

二次波峯現象における非線型性の解析

細井正延*・石田昭**

1. 緒言

近年、波浪をランダムプロセスとして取扱う研究が進められ、多くの成果が得られて来たが、それに伴って非線型効果の重要性が注目を浴びてきている^{1),2),3)}。なかでも各成分波が独立しているという仮定、すなわち周波数と波数の間に線型理論による関数関係があるという考え方は、たとえば基本波と同じ波速をもつ有限振幅波の調和波を考える時には、明らかに間違っている。したがって周波数と波数の両者に関するスペクトルを求める必要のあることを Barber は述べている***。また実体写真法によって得た波数スペクトルを、線型理論の関数関係を用いて周波数スペクトルに換算してみると、1 点の波高計から得た周波数スペクトルに一致しないで、前者の値の方が大きいという結果が Cote⁴⁾ らにより報告されている。このことは、線型理論による関数関係を不規則波の場合に適用することに問題があることを示唆していると思われる。波浪は浅海域に近づくほど非線型性を強くするが、海岸波浪を解析した柿沼ら⁵⁾によれば、波高が大きくなると強い非線型効果のあること、そして海底摩擦だけでは説明し得ないような周波数スペクトルの場所的変動があること、などが報告されている。

この論文は、実験水槽で規則波の実験を行なう場合にみられる二次波峯現象において、波向が一方方向であることと、水位変動は時間的にも場所的にもくり返されることに着目し、調和解析の手法によって周波数・波数スペクトルを求めて、二次波峯現象の機構を解明する手掛りを得るとともに、bispectrum をも求めて非線型現象を解明する基礎資料にしようとしたものである。

二次波峯現象に関しては、Miche⁶⁾ が谷における曲率を 0 として理論的にその発生限界を導き、堀川⁷⁾が Miche の式の妥当であることを実験によって確かめ、合田⁸⁾が二次波峯の発生間隔を与えるグラフを実験値をもとに作成し、精度よく求まること、および各調和波は場所的にその振幅が変動すること、などを報告しているが、二次波峯の発生原因については定説がないようである。

2. 実験方法および解析方法

(1) 実験方法

実験に用いた水槽は、長さ 26.4 m、幅 60 cm、高さ 1 m の片面ガラス張り、反射波を消すため端部に約 1/10 勾配で碎石を敷いた（汀線付近では約 1/40 にしてある）。波高計は抵抗線式のものを用い、ビジュグラフ上に記録させた。図-1 (a) および (b) は水槽中央部に波高計を 5 台 (W-1~W-5) 設置して求めた同時記録の

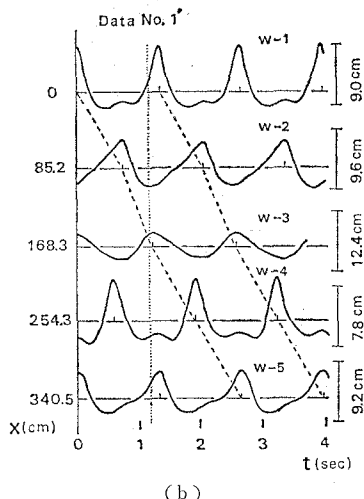
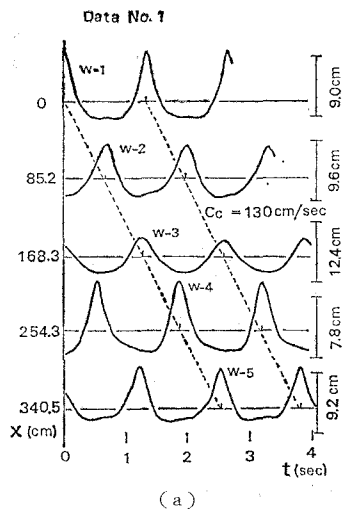


図-1 波形の同時記録

* 正会員 工博 名古屋工業大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 名古屋工業大学講師 工学部土木工学科

*** Proc. Ocean Wave Spectra (1963) の Discussion 参照 (p. 64)

一部である。(a) 図は t 軸上の波形が場所的にあまり変化せず主峯の速度が一定とみなせるが、(b) 図は波形の変化が著しくて主峯の速度を一定とみなせないことを示している。(b) 図の中で点線で示した時刻に、水槽側面から写真測定して得た結果が 図-2 である。この図より

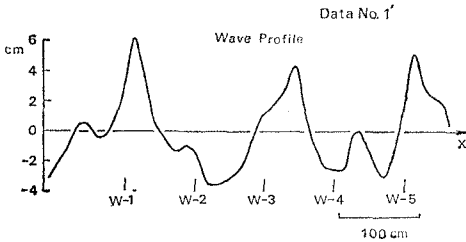


図-2 写真測定による波形記録

t 軸上の波形は周期的であっても、 x 軸上の波形は周期的でないことがわかる。図-1 (a) の場合のように主峯の速度が一定とみなせる場合には、二次波峯現象は $(x-t)$ ダイアグラムによって 図-3 のように表示することができる。実線は主峯の進行を、破線は二次波峯の進行を示している。この図より、水位変動 $\eta(t, x)$ の値は、斜線

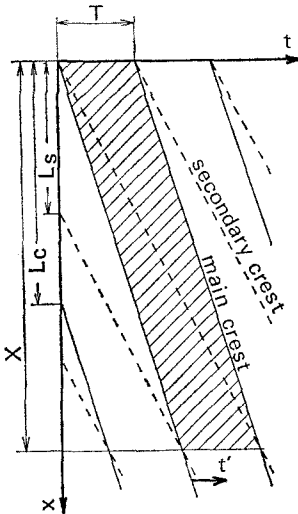


図-3 二次波峯現象の $(x-t)$ ダイアグラムによる表示

を施した領域の値が t 方向および主峯の進行方向にくり返されることがわかる。したがって主峯の速度を C_c として

$$t = t' + \frac{x}{C_c} \dots\dots\dots (1)$$

のように t' を主峯の位置から計れば、 $\eta(t', x)$ は $\frac{1}{T}$ および $2\pi/X$ をそれぞれ基本周波数および基本波数とする調和波に分解することができる (T : 主峯の周期, X : 二次波峯が主峯に追越される間隔, または二次波峯の発生間隔)。実験技術の上で、波数の解析ができるほど

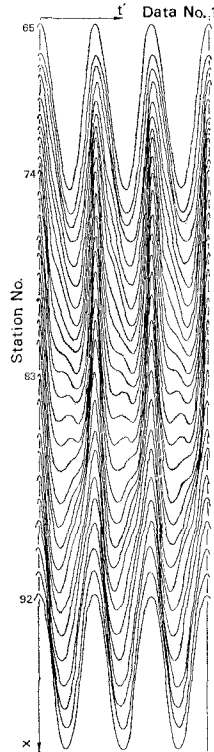


図-4 主峯の位置をそろえた記録 $\eta(t', x)$ の一部

表-1 実験条件および解析条件

Data No.	1	2
T (sec)	1.30	1.75
X (cm)	270	570
H_{mean} (cm)	6.7	10.2
h (cm)	20	30
C_c (cm/sec)	130	160
Δt (sec)	0.1	0.1
Δx (cm)	10	10
M_T	65	70
M_X	27	57
S_T	13	—

多点について同時測定することが困難であるので、1 台の波高計を 10 cm 間隔で移し、各点で 10 T ずつの記録をとった。各点の記録は時間的にずれているが、主峯の速度が一定であれば、主峯の位置をそろえて $\eta(t', x)$ であるとみなすことができる。図-4 はこのようにして得た $\eta(t', x)$ の一部である。表-1 は解析した 2 例の実験条件と解析条件を示したもので、いずれも主峯の速度を一定とみなせる資料である。Data No.-1' は No.-1 と同じ波であるが、底面に砂を敷いて約 2 時間実験を継続した時の記録である。

(2) 周波数・波数スペクトルの解析

水位変動 $\eta(t, x)$ は一般的に次式のように表示できる。

$$\eta(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint A(k, f) \exp i(kx - 2\pi ft + \theta) dk df \dots\dots\dots (2)$$

式 (1) のような t' を用いれば、

$$\eta(t', x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint A(k', f) \exp i(k'x - 2\pi ft' + \theta) dk' df \dots\dots\dots (3)$$

となり、 k と k' の間には

$$k - \frac{2\pi f}{C_c} = k' \dots\dots\dots (4)$$

が成立する。式(3)をフーリエ変換すると

$$A(k', f) \exp i(\theta) = \iint \eta(t', x) \exp i(-k'x + 2\pi f t') dx dt' \quad \dots\dots\dots(5)$$

が得られる。解析には $\eta(t', x)$ を T および X の整数倍の長さまでとり、 t' 方向に $\Delta t' = 0.1 \text{ sec}$ 間隔で、 x 方向に $\Delta x = 0.1 \text{ m}$ 間隔でデジタル化したものを用いるから、以後 $t' = 0, 1, 2, \dots, M_T$ および $x = 0, 1, 2, \dots, M_X$ とする。式(5)を離散的表示に直せば、

$$A(k_n', f_m) \exp i(\theta_{n,m}) = \frac{1}{(M_X+1)(M_T+1)} \sum_{x=0}^{M_X} \sum_{t'=0}^{M_T} \eta(t', x) \exp i(-k_n'x + 2\pi f_m t') \\ = \frac{1}{(M_X+1)} \sum_{x=0}^{M_X} \exp i(-k_n'x) \frac{1}{(M_T+1)} \sum_{t'=0}^{M_T} \eta(t', x) \exp i(2\pi f_m t') \quad \dots\dots\dots(6)$$

となる。ここで

$$k_n' = k_n - \frac{2\pi f_m}{C_c} = \frac{2\pi n}{M_X \Delta x} \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$f_m = \frac{m}{M_T \Delta t} \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$(n, m = 0, 1, 2, \dots)$$

である。したがって表-1の条件より、Data No. 1 の場合は $n=0, 1, 2, \dots, m=5, 10, 15, \dots$ が、Data No. 2 の場合は $n=0, 1, 2, \dots, m=4, 8, 12, \dots$ がそれぞれ成分波を表わすことになる(図-6参照)。

(3) bispectrum の解析

$\eta(t', x)$ は t' に関して周期的であるから、2次元 Correlation $R_x(\tau_1, \tau_2)$ の値を T の整数倍まで求めると $R_x(\tau_1, \tau_2)$ は調和解析の手法によって分解することができる。 $\eta(t', x)$ はデジタル化したものを用いるので、以後 $\tau_1, \tau_2 = 0, 1, 2, \dots, S_T < M_T$ とし、式の簡単化のため $\eta(t', x) = \eta_x(t')$ とする。 $R_x(\tau_1, \tau_2)$ は次式によって求める。

$$R_x(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{M_T - S_T + 1} \sum_{t'=0}^{M_T - S_T} \{ \eta_x(t') \eta_x(t' + \tau_1) \eta_x(t' + \tau_2) \} \quad \dots\dots\dots(9)$$

ここで $\eta_x(t')$ は t' 軸上で前後非対称となることもあるので、bispectrum $B_x(f_{1n}, f_{2m})$ に位相 $\theta_{1n, 2m}$ を考慮して表示する。

$$B_x(f_{1n}, f_{2m}) \exp i(\theta_{1n, 2m}) = \frac{1}{(S_T+1)^2} \sum_{\tau_1=0}^{S_T} \sum_{\tau_2=0}^{S_T} R_x(\tau_1, \tau_2) \exp i(-2\pi f_{1n}\tau_1 - 2\pi f_{2m}\tau_2) \quad \dots\dots\dots(10)$$

ここで

$$f_{1n} = \frac{2\pi n}{S_T \Delta t} \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$f_{2m} = \frac{2\pi m}{S_T \Delta t} \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$(n, m = 0, 1, 2, \dots)$$

である。したがって表-1の条件より、2次元 Correlation を構成する成分波は、 $n, m = 1, 2, 3, \dots$ の場合であることがわかる(図-9参照)。

3. 実験値の解析結果

(1) 周波数スペクトルの場所的変動

周波数・波数スペクトルを求める式(6)の中で右辺の後半の絶対値をとったもの

$$\left| \frac{1}{(M_T+1)} \sum_{t'=0}^{M_T} \eta(t', x) \exp i(2\pi f_m t') \right|$$

は、周波数と x を変数とする振幅スペクトルである。図-5(a)および(b)はこの式によって計算される1倍、2倍および3倍周波数成分を A_1, A_2 および A_3 で表わし、波高とともに示したものである。したがって A_1, A_2 および A_3 は成分波を意味するのではなくて、周波数は

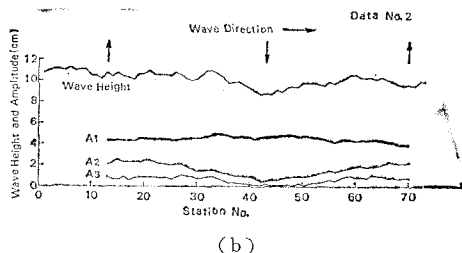
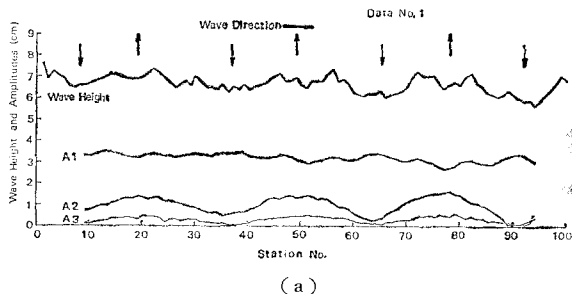


図-5 波高と振幅の場所的変動

同じであるが波数は異なっているような成分波を合成したものを意味している。図中↑印は二次波峰が主峰と主峰の中間に現われる位置(発生点)を、↓印は二次波峰が主峰に追越される位置(追越し点)を示している(いずれも t' 軸上の記録がほぼ前後対称となる所とした)。(a)図より次のことがわかる。(1)波高は複雑に変動するが、全体にわずかに減衰を示している。(2)発生点は隣り合う追越し点の中央よりやや沖側にあり、発生点および追越し点の間隔は進行につれてやや短くなる。(3)波高にくらべて各振幅は規則的に変動している。(4) A_1 は $X/3$ および X の間隔で変動するのが目立ち A_2 および A_3 は X の間隔で変動するのが目立つ。そして進行にともなって変動の振幅が大きくなり、非線型性

を強くしている。(b) 図の資料は X が長く一つの追越し間隔内でしか変動の様子がわからないが、(a) 図と基本的に一致した変動を示している。

(2) 周波数・波数スペクトル

図-6 (a) および (b) は、式 (6) によって求めた周波数・波数スペクトルである。(a) 図は測定点 65 から 72 までの追越し間隔で、(b) 図は測定点 13 から 72 までの発生間隔内でそれぞれ解析したものである。図は周波数と波数を平面上にとり、垂直軸に振幅（実線で示す）と初期位相（点線で示す）をとった3次元的な図であり、波数は式 (9) によって k_n に変換してある。また太い曲線は微小振幅波理論による波数と周波数の関係

$$2\pi f = \sqrt{kg \tanh kh} \dots \dots \dots (13)$$

を示したものである。(a) 図から次のことがわかる。

(1) 振幅 $A(k_0, f_5)$, $A(k_0, f_{10})$, $A(k_0, f_{15})$ および $A(k_0, f_{20})$ をもつ各成分波は、原点を通る直線上にあるから同じ波速をもっていること、初期位相はいずれも 0 に近いこと、そして振幅は高周波数になるほど小さくなっていること、などから有限振幅波を構成するが、その波速は周波数 f をもつ微小振幅波と一致する。そしてこれが主峯となっている。

(2) $A(k_1, f_{10})$ をもつ成分波は微小振幅波と同じ波速である。

(3) $A(k_1, f_5)$ はかなり大きな値をもっている。

なお、(b) 図についても、初期位相の値が異なる点を除いてほぼ (a) 図と同じであることがわかる。図-7 (a) および (b) は、各成分波の中で振幅が大きく、かつ波速を異にする三つの成分波の進行状態を $(x-t)$ ダイアグラムで表示したものである。この図より次のことがわかる。

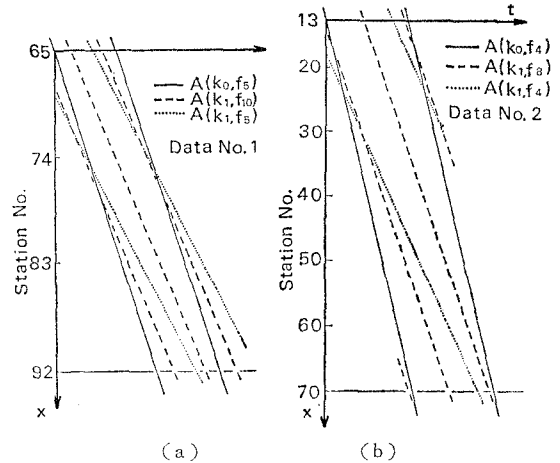


図-7 $(x-t)$ ダイアグラムで表示した成分波の進行状態

(1) 二次波峯の発生点 ((a) 図では測定点 77, (b) 図では測定点 13 と 70) では、実線で示す波と破線で示す波がほぼ同位相であるが、点線で示す波はやや位相がずれている。

(2) 図-3 において破線で示されるような成分波は存在しないことから、2次波峯の発生および追越し現象は、種々の成分波が合成された結果として生ずる見掛けの現象である。

(3) 二次波峯の発生間隔

解析した2例によれば、二次波峯現象を構成する成分波の中には、基本波（主峯となって現われている有限振幅波の基本成分波）の2倍周波数をもつ微小振幅波が存在しており、この微小振幅波の波長と基本波の波長によって二次波峯の発生間隔が決まることが推定される。そして次のような関係式によって、発生間隔 X が与えられる。

$$\frac{XT}{L_c} + \frac{T}{2} = \frac{XT}{2L_2}$$

$$\frac{X}{L_c} = \frac{L_2}{L_c - 2L_2} \dots \dots \dots (14)$$

ここで L_c は基本波の波長すなわち主峯の波長であり、 L_2 は上記微小振幅波の波長である。図-8 には式 (14) の値を点線で示すとともに、同式で基本波の波長を1割増やして計算した値を太線で示した。さらに H/h が 0.1, 0.3 および 0.5 の

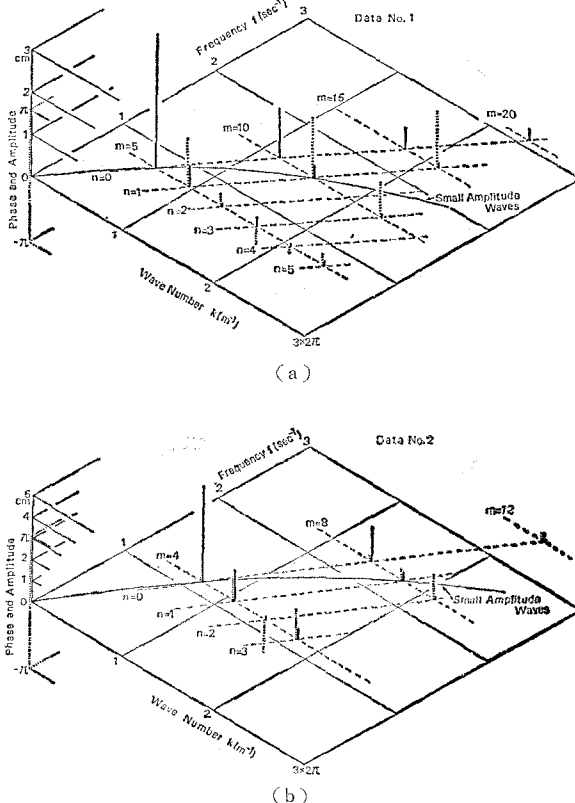
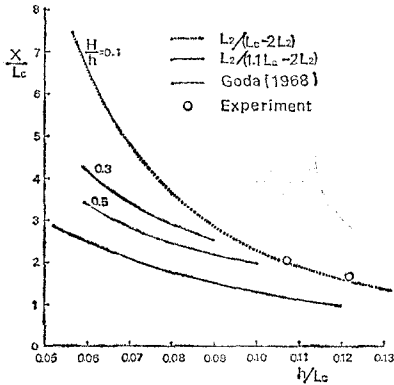


図-6 周波数・波数スペクトル



図—8 二次波峯の発生間隔

場合の合田の結果も示してある。図より次のことがわかる。

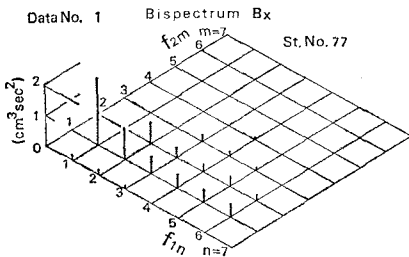
(1) 式 (14) は $H/h=0.1$ の場合の合田の結果と一部で一致し、実験値は点線上にプロットされる。

(2) H/h が大きくなって有限振幅波に近づくとき X/L_c が小さくなるという合田の結果と、基本波の波長を 1 割増やした式 (14) の結果とは、傾向が一致している。

(4) bispectrum

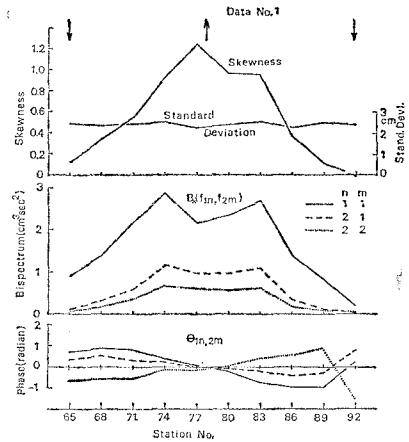
図—6 (a) に示したように、二次波峯を構成する成分波の振幅、波速、および初期位相がわかっているため、この記録に bispectrum 解析を適用して不規則な波の非線型性を調べる基礎資料を得ようとした。

図—9 は bispectrum の一例で、二次波峯の発生点(測定点 77)におけるものである。この図より基本周波数をもつ各成分波間の干渉が卓越し、これらの成分波と他の高周波数をもつ成分波との間かなり強い干渉があることがわかる。このことは、現地波浪のスペクトルにピー



図—9 bispectrum の一例

クがある場合の bispectrum と同じ傾向である。図—10 は skewness, 標準偏差, bispectrum, および位相を示したもので、測定点 65 から 92 までの追越し間隔内で 30 cm 間隔に計算してある。各点での標準偏差の値はそれほど変化していないが、skewness は発生点で最大値を示し、追越点で最小になることがわかる。これは図—3 において、発生点では波形の山が尖り、追越点では正弦



図—10 統計量と bispectra の場所的変動

波に近いということからもわかることである。bispectrum は $B_X(f_{11}, f_{21})$, $B_X(f_{12}, f_{21})$ および $B_X(f_{12}, f_{22})$ の値を示してあるが、いずれも測定点 74 と 83 の所にピークがあり、追越し点で最小になっている。そして測定点 92 を除いてすべて $B_X(f_{11}, f_{21}) > B_X(f_{12}, f_{21}) > B_X(f_{12}, f_{22})$ という関係がある。位相 θ の値はいずれも発生点で 0 であり、その前後で符号が逆になる。前方では $\theta_{11, 21}$ と $\theta_{12, 21}$ が正の値で、 $\theta_{12, 22}$ が負の値である。追越し点の場合は、はっきりしないが 0 に近づく傾向があるようである。

4. 結 論

規則波を発生させる場合にみられる二次波峯現象を解析してつぎのような結論を得た。

(1) 波形の変動が著しくなくて主峯の速度が一定とみなせる場合には、周波数・波数スペクトルを調和解析の手法によって求めることができる。

(2) 波高の値が場所的に複雑に変動していても、 t 軸上の波形記録を周波数に分解したときの振幅は場所的に規則的な変動を示している。

(3) 周波数と波数の間には、線型理論による関数関係とは別の関係があり、1 対 1 の対応関係ではない。

(4) 成分波の中には基本波の 2 倍周波数をもつ微小振幅波が存在し、これが二次波峯の発生間隔を決定するらしいこと、そしてこの波は発生点で基本波と同位相である。

(5) 不規則波の場合に周波数・波数スペクトルを求めることは困難であるが、位相を考慮した bispectrum によって波形の上下非対称および前後非対称などの様子がわかるものと思われる。

今後、実験室内での風波および現地波などの不規則波に関しても、周波数と波数の関係を調べたいと思っている。

最後に、本研究に際し、ご指導を賜った京都大学岩垣雄一教授に深く感謝の意を表するとともに、実験および解析に大いに助力を頂いた当研究室の風間健司技官ならびに学部学生藤岡可三君に謝意を表する。なお、この研究は文部省奨励研究費による研究の一部であることを付記する。

参 考 文 献

- 1) Tukey, J. W. : What can Data Analysis and Statistics Offer Today?, Proc. Ocean Wave Spectra, 1963, pp. 347-351
- 2) Hasselmann, K., Munk, W. and MacDonald, G. : Bispectra of Ocean Waves, Proceedings of the Symposium on Time Series Analysis Held at Brown University, John Wiley & Sons, Inc., 1963, pp. 125-139
- 3) Hasselmann, K. : On the Non-Linear Energy Transfer in a Gravity-Wave Spectrum, Part I. General Theory, J. Fluid Mech., Vol. 12, 1962, pp. 481-500.
- 4) Cote, L. J. et al : The Directional Spectrum of a Wind Generated Sea as Determined from Data Obtained by the Stereo Wave Observation Project, Meteorol. Papers, N. Y. U., Coll. Eng., Vol. 2, No. 6, 1960, pp. 1-88
- 5) 柿沼忠男・石田昭・門司剛至 : 記録にもとづく海岸波浪の非線型性の解析, 第15回海岸工学講演会講演集, 昭43.12, pp. 73-79
- 6) Miche, M., Mouvements Ondulatoires de la Mer en Profondeur Constante ou Decroissante, Ann. des Ponts et Chausees, Tome 114, 1944. (Undulatory Movements of the Sea in Constant or Decreasing Depth, Translation by Lincoln, M. M. and Chevron, R. R., Univ. of Calif., Inst. of Eng. Res., Wave Research Lab., Series 3, Issue 363, 1954.)
- 7) Horikawa, K. : Secondary Wave Crest Formation, Trans. of JSCE., No. 66, Jan. 1960
- 8) 合田良実 : 造波水路における波浪実験の二, 三の問題点について, 第15回海岸工学講演会講演集, 昭43.12, pp. 50-57