表面波の質量輸送について

浜　田　徳　一*

1. M. S. Longuet-Higgins (1953) による表面波による境界層内の質量輸送を可動床の場合に拡張する。計算方法としては，質量輸送の基本的思想にしたがい簡単なものを用いる。

x 軸を波の進行方向に，y 軸を底面を $y=0$ として垂直上向きにとる。静水深を h_0 とする。流れのない時，底の境界層の線型方程式は，

$$\rho\frac{\partial u_1}{\partial t}=-\frac{\partial p_1}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \quad\cdots\cdots(1)$$

$u_1=u_{11}+u_{12}$ とおき，u_{11} を非粘性解，u_{12} を粘性解とすれば，表面の水位変動を $\eta=a\cos(kx-\sigma t)$ とおいて，

$$u_{11}=\frac{a\sigma}{\sinh kh_0}\cosh ky\cos(kx-\sigma t) \quad\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{\partial u_{11}}{\partial t}=\frac{a\sigma^2}{\sinh kh_0}\cosh ky\sin(kx-\sigma t)$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial x} \quad\cdots\cdots(3)$$

$$p_0+p_1=\rho g(h_0-y)$$

$$+\rho\frac{a\sigma^2}{k}\frac{\cosh ky}{\sinh kh_0}\cos(kx-\sigma t) \quad\cdots(4)$$

これから粘性解は次式を満足しなければならぬ。

$$\frac{\partial u_{12}}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u_{12}}{\partial y^2} \quad\cdots\cdots(5)$$

この解のうち，$y(>0)$ の増大とともにすみやかに減少する解は，

$$u_{12}\sim e^{i\sigma t}e^{-\left(\sqrt{\frac{\sigma}{2\nu}}+i\sqrt{\frac{\sigma}{2\nu}}\right)y} \quad\cdots\cdots(6)$$

ここで $y=0$ の可動床の条件としては，$\kappa>0$ とおき，

$$\tau_0=\kappa u_1=\mu\frac{\partial u_{12}}{\partial y},\quad y=0 \text{ において}\cdots\cdots(7)$$

をとる。すなわち底において底物質の移動速度に比例したせん断力が働らくことを意味する。式（7）を用い u_{12} は

$$u_{12}=-\frac{\kappa\dfrac{a\sigma}{\sinh kh_0}}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}\cos\Bigl(kx-\sigma t$$

$$+\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}+\alpha y\Bigr)e^{-\alpha y} \quad\cdots(8)$$

ただし　$\alpha=\sqrt{\dfrac{\sigma}{2\nu}}$　とする。

式（7）において τ_0 を有限とし，κ がきわめて大きいことは u_1 が小となり，床の可動性が消えることを意味する。式（8）において $\dfrac{\mu\alpha}{\kappa}\to 0$ とすれば，固定床の場合と一致する。

この $u_1=u_{11}+u_{12}$ に対応する底近傍の $v_1=v_{11}+v_{12}$ は $y=0$ で $v_1=0$ の条件のもとに

$$v_1=v_{11}+v_{12}=A_1\sinh ky\sin(kx-\sigma t)$$

$$+\frac{\kappa A_1 k}{B_1}\frac{e^{-\alpha y}}{\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}}$$

$$\sin\left(kx-\sigma t+\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}+\alpha y+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$-\frac{\kappa A_1 k}{B_1}\frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}}$$

$$\sin\left(kx-\sigma t+\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}+\frac{\pi}{4}\right)\cdots\cdots(9)$$

ただし　$A_1=\dfrac{a\sigma}{\sinh kh_0}$，$B_1=\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}$

とする。

このような u_1，v_1 により生ずる Stokes の質量輸送に対応する時間的平均値としての水平輸送は

$$\overline{u^{(1)}}+\overline{u^{(2)}}=\overline{\frac{\partial u_1}{\partial x}\int u_1dt+\frac{\partial u_1}{\partial y}\int v_1dt} \quad\cdots(10)$$

この場合の時間的平均は，水粒子に注目してとられている。

既知の $u_1=u_{11}+u_{12}$, $v_1=v_{11}+v_{12}$ を用いて式 (10) を計算すると，

$$\overline{u^{(1)}}=\frac{1}{2}\frac{a^2k\sigma}{\sinh^2 kh_0}\cosh^2 ky$$

$$-\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}\frac{a^2\sigma k}{\sinh^2 kh_0}e^{-\alpha y}$$

$$\cosh ky\cos\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}+\alpha y\right)$$

$$+\frac{\kappa^2}{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}\frac{1}{2}\frac{a^2\sigma k}{\sinh^2 kh_0}e^{-2\alpha y} \quad\cdots(11)$$

$$\overline{u^{(2)}}=\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}\frac{a^2\sigma ky}{\sinh^2 kh_0}$$

$$\frac{1}{2}e^{-\alpha y}\,\alpha\left\{\sin\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}+\alpha y\right)\right.$$

* 正会員　工博　運輸省港湾技術研究所

$$+\cos\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}+\alpha y\right)\Bigg\}$$

$$-\frac{\kappa^2}{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}\frac{a^2\sigma k}{\sinh^2 kh_0}\frac{1}{2}e^{-\alpha y}$$

$$\sin\alpha y \quad\cdots\cdots(12)$$

粘性境界層においては上記の $\overline{u^{(1)}}$ および $\overline{u^{(2)}}$ と同じ位数の粘性による質量輸送が2次の運動方程式から現われる。これを決定する関係は，

$$\overline{u_{12}\frac{\partial u_{11}}{\partial x}}+\overline{u_{11}\frac{\partial u_{12}}{\partial x}}+\overline{u_{12}\frac{\partial u_{12}}{\partial x}}+\overline{v_{12}\frac{\partial u_{11}}{\partial y}}$$

$$+\overline{v_{11}\frac{\partial u_{12}}{\partial y}}+\overline{v_{12}\frac{\partial u_{12}}{\partial y}}=\nu\frac{\partial^2\overline{u_{22}}}{\partial y^2} \quad\cdots\cdots(13)$$

式 (13) の時間的平均はある特定点においてとられている。このようにして決定せられる $\overline{u_{22}}$ を $\overline{u^{(1)}}$, $\overline{u^{(2)}}$ とならべて $\overline{u^{(3)}}$ とする。

式 (13) を計算し微小項を省略すれば，

$$\nu\frac{\partial^2\bar{u}_{22}}{\partial y^2}=\kappa\frac{A_1{}^2}{B_1}\alpha\frac{k}{2}$$

$$\Bigg\{ye^{-\alpha y}\cos\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}+\alpha y\right)$$

$$-y\,e^{-\alpha y}\sin\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}+\alpha y\right)\Bigg\}$$

$$+\kappa^2\frac{A_1{}^2}{B_1{}^2}\frac{k}{2}\{e^{-2\alpha y}-e^{-\alpha y}\cos\alpha y\} \quad\cdots\cdots(14)$$

$y(>0)$ が十分大きいとき $\dfrac{\partial\bar{u}_{22}}{\partial y}\to 0$ が成立することを考慮して，式 (14) を積分すればつぎの結果が得られる。

$$\overline{u^{(3)}}=\bar{u}_{22}=(\overline{u^{(3)}})_0$$

$$+\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}\frac{a^2\sigma k}{\sinh^2 kh_0}$$

$$\Bigg[-\frac{1}{2}\alpha y\,e^{-\alpha y}\sin\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}+\alpha y\right)$$

$$-\frac{1}{2}\alpha y\,e^{-\alpha y}\cos\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}+\alpha y\right)$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\alpha y}\cos\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}+\alpha y\right)$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\alpha y}\cos\alpha y+\frac{1}{4}\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}e^{-2\alpha y}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}e^{-\alpha y}\sin\alpha y$$

$$+\frac{1}{2}\cos\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}\right)+\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}\Bigg] \quad\cdots\cdots(15)$$

ただし $(\overline{u^{(3)}})_0$ は $y=0$ における $\bar{u}_{22}$ を示している。求められる質量輸送速度は $\overline{u^{(1)}}$, $\overline{u^{(2)}}$ および $\overline{u^{(3)}}$ の線型加算により与えられる。したがって，

$$\bar{u}=(\overline{u^{(3)}})_0+\frac{1}{2}\frac{a^2k\sigma}{\sinh^2 kh_0}$$

$$+\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}\frac{a^2k\sigma}{\sinh^2 kh_0}$$

$$\Bigg[-\frac{3}{2}e^{-\alpha y}\cos\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}+\alpha y\right)$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\alpha y}\cos\alpha y+\frac{3}{4}\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}$$

$$e^{-2\alpha y}+\frac{1}{2}\cos\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}\right)+\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}\Bigg] \quad\cdots\cdots(16)$$

式 (16) において $y\to 0$ のときの $\bar{u}$ を $(\bar{u})_0$ とすれば，

$$(\overline{u^{(3)}})_0=(\bar{u})_0-\frac{1}{2}\frac{a^2k\sigma}{\sinh^2 kh_0}$$

$$-\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}\frac{a^2k\sigma}{\sinh^2 kh_0}$$

$$\Bigg\{-\cos\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}\Bigg\} \quad\cdots\cdots(17)$$

式 (17) を用い，式 (16) の $\bar{u}$ は

$$\bar{u}=(\bar{u})_0+\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}\frac{a^2\sigma k}{\sinh^2 kh_0}$$

$$\Bigg[-\frac{3}{2}e^{-\alpha y}\cos\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}+\alpha y\right)$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\alpha y}\cos\alpha y+\frac{3}{4}\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}$$

$$e^{-2\alpha y}+\frac{3}{2}\cos\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}\right)$$

$$+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}\Bigg] \quad\cdots\cdots(18)$$

式 (18) において $\kappa\to\infty$，すなわち底面が固定となったときは，$(\bar{u})_0\to 0$ となることを考慮して

$$(\bar{u})_{\kappa\to\infty}=\frac{a^2\sigma k}{\sinh^2 kh_0}$$

$$\left(\frac{5}{4}-{}^2e^{-\alpha y}\cos\alpha y+\frac{3}{4}e^{-2\alpha y}\right) \quad\cdots\cdots(19)$$

式 (19) は M. S. Longuet-Higgins (1953) の結果と一致する。

$y(>0)$ が大きくなるとき，境界層の外側の $\bar{u}$ は (18) より，

$$\bar{u}=(\bar{u})_0+\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}\frac{a^2\sigma k}{\sinh^2 kh_0}$$

$$\Bigg\{\frac{3}{2}\cos\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}\right)$$

$$+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}\Bigg\} \quad\cdots\cdots(20)$$

$\dfrac{\kappa}{\mu\alpha}\to\infty$ において式 (20) による $\bar{u}$ は粘性係数に無関係となるが，$\dfrac{\kappa}{\mu\alpha}$ が有限のときは一般に粘性に関係する。この場合の粘性係数は分子粘性に限定する必要はなく，いま用いている解法では式（5）に示されるように垂直方向に一様と見なせればよい。

つぎに式 (18) の数値的性質を検討する。いま式（7）の u_1 が通常の砂層の場合，境界層外の速度の 10% 程

度以下であると考え，また層流境界層の場合を含めてこの振動性境界層の厚さがきわめて小であり，この底面に沿う薄い層内ではそれほど大きな運動量交換係数を考え得ないことを考慮すると，$\frac{\mu\alpha}{\kappa}$ の値は0.2以下の程度と推定せられる。したがって，つぎの計算例では $\frac{\mu\alpha}{\kappa}$ は nearly zero, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 ととられている。式（18）において，

$$\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}\left[-\frac{3}{2}e^{-\alpha y}\cos\left(\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}+\alpha y\right)-\cdots\cdots\cdots\cdots-\frac{3}{4}\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}\right]$$

の値を無次元化された y 座標 $\alpha y\left(=\sqrt{\frac{\sigma}{2\nu}}\,y\right)$ に対して求めると，**表—1** のごとくである。

この表において $\frac{\mu\alpha}{\kappa}\to 0$ の場合は M. S. Longuet-Higgins(1953) と一致することは明らかである。したがって式（18）において未決定の項 $(\bar{u})_0$ を除けば，質量輸送速度は αy に対してとられるとき，$\frac{\mu\alpha}{\kappa}\to 0$(固定床）の場合にくらべてそれほど大きな変化はないことがわかる。式（7）の表現をさらに複雑なものとしても，現在考慮されている場合については，この結論はおそらく成立するであろう。

つぎにこの境界層の力学的性質を考えよう。

$y\geq 0$ における境界層の粘性損失は，

$$\int_0^y \mu(y)\left(\frac{\partial u_{12}}{\partial y}\right)^2 dy=\int_0^y \tau\frac{\partial u_{12}}{\partial y}dy$$
$$=\left|\tau u_{12}\right|_0^y-\int_0^y u_{12}\frac{\partial \tau}{\partial y}dy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

積分上限 y を境界層の上端にとり，式（21）の時間的平均を求めると，

$$\overline{\int_0^y \mu(y)\left(\frac{\partial u_{12}}{\partial y}\right)^2 dy}=-\overline{\tau_0(u_{12})_0}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

τ_0, $(u_{12})_0$ は $y=0$ における値を示している。他方式（7）より $\tau_0=\kappa(u_{11}+u_{12})_0$，ゆえに，

$$(u_{12})_0=\frac{\tau_0}{\kappa}-(u_{11})_0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

表—1

αy \ $\frac{\mu\alpha}{\kappa}$	nearly zero	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4
0.2	+0.1481	0.1629	0.1741	0.1875	0.1927	0.1929
0.4	+0.3523	0.3712	0.3842	0.3964	0.3965	0.3894
0.8	+0.7753	0.7859	0.7888	0.7785	0.7552	0.7251
1.2	+1.0999	1.0955	1.0835	1.0451	0.9977	0.9461
1.6	+1.2923	1.2748	1.2505	1.1912	1.1257	1.0594
2.0	+1.3762	1.3500	1.3180	1.2458	1.1705	1.0965
2.4	+1.3898	1.3590	1.3233	1.2454	1.1662	1.0895
2.8	+1.3672	1.3350	1.2982	1.2193	1.1399	1.0636
3.2	+1.3326	1.3005	1.2642	1.1866	1.1089	1.0343
3.6	+1.2995	1.2685	1.2332	1.1579	1.0822	1.0096
4.0	+1.2741	1.2442	1.2102	1.1369	1.0632	0.9922

式（22），（23）より

$$\overline{\int_0^y u(y)\left(\frac{\partial u_{12}}{\partial y}\right)^2 dy}=\overline{\tau_0(u_{11})_0}-\frac{\overline{\tau_0^2}}{\kappa}\cdots\cdots\cdots(24)$$

また底面 $y=0$ において下層に対してなされる仕事は

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \tau_0(u_{11}+u_{12})_0 dt=\frac{\overline{\tau_0^2}}{\kappa}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

式（24）と式（25）との和はこの境界層におけるエネルギー損失の総量を示し，それは $\overline{\tau_0(u_{11})_0}$ で示される。式（21）より式（25）への計算は粘性係数 μ を y の関数とおいて成立する。以下 μ を一定として取扱う。

式（7）を用い，

$$\tau_0=\frac{\mu\kappa\frac{a\sigma}{\sinh kh_0}}{\sqrt{(\kappa+\mu\alpha)^2+(\mu\alpha)^2}}\,\alpha\sqrt{2}\cos\left(kx-\sigma t-\frac{\pi}{4}+\tan^{-1}\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}\right)$$

$\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}\ll 1$ として，

$$\tau_0=\frac{\mu\kappa\frac{a\sigma}{\sinh kh_0}}{\kappa+\mu\alpha}\,\alpha\sqrt{2}\cos\left(kx-\sigma t-\frac{\pi}{4}+\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}\right)\cdots\cdots(26)$$

また式（2）より，$(u_{11})_0=\frac{a\sigma}{\sinh kh_0}\cos(kx-\sigma t)$，

ゆえに

$$\overline{\tau_0(u_{11})_0}=\left(\frac{a\sigma}{\sinh kh_0}\right)^2\frac{\mu\kappa}{\kappa+\mu\alpha}\,\alpha\frac{1}{2}\frac{\kappa+2\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}\left(=\frac{\partial E}{\partial t}\right)\cdots\cdots(27)$$

他方，式（18）より

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}=\frac{\kappa}{\kappa+\mu\alpha}\frac{a^2\sigma k}{\sinh^2 kh_0}\left\{\frac{3}{2}\alpha e^{-\alpha y}\cos\left(\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}+\alpha y\right)+\frac{3}{2}\alpha e^{-\alpha y}\sin\left(\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}+\alpha y\right)+\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha y}\cos\alpha y+\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha y}\sin\alpha y-\frac{3}{2}\alpha\frac{\kappa}{\kappa+\mu\alpha}e^{-2\alpha y}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

式（28）において底の近傍を考え，αy がきわめて小であるとし，$\frac{\mu\alpha}{\kappa+\mu\alpha}\ll 1$ をあわせ用いると

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}=\frac{\kappa}{\kappa+\mu\alpha}\frac{a^2\sigma k}{\sinh^2 kh_0}\,\alpha\frac{1}{2}\frac{\kappa+7\mu\alpha+6\kappa\alpha y}{\kappa+\mu\alpha}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

いまこの $\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}$ によるせん断応力 $\bar{\tau}$ を考えれば，波速 c を用い

$$c\bar{\tau}=\left(\frac{a\sigma}{\sinh kh_0}\right)^2\frac{\mu\kappa}{\kappa+\mu\alpha}$$

$$\alpha\frac{1}{2}\frac{\kappa+7\mu\alpha+6\kappa\alpha y}{\kappa+\mu\alpha}\cdots\cdots(30)$$

式（27）と式（30）とが等しくなるためには，

$7\mu\alpha+6\kappa\alpha y=2\mu\alpha$ ゆえに

$$y=-\frac{5\mu}{6\kappa}<0\cdots\cdots(31)$$

すなわち $y<0$ が得られ，式（30）の表現は $y\geq 0$ において成立するものであるから，現在考えている移動床のモデルでは $\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}=c\bar{\tau}$ の関係は，$\bar{\tau}$ を境界層内のどの点にとっても成立しがたいことがわかる。しかし $\frac{\mu\alpha}{\kappa}\to 0$ の固定床の場合には，式（27）と式（30）より $\bar{\tau}$ を $y=0$ においてとるとき

$$\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}=c\bar{\tau}\cdots\cdots(32)$$

が成立する。

2. 分子粘性のみを考慮して周期的進行波による水表面近傍の質量輸送を取扱う。静水面において波の進行方向に x 軸，垂直上向きに y 軸をとり，水深を十分大きいとする。H. Lamb (1932) によれば自由表面における境界層の1次近似は

$$u_1=a_0\sigma\, e^{-2\nu k^2 t}e^{ky}\cos(kx-\sigma t)$$
$$+2\nu k a_0\alpha\, e^{\alpha y}e^{-2\nu k^2 t}\sin(kx-\sigma t-\alpha y)$$
$$-2\nu k a_0\alpha\, e^{\alpha y}e^{-2\nu k^2 t}\cos(kx-\sigma t-\alpha y)$$
$$\cdots\cdots(33)$$

$$v_1=a_0\sigma\, e^{-2\nu k^2 t}e^{ky}\sin(kx-\sigma t)$$
$$-2\nu k^2 a_0\, e^{\alpha y}e^{-2\nu k^2 t}\cos(kx-\sigma t-\alpha y)$$
$$\cdots\cdots(34)$$

$$\eta=a_0\, e^{-2\nu k^2 t}\cos(kx-\sigma t)\cdots\cdots(35)$$

ただし，$\alpha=\sqrt{\frac{\sigma}{2\nu}}$ は前と同様である。1次近似では $[\int v_1 dt]_{y=0}=\eta$ が成立しなくてはならないから，式（34）の右辺第2項は無視されなくてはならない。このことと式（33）の表現とをあわせ考え，1に対し k/α の位数の項は計算中に用いられることとなるが，$(k/\alpha)^2$ の位数の項は無視されることとなる。以下計算を簡単にするため $a_0 e^{-2\nu k^2 t}=a$ とおく。

すでに示したように，この境界層の質量輸送速度は2次近似の範囲内において，$\overline{\frac{\partial u_1}{\partial x}\int u_1 dt}(=\overline{u^{(1)}})$，$\overline{\frac{\partial u_1}{\partial y}\int v_1 dt}(=\overline{u^{(2)}})$ および次式を満足する $\overline{u_2}(=\overline{u^{(3)}})$ の和として表わされる。

$$\overline{u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}}+\overline{v_1\frac{\partial u_1}{\partial y}}=\nu\frac{\partial^2\bar{u}_2}{\partial y^2}\cdots\cdots(36)$$

周期的な進行波のときは，式（13）のかわりに式（36）を使用することができる。これらはいずれも時間的平均値として表わされている。

計算の結果は

$$\overline{u^{(1)}}=\frac{1}{2}a^2k\sigma\, e^{2ky}-2\nu k^2a^2\alpha\, e^{ky}e^{\alpha y}\sin\alpha y$$
$$-2\nu k^2a^2\alpha\, e^{ky}e^{\alpha y}\cos\alpha y\cdots\cdots(37)$$

$$\overline{u^{(2)}}=\frac{1}{2}a^2k\sigma\, e^{2ky}-a^2k\sigma\, e^{ky}e^{\alpha y}\cos\alpha y\cdots\cdots(38)$$

$$\nu\frac{\partial^2\overline{u^{(3)}}}{\partial y^2}=-a^2k\sigma^2\, e^{ky}e^{\alpha y}\sin\alpha y\cdots\cdots(39)$$

式（37），式（38）を y で微分し，また，式（39）を y で積分し，αy が十分小さい負の値において $\frac{\partial\overline{u^{(3)}}}{\partial y}\to 0$ となる条件を用いると，

$$\frac{\partial\overline{u^{(1)}}}{\partial y}=a^2k^2\sigma\, e^{2ky}$$
$$-2a^2k^2\sigma e^{(k+\alpha)y}\cos\alpha y\cdots\cdots(40)$$

$$\frac{\partial\overline{u^{(2)}}}{\partial y}=a^2k^2\sigma\, e^{2ky}$$
$$-a^2k^2\sigma\, e^{(k+\alpha)y}\cos\alpha y$$
$$-a^2k\sigma\alpha\, e^{(k+\alpha)y}\cos\alpha y$$
$$+a^2k\sigma\alpha\, e^{(k+\alpha)y}\sin\alpha y\cdots\cdots(41)$$

$$\frac{\partial\overline{u^{(3)}}}{\partial y}=-a^2k\sigma\alpha\, e^{(k+\alpha)y}\sin\alpha y$$
$$+a^2k\sigma\alpha\, e^{(k+\alpha)y}\cos\alpha y$$
$$-a^2k^2\sigma\, e^{(k+\alpha)y}\cos\alpha y\cdots\cdots(42)$$

ゆえに

$$\frac{\partial}{\partial y}(\overline{u^{(1)}}+\overline{u^{(2)}}+\overline{u^{(3)}})=2a^2k^2\sigma\, e^{2ky}$$
$$-4a^2k^2\sigma\, e^{(k+\alpha)y}\cos\alpha y\cdots\cdots(43)$$

式（43）は表面近傍の粘性境界層内の質量輸送速度の y 方向の勾配を示している。αy が十分小さい負の値をとる境界層の下側ではこの値は Stokes 波としてのものと一致し，$y=0$ の自由表面では $-2a^2k^2\sigma$ となる。

波による表面のせん断応力の時間的平均値は

$$\bar{\tau}=\mu\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)\cdots\cdots(44)$$

周期的な進行波では $y=0$ で $\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}=0$ は明らかであるから，式（44）は

$$\bar{\tau}=\mu\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}=-2\mu a^2k^2\sigma\cdots\cdots(45)$$

単位時間の粘性損失は式（35）より

$$\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}=\frac{1}{2}\rho g(-4\nu k^2)a_0{}^2e^{-4\nu k^2 t}$$
$$=-2\nu\rho g k^2a^2\cdots\cdots(46)$$

式（45）より $c\bar{\tau}=-2\mu a^2k^2 g$，すなわち

$$\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}=c\bar{\tau}\cdots\cdots(47)$$

これから Stokes 波としての質量輸送を M とすれば，$\bar{\tau}=\frac{\partial M}{\partial t}$ であることは自明である。このようにして自由表面の粘性境界層がエネルギーの関係とともに，モーメンタムの関係を満足していることがわかる。

他方水表面の力学的条件は，現在の取扱いではせん断応力の総量は 0 でなければならぬから，$\overline{\tau^*}+\overline{\tau}=0$ になるように $\overline{\tau^*}$ が働らかねばならぬ。この $\overline{\tau^*}$ により $\dfrac{\partial \overline{u^*}}{\partial y}$ が $y=0$ で $2a^2k^2\sigma$ になるような質量輸送が生ずる。この質量輸送のため $y=0$ では $\dfrac{\partial}{\partial y}(\bar{u}+\overline{u^*})=0$ となるが，粘性境界層のすぐ下側では $\dfrac{\partial}{\partial y}(\bar{u}+\overline{u^*})=4a^2k^2\sigma$ の質量輸送の勾配が現われる。

以上のことから，波のモーメンタムは表面にかかる $\overline{\tau}$ によりエネルギーの粘性による減衰とともに波から失われてゆくが，ついで $\overline{\tau^*}$ により水平な流れのモーメンタムの増加として現われることとなる。この機構は M. S. Longuet-Higgins (1969) の Fig. 3 に示されている。分子粘性のみの働らく理想的状態ではこの通りであるが実際の水中では表面近傍の運動量交換は抑制せられて，分子粘性に近い粘性係数を用いるとしても，境界から十分離れた領域では各種の流れの存在のため，相当の運動量の交換があると考えられ，こうした水表面の微量の $\overline{\tau^*}$ が水中の水平方向の平均流の運動量の増加にどの程度有効であるかは一つの問題である。

なお以上の計算で分子粘性として取扱われた量の意味を拡張して考える時は，この取扱いは表面の砕波による波から流れへの運動量の移送の問題と，思想上関係が生ずる。

参考文献

1) Lamb, H.: Hydrodynamics, Cambridge, 1932.
2) Longuet-Higgins, M. S.: Mass transport in water waves, Phil. Trans., A 245, 1953.
3) Longuet-Higgins, M. S.: A nonlinear mechanism for the generation of sea waves, Proc. Roy. Soc. A. 311, 1969.