_2(x, z; t) = \alpha e^{i\sigma t} \left[\frac{d_0}{2a} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d_r}{a} \frac{\cosh rHx/l}{\cosh rH} \cdot \cos \frac{r\pi z}{h} \right] \dots\dots\dots (39)$$

反射率 K_r は $|b/a|$ で与えられるが、これは恒等的に 1 に等しい。

領域Ⅱの流体圧力は静水圧を除くと次のようである。

$$\frac{p_2}{\rho g a} = e^{i(kl + \sigma t)} \left\{ \frac{d_0}{2a} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d_r}{a} \frac{\cosh rHx/l}{\cosh rH} \cdot \cos \frac{r\pi z}{h} \right\} \quad (40)$$

水平板に作用する圧力 $p_2(z=0)$ とその全圧力 P_u は次のようである。

$$\frac{p_2(z=0)}{\rho g a} = e^{i(kl + \sigma t)} \left\{ \frac{d_0}{2a} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d_r}{a} \frac{\cosh rHx/l}{\cosh rH} \right\} \quad (41)$$

$$\left| \frac{P_u}{\rho g a l} \right| = \left| \int_0^l \frac{p_2(z=0)}{\rho g a l} dx \right| = \left| \frac{d_0}{2a} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d_r}{a} \cdot \frac{\tanh rH}{rH} \right| \quad (42)$$

鉛直壁 ($x=0$) に対する圧力 $p_2(x=0)$ とその全圧力 P_H は次のようである。

$$\frac{p_2(x=0)}{\rho g a} = e^{i(kl + \sigma t)} \left\{ \frac{d_0}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_r}{a} \frac{\cosh r\pi z/h}{\cosh rH} \right\}, \quad \left| \frac{P_H}{\rho g a h} \right| = \left| \int_{-h}^0 \frac{p_2(x=0)}{\rho g a h} dz \right| = \left| \frac{d_0}{a} \right| \quad (43)$$

4. 2枚の水平板をもつ防波堤と岸壁

図-1 と 2 の破線で示すように、 $z = -h/2$ にさらに1枚の水平板がある場合には、領域Ⅱの速度ポテンシャルには $z = -h/2$ で $\partial\phi_2/\partial z = 0$ の条件が加わる。この場合は式 (6) と (35) における r は偶数 (0, 2, 4, 6...) を取れば、上述の理論がそのまま適用される。同様にして $z=0, -h/3, -2h/3$ に3枚の板があるときは $r=3, 6, 9, \dots$ とすれば良い。

5. 計 算

種々の $\sigma^2 h/g = 2\pi h/L_0$ (L_0 は周期 T に対する深海波長) に対して式 (23) に定義した λ_0 と λ_n を式 (8) によって計算すると表-1 のようである。これによって式 (24), (25) の $F_{r,n}$ と $\phi_{r,n}$ は $F_{r,r} \gg F_{r,n}$, $\phi_{r,r} \gg$

表-1 λ_0 and λ_n for $\sigma^2 h/g$

$\sigma^2 h/g$	0.1	0.5	1.0	1.5	2.0
λ_0	0.10237	0.24564	0.38187	0.51624	0.65742
λ_1	0.98977	0.94700	0.89075	0.83459	0.78263
λ_2	1.99492	1.97440	1.94845	1.92251	1.89699
λ_3	2.99652	2.98303	2.96597	2.94889	2.93194
λ_4	3.99747	3.98730	3.97456	3.96182	3.94913
λ_5	4.99794	4.98985	4.97968	4.96951	4.95953
λ_6	5.99831	5.99155	5.98308	5.97462	5.96622

$\phi_{r,n}$ の関係があるから、式 (24), (25) の解は近似計算により容易に求められるが、電子計算機によって正しい解を求めることは容易である。たとえば1枚板および2枚板の防波堤について $\sigma^2 h/g = 1.0$, $l/h = 1.0$ について n および r を7まで取って計算すると表-2 のようである。

6. 水平板防波堤に対する計算結果

式 (32) による反射率 K_r と通過率 K_t を計算すると、図-3 に示すようである。予期されるように l/h と $\sigma^2 h/g$ が大きいほど反射率は大きく通過率は小さい。また板の総延長が等しい場合 (たとえば1枚板の $l/h = 2.0$ は2枚板の $l/h = 1.0$ に対応する) は前者の方がす

表-2(a) $\sigma^2 h/g = 1.0$, $l/h = 1.0$ (single plate)
 $b/a = 0.5621 + 0.5434i$ $f/a = 0.4334 - 0.4482i$

n	c_n/a		s_n/a	
1	-0.1340	-0.03753 i	-0.05896	+0.02837 i
2	-0.03114	-0.01006 i	-0.01050	+0.008075 i
3	-0.01392	-0.004658 i	-0.004308	+0.003788 i
4	-0.007891	-0.002683 i	-0.002340	+0.002195 i
5	-0.005077	-0.001742 i	-0.001467	+0.001430 i
6	-0.003532	-0.001220 i	-0.001003	+0.001003 i
7	-0.002582	-0.0008751 i	-0.0007238	+0.0007374 i
r	d_r/a		e_r/a	
0	0.7063	+0.03396 i	0.06392	+0.05616 i
1	0.08366	+0.003990 i	0.01522	+0.01337 i
2	0.02246	+0.001071 i	0.006499	+0.005710 i
3	0.01004	+0.0004798 i	0.003563	+0.003131 i
4	0.005653	+0.0002687 i	0.002242	+0.001969 i
5	0.003594	+0.0001714 i	0.001571	+0.001350 i
6	0.002486	+0.0001187 i	0.001118	+0.000927 i
7	0.001623	+0.0000699 i		

表-2(b) $\sigma^2 h/g = 1.0$, $l/h = 1.0$ (double plate)
 $b/a = 0.001452 + 0.8682i$ $f/a = 0.4963 - 0.0008301i$

n	c_n/a		s_n/a	
1	-1.592	-1.422 i	-0.7140	+0.08723 i
2	0.08463	+0.07888 i	0.03229	-0.01117 i
3	0.6287	+0.5925 i	0.2284	-0.09517 i
4	-0.01199	-0.01136 i	-0.004250	+0.001955 i
5	-0.1053	-0.1001 i	-0.03580	+0.01778 i
6	0.0006480	+0.0006171 i	0.000243	-0.0001113 i
7	0.002819	+0.002688 i	0.0009689	-0.0004946 i
r	d_r/a		e_r/a	
0	0.6614	+0.3850 i	0.002614	+0.004496 i
2	0.004674	+0.002707 i	0.0003059	+0.0005262 i
4	0.0005754	+0.0003332 i	0.00008513	+0.0001464 i
6	0.0001629	+0.00009434 i	0.00003464	+0.00005959 i
8	0.00006688	+0.00003873 i	0.00001745	+0.00003002 i
10	0.00003387	+0.00001962 i	0.00001007	+0.00001732 i
12	0.00001962	+0.00001136 i		
14	0.00001247	+0.000007219 i		

べての $\sigma^2 h/g$ に対して K_r は大きく K_t は小さい。すなわち同じ延長の板では、これを水面に固定の方が波に対して大きな抵抗を示すことになる。この傾向は l/h と $\sigma^2 h/g$ が大きいほど著しく、 K_t について見ると1枚板の $(l/h)_1 = 1.0$ と2枚板の $(l/h)_2 = 0.5$ では前者の K_{t1} が後者の K_{t2} の約5%程度小さいにすぎないが、 $(l/h)_1 = 2.0$ と $(l/h)_2 = 1.0$ では $K_{t1} \approx 0.8 K_{t2}$ ($\sigma^2 h/g = 0.6$), $\approx 0.75 K_{t2}$ ($\sigma^2 h/g = 1.5$) となる。これは水平板により水面を固定することによって水平板の下流体運動を制限し、波に対して大きな慣性力を与えることにな

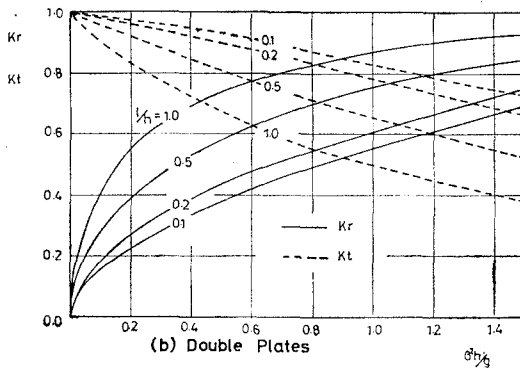
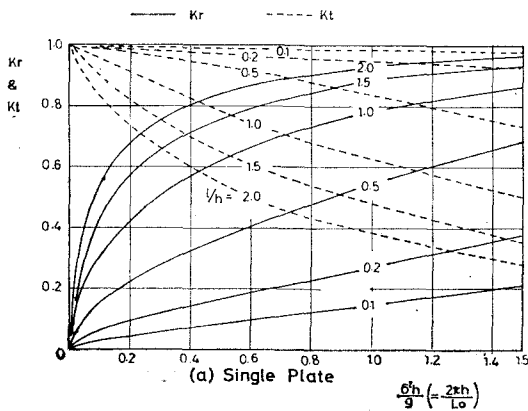


図-3 Transmission and Reflection Coefficients (Breakwater)

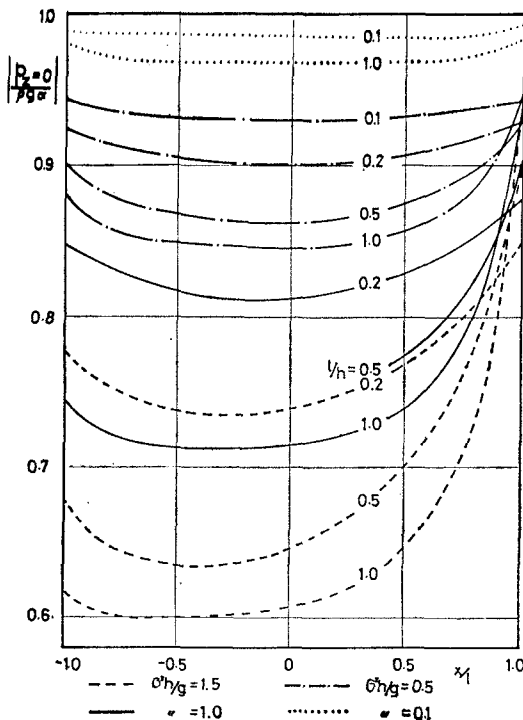


図-4 Pressure Distribution to Plate (Single Plate Breakwater)

り、波長の短い波に対しては流体塊として作用し、半固体防波堤としての性質を表わすことを意味している。1枚板の場合 $l/h=2.0$ のときは、 $\sigma^2 h/g=0.5, 1.0, 1.5$ に対して $K_t=0.53, 0.38, 0.28$ であり、入射波のエネルギーのうちそれぞれ 28%, 14% および 8% が通過するにすぎないことになる。実際には水平板の前後端におけるエネルギー損失が大きく、これの計算値の 6~7 割以下となるから、多少の通過波を許す場合には防波堤としての機能を十分果たし得ることがわかる。

種々の l/h における水平板に対する圧力分布を式(33)により計算すると 図-4 のようで、 $\sigma^2 h/g$ と l/h が小さいほど圧力分布は様になり、図には示さないが、2枚板の場合には 図-4 よりもさらに圧力分布は著しく一様になる。図-5 は式 (34) による単位振幅の入射波による単位面積当りの平均圧力であるが、 l/h と $\sigma^2 h/g$

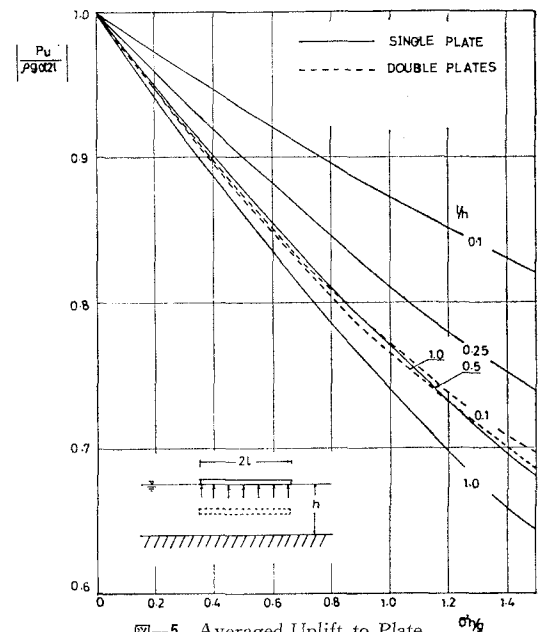


図-5 Averaged Uplift to Plate

g が大きいほど小さく、1枚板と2枚板を比較すると後者は l/h にあまり関係なく、前者の $l/h=0.5$ の場合に近づくことがわかる。すなわち水中にある板は圧力分布を一様化するとともに、平均圧力を均一化する作用をもつことが示唆される。

7. 水平板をもつ岸壁に対する計算結果

この場合については計算式は多少異なるが、前報告に述べたので省略するが、反射率はエネルギー損失を仮定しないから常に 1 であり、また防波堤の場合と同様に水平板と鉛直壁に対する圧力分布が求められ、水平板に対する圧力の性質は防波堤の場合と類似であり、鉛直壁に

対する圧力分布は l/h が大きくなるとともに一様化される。2枚の板をもつときはさらにその傾向が著しくなることは防波堤の場合とまったく同様であることがわかる。水平板をもつ岸壁においては、境界条件による流体運動の制約が防波堤の場合よりもさらに強く、水平板の下側の流体は波の入射に対しても板が長くなると静止の状態に近づき、波の圧力をすべての方向に均一化する作用を示すようになる。

8. 水平板の下部に透過性物質がある場合の防波堤と岸壁

水平板の下部に捨石などを填充した場合は、その間隙を流動する流体に対して抵抗を生ずることになる。かんたんのためこれを流速に比例すると仮定し、単位質量の流体についての抵抗係数を μ 、空けき率を V とする。空けきを流れる流体の真の流速と圧力をそれぞれ u, w および p とすると連続および運動の方程式は次のようである。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \mu u, \\
 \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g - \mu w \dots \dots (44)
 \end{aligned}$$

この領域の空けき率が V であるから、単位体積についての平均の流速と圧力をそれぞれ $\bar{u}, \bar{w}$ および $\bar{p}$ とすると

$$\bar{u} = V \cdot u, \quad \bar{w} = V \cdot w, \quad \bar{p} = V \cdot p$$

と考えることができ、これについて式 (44) を書き直す

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \mu \bar{u}, \\
 \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g V - \mu \bar{w} \dots \dots (45)
 \end{aligned}$$

この運動は速度ポテンシャル $\bar{\phi}$ をもち

$$\bar{u} = \partial \bar{\phi} / \partial x, \quad \bar{w} = \partial \bar{\phi} / \partial z \dots \dots (46)$$

とすると、圧力 $\bar{p}$ は次式で与えられる。

$$\frac{\bar{p}}{\rho} = -\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} - \mu \bar{\phi} - g V \cdot z \dots \dots (47)$$

ゆえにこの領域の運動は速度ポテンシャル $\bar{\phi}$ により記述され、しかも $\bar{\phi}$ は式 (45) の第1式から Laplace の方程式を満足するものとして決められる。

図—1 に示すように、水平板の下側の領域についてはこの $\bar{\phi}$ に対する境界条件は水面と水底で $\partial \bar{\phi} / \partial z = 0$ で、 $x = \pm l$ の境界面では質量流束の連続から

$$\begin{aligned}
 x=l \text{ で } \partial \phi_1 / \partial x &= \partial \bar{\phi} / \partial x, \\
 x=-l \text{ で } \partial \phi_3 / \partial x &= \partial \bar{\phi} / \partial x \dots \dots (48)
 \end{aligned}$$

となり、エネルギー流束の連続から $x = \pm l$ でそれぞれ $p_1 = \bar{p} / V, p_3 = \bar{p} / V$ となるべきで、したがって

$$x=l \text{ で } \partial \phi_1 / \partial t = \frac{1}{V} (\partial \bar{\phi} / \partial t + \mu \bar{\phi}) \dots \dots (49)$$

$$x=-l \text{ で } \partial \phi_3 / \partial t = \frac{1}{V} (\partial \bar{\phi} / \partial t + \mu \bar{\phi}) \dots \dots (50)$$

各領域に対する速度ポテンシャルは式 (5), (6), (7) および (35) と同じ形で与えられるから、これらを式 (48), (49), (50) に代入し、式 (23) と同じ記号を用いると、防波堤に対しては式 (24), (25) に対応して次式を得る。

$$\frac{b+f}{a} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0^2 + r^2}{\lambda_n^2 - r^2} \cdot \frac{\lambda_n + P_r e^{i\nu}}{\lambda_0 + P_r e^{i(\nu - \pi/2)}} \cdot \frac{C_n + g_n}{a} = \frac{\lambda_0 + P_r e^{i(\nu + \pi/2)}}{\lambda_0 + P_r e^{i(\nu - \pi/2)}}, \quad (r=0, 1, 2, \dots) \dots \dots (51)$$

$$\frac{b-f}{a} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0^2 + r^2}{\lambda_n^2 - r^2} \cdot \frac{\lambda_n + Q_r e^{i\nu}}{\lambda_0 + Q_r e^{i(\nu - \pi/2)}} \cdot \frac{C_n - g_n}{a} = \frac{\lambda_0 + Q_r e^{i(\nu + \pi/2)}}{\lambda_0 + Q_r e^{i(\nu - \pi/2)}}, \quad (r=0, 1, 2, \dots) \dots \dots (52)$$

ここで

$$\begin{aligned}
 P_r &= \frac{rV \tanh rH}{\beta}, \quad Q_r = \frac{rV \coth rH}{\beta}, \quad \beta = \sqrt{1 + (\mu/\sigma)^2}, \quad \nu = \tan^{-1}(\mu/\sigma) \\
 P_0 &= 0, \quad Q_0 = \lim_{r \rightarrow 0} rHV \cdot \coth rH / (\beta H) = V/\beta H \dots \dots (53)
 \end{aligned}$$

式 (51), (52) を連立方程式として解いて $b/a, f/a, C_n/a, g_n/a$ が求まり、 D_r, E_r は次のように決まる。

$$\begin{aligned}
 D_0 &= d_0/2 = \frac{V}{2\beta} e^{i\nu} \cdot \frac{\sigma^2 h}{g} \cdot \frac{a}{\pi^2} \left[\left(1 + \frac{b+f}{a} \right) \frac{1}{\lambda_0^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \cdot \frac{C_n + g_n}{a} \right] \\
 D_r \cosh rH &= d_r = \frac{V}{\beta} e^{i\nu} \frac{\sigma^2 h}{g} \cdot \frac{a}{\pi^2} \left[\left(1 + \frac{b+f}{a} \right) \frac{1}{\lambda_0^2 + r^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2 - r^2} \cdot \frac{C_n + g_n}{a} \right] \\
 E_r \sinh rH &= e_r = \frac{V}{\beta} e^{i\nu} \frac{\sigma^2 h}{g} \cdot \frac{a}{\pi^2} \left[\left(1 + \frac{b-f}{a} \right) \frac{1}{\lambda_0^2 + r^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2 - r^2} \cdot \frac{C_n - g_n}{a} \right] \dots \dots (54)
 \end{aligned}$$

こうして領域ⅠとⅢの水面波形と反射率 K_r 、通過率 K_t などは式 (51), (52) からの b/a と f/a , C_n/a , g_n/a により, 式 (30), (31), (32) と同じ形で与えられ, 領域Ⅱの速度ポテンシャルは式 (54) を用いて式 (29) の第2式の形で与えられる。入射波 $\zeta_0 = a \cos(kx + \sigma t)$ による流体圧力は静水圧を除くと式 (47) の右辺第2項までで次のようになる。

$$\frac{p}{\rho g a} = \frac{\beta}{V} e^{i(kl + \sigma t - \nu)} \left\{ \frac{d_0}{2a} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{d_r}{a} \frac{\cosh rHx/l}{\cosh rH} + \frac{e_r}{a} \frac{\sinh rHx/l}{\sinh rH} \right) \cos \frac{r\pi z}{h} \right\} \dots (55)$$

これから水平板に作用する圧力 $p_2(z=0)$ と全圧力 P_u はそれぞれ次のようである。

$$\frac{p_2(z=0)}{\rho g a} = \frac{\beta}{V} e^{i(\sigma t + kl - \nu)} \left\{ \frac{d_0}{2a} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{d_r}{a} \frac{\cosh rHx/l}{\cosh rH} + \frac{e_r}{a} \frac{\sinh rHx/l}{\sinh rH} \right) \right\} \dots (56)$$

$$\left| \frac{P_u}{\rho g a 2l} \right| = \frac{\beta}{V} \left| \left(\frac{d_0}{2a} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d_r}{a} \frac{\tanh rH}{rH} \right) \right| \dots (57)$$

以上は防波堤に対する計算式であるが, 岸壁に対しては, 3. に述べたことがそのままではまり, 水平板が2枚以上の場合も同様である。

9. 透過性物質をもつ防波堤に対する計算結果

$\sigma^2 h/g = 1.0$, $l/h = 1.0$, $V = 0.5$, $\mu/\sigma = 1.0$ に対する b/a , f/a , C_n/a etc. を式 (51), (52) で計算した例を示すと表-3 のようである。

表-3 $\sigma^2 h/g = 1.0$, $l/h = 1.0$, $V = 0.5$, $\mu/\sigma = 1.0$
 $b/a = 0.7769 + 0.1685i$ $f/a = 0.1930 - 0.1239i$

n	C_n/a		g_n/a	
1	-0.05763	-0.05141 i	-0.02255	-0.009495 i
2	-0.01620	-0.01236 i	-0.003733	-0.0008074 i
3	-0.007329	-0.005580 i	-0.001490	-0.0001913 i
4	-0.004184	-0.003178 i	-0.0007981	-0.00006291 i
5	-0.002750	-0.002051 i	-0.0004964	-0.00002332 i
6	-0.001686	-0.001430 i	-0.0003377	-0.000006349 i
7	-0.001384	-0.001046 i	-0.0002429	-0.000002015 i
r	d_r/a		e_r/a	
0	0.16771	-0.17753 i	0.028177	-0.03108 i
1	0.03904	-0.02538 i	0.007755	-0.007868 i
2	0.01071	-0.007101 i	0.003508	-0.003445 i
3	0.004630	-0.003176 i	0.001984	-0.001915 i
4	0.002734	-0.001784 i	0.001275	-0.001215 i
5	0.001753	-0.001138 i	0.0008949	-0.0008362 i
6	0.001218	-0.0007933 i	0.0006505	-0.0006126 i
7	0.0008950	-0.0005782 i		

前述の計算式により $l/h = 1.0$, $V = 0.5$ の場合について, μ/σ をパラメーターとして反射率 K_r と通過率 K_t を計算すると 図-6 のようである。予期されるように μ/σ の増加とともに K_r は増加し K_t は減少する。また $\mu/\sigma = 0$ のときは 図-3 (a) とくらべるとわかるように1枚板の $l/h = 2.0$ の場合と一致する。これは空げき率をもつ物質を填充することによる空げきの効果は堤体幅 l を増加させ l/V の幅をもたせることに相当し, 抵抗値 μ/σ の効果は入射波に対する抵抗を生じ, また堤体内でエネルギー損失を生じて通過波を減少させることを意味している。すなわち防波堤においては空げき率を与えることは堤体幅を増加して反射効果をあげることによって

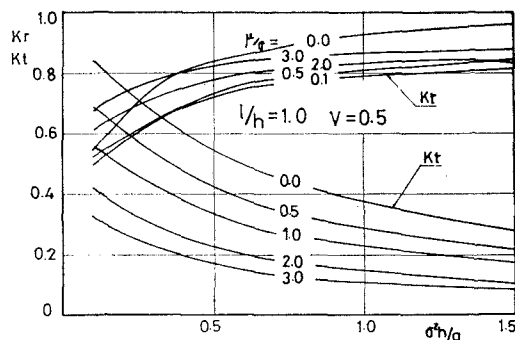


図-6 K_r and K_t of Breakwater

通過波を減少させることになり, 流体抵抗を与えることにより, 堤体内部でのエネルギー損失の効果によって反射波も通過波もともに減少させることになるが, さらに抵抗が大きくなると再び反射効果が大きくなって, 通過波は減少することになる。

次に式 (56) によって水平板に作用する圧力分布を計算すると 図-7 のようである。図-4 の $l/h = 1.0$ の場合とくらべるとわかるように, 透過性物質のない場合にくらべて圧力分布の変化は著しい。 $\sigma^2 h/g$ が大きいほどこの傾向は著しくなるのは, 前述のように空げき率が堤体幅を増加させる効果をもつことと一致した傾向である。すなわち中間に水平板を挿入すると圧力分布は均一化されるに反して, 透過性物質をおくと, 圧力分布の変化は反対に大きくなることになる。しかし式 (57) による全圧力は, 透過性物質のない場合の値とほとんど変わらない。

10. 透過性物質をもつ岸壁に対する計算結果

上と類似の計算を岸壁について行ない, その反射率 K_r を求めると 図-8 のようである。 K_r は $\sigma^2 h/g$ の増加に伴って減少することになるが, μ/σ による変化は一樣でなく, $\sigma^2 h/g$ の大きいところでは μ/σ が 1.0~2.0 において K_r の最小が現われる。すなわち反射率は $\sigma^2 h/g$ により決まる特定の μ/σ についてもっとも小さく, それ以外の μ/σ に対してはかえって大きい反射率が現

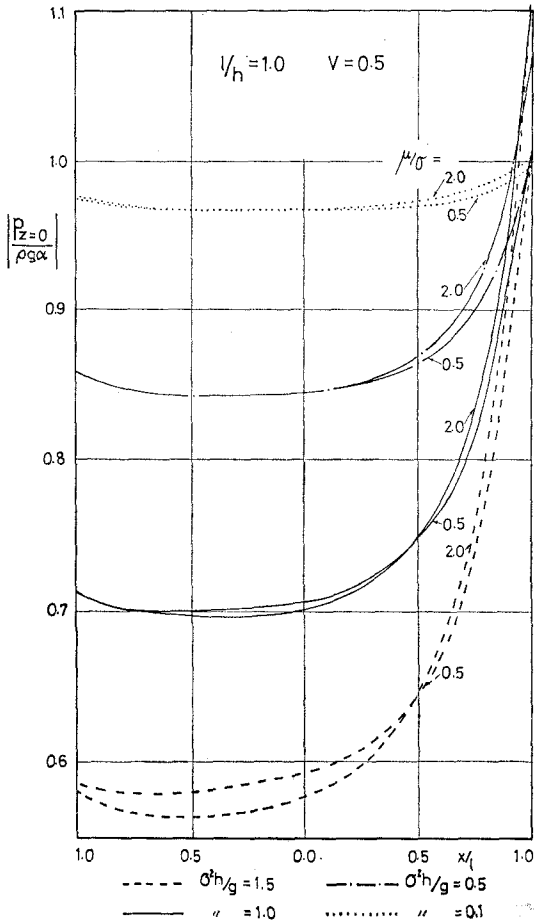


図-7 Pressure Distribution to Plate(Breakwater)

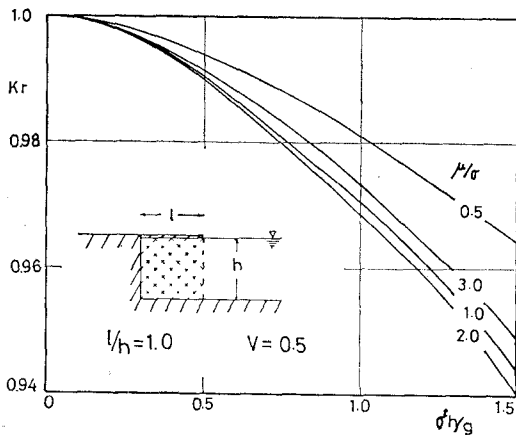


図-8 Reflection Coefficient of Quay Wall

われることになる。なお種々の l/h すなわち岸壁幅について計算して見ると $l/h \geq 1.0$ では K_r はほとんど一定である。このことと K_r の値自体が普通の $\sigma^2 h/g$ に対しては 0.94 以上という大きな値に止まり、反射率の低下があまり起こらないことは、この岸壁内部での流速が小

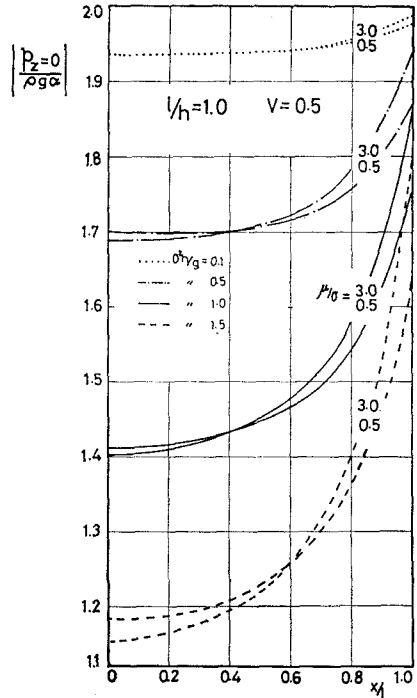


図-9 Pressure Distribution to Plate

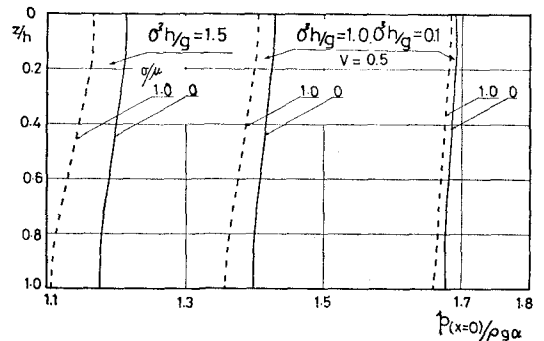


図-10 Pressure Distribution to Vertical Wall

さいため、抵抗によるエネルギー損失が生じ難いということおよびエネルギーの損失は岸壁前端の限られた領域においてしか起こらないことを意味する。

圧力分布について見ると、水平板に対しては 図-9 に示すようで防波堤の場合と同様に水平板前端付近の圧力集中の傾向が強くなる。鉛直壁面に対しては 図-10 に示すようで透過性物質のない場合と類似の分布である。

11. む す び

水面に固定された水平板に対する長波の作用は Stoker (1957) によって紹介されており、また水平板をもつ岸壁については Friedrichs-Levy による研究がある。こ

ここではこれらと異なった方法による比較的簡単な解法を試みた結果を述べたもので、岸壁に対しては前報告で実験値との比較を示したが、防波堤については2~3の場合について(透過性物質のないとき)実験値との比較を行なって計算の妥当なことを確かめた。これらの比較については次の報告で述べることにする。

参 考 文 献

- 1) 井島・尾崎・松尾・小林(1969): “直立消波岸壁に関する研究(1) —水平板岸壁について—”, 第16回海岸工学講演会講演集
 - 2) Stoker, J. J. (1957): “Water Waves”, Interscience Publishers, New-York
 - 3) Friedrichs, K. O. & H. Levy (1948): “The Dock Problem”, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 1.
-