

流れを遡る波のエネルギーの減衰について

岩 崎 敏 夫*・佐 藤 道 郎**

1. 序 論

波が流れのない水域あるいは弱いところから次第に流速を増していくような流れを遡上していく場合、いわゆる流れの stopping action や波の radiation stress を媒介とした energy の授受により波高が増大し、やがては砕波するということが Unna¹⁾²⁾³⁾, Yu⁴⁾, Longuet-Higgins & Stewart⁵⁾ らによって示されている。

しかし、上述のような状況のもとで波は現実には上記の波高を増大させる作用と、流れの乱れの影響等による energy の逸散として波高を減少させる作用との相反する作用を流れによって受け、実際の波高変化はこの両者によって規定されるはずである。したがって、流れによる波の波高変化を明確に把握するためには、流れにおける波の energy の逸散がどのように見積られるかを知ることが必要となる。そこで、本研究では水深が一樣な流れを波が遡上する場合、波の energy の逸散ならびにそれに伴う波高変化がどのように見積られるかということを明らかにする目的で実験を行ない、また理論的な考察を試みた。

2. 実 験

(1) 実験装置および方法

実験装置は図-1に示す。長さ20m、幅0.8m、高さ0.5mの両面強化ガラス張りで、可傾斜循環流式となっており、下流端にはプランジャータイプ造波機が設置してある。流速測定には光電管式プロペラ流速計、波高測定には電気抵抗線式波高計を用い電磁オシログラフに記録させた。波高の測定箇所は造波機より4m離れたところから10mの間を50cmごとに21点とった。波高は最初4点ずつ同時に記録したが、波高変化の測定の精度を

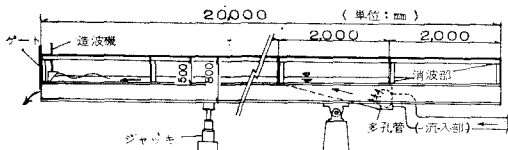


図-1 実験装置

上げる必要上、計器の特性の差異による誤差の生じることを避けるために、測定台車に取り付けた一つの波高計のみを用い、各測点ごとに定期的になってから8波程度の波を測定し、その平均をとって測点の波高とした。

(2) 実験結果および考察

表-1に実験条件を示す。この実験は造波機のストローク、周期ならびに水深を一定に保ったまま流速を変化させて行なったものであるが、各流速に対応した波高の減衰の状況を図-2に示した。これから流速が増すにつれ波高の減衰も大きくなることがわかる。したがって、通常、波の減衰を考える場合、波の境界層での摩擦による energy の逸散が問題とされてきたわけであるが、流れの存在も波の減衰においてかなり重要な要素となり得ることが推察できよう。Inman と Bowen⁶⁾ は弱い流れを波に加え sand bed の変形に関する実験のなかで smoothed bed ならびに rippled bed における波高の減衰を調べて実験結果から波高変化が、 $H=H_0e^{-\alpha x}$ のような関係があるとみて α を求めた。ここに、 H : 波高、 H_0 : 基準波高、 α : 波高の減衰率、 x : 距離を表わす。本実験においては α の値は表-2のようになった。また、Longuet-Higgins と Stewart⁵⁾ によれば波と流れの energy flux Q は式(1)で与えられる。

$$G=E(C_g+U_m)+\frac{1}{2}\rho h U_m^3+S_x U_m \cdots \cdots (1)$$

ただし、 $E=1/8\rho g H^2$, $S_x=E(2C_g/C-1/2)$, C : 流れに対する波速、 C_g : 同じく群速度、 U_m : 流れの速度 U

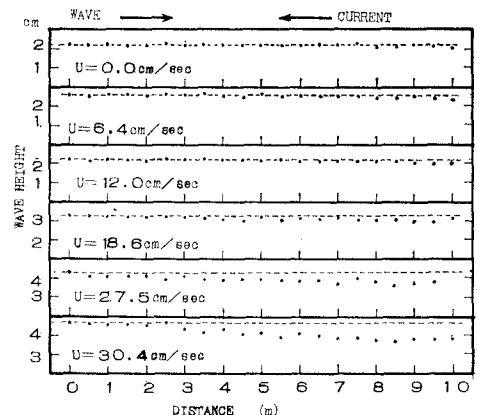


図-2 波高変化

* 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

** 学生会員 工修 東北大学大学院学生

とにおいて計算し実験値と比較してある。表の f_w (計算) から明らかなように $|U/U_b|=1$ に近づくにつれて大きくなり、以後流速が増大するにつれて f_w は減少するという結果となり、実験結果はこういったいき方では説明がつかないことがわかる。このような結果から energy の逸散を考える場合、 E_d の実体をもっと明確にすること、さらに energy の逸散にとって波の境界層や流れの境界層における shear が重要な意味をもって来るはずで、流速を一様分布とした扱いから、より実際に近いものを考えて扱う必要があると考えられる。そこで、以下にそういった点をふまえて流れの場での波の energy の逸散とそれに伴う波高変化がどのように表わされるかということについて理論的に考察を試みる。

3. 流れを遡上する波の減衰の理論的考察

図-3 に示すような等流を波が伝播する場合を考えて $\partial\tau_{xy}/\partial y$ にくらべて、 $\partial\sigma_x/\partial x$, $\partial\sigma_y/\partial y$, $\partial\tau_{xy}/\partial x$ (σ_x , σ_y , τ_{xy} は応力成分) を無視すれば、運動方程式ならびに波の連続方程式は次のように与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\rho}{2} (U+u)^2 + v^2 \right\} + \left\{ (U+u) \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\rho}{2} (U+u)^2 + v^2 + \rho g (y+H_L) \cos \theta + P \right\} = (U+u) \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (15)$$

また、式 (12) の両辺に ρ を掛ければ x 軸方向の運動量方程式が得られて次のようになる。

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left\{ (U+u) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial (U+u)}{\partial y} \right\} = -\rho g \sin \theta - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d}{dx} \int_0^{h+\eta} \left\{ \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) + \rho g (y+H_L) \cos \theta + P \right\} u dy + \frac{d}{dx} \left[\int_0^{h+\eta} \left\{ \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) \right. \right. \\ & \left. \left. + \rho g (y+H_L) \cos \theta \right\} U dy - \int_0^{h+\eta} \rho g U dy \left(\frac{h}{2} + H_L \right) \cos \theta \right] = \int_0^{h+\eta} u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

左辺第1項は流れに対する相対的な波自身による energy flux に関するもので、energy 密度を E 、流れに対する波自身の energy 輸送速度を C_g^* とすれば $d/dx (E \cdot C_g^*)$ で表わし得る。第2項は流れによって輸送さ

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + (U+u) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial (U+u)}{\partial y} \\ & = -g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + (U+u) \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \\ & = -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし、 U は流れの速度、 u , v は波の速度成分、 t は時間を表わす。

これらの基本式をもとにして、まず波と流れの combine された運動における「波の energy balance」を求めておく。いま、(12) $\times (U+v)$ + (3) $\times \rho v$ から波と流れの結合された系の total の energy 方程式が得られる。この場合、potential energy の基準線として底あるいは水面にとることはできないので $y = -H_L$ を通る水平線をとることにすると $dH_L/dx = \tan \theta$ となり、次のようになる。

(15) - (16) $\times U$ を求めて dx だけ離れた区間 I, II で底から水面まで積分する。底は非浸透性とするれば、底ならびに水面を通じての energy flux はなく、波一周期の平均をとり bar で表わして $\delta_x \rightarrow 0$ なる極限操作により平均運動が定常的であるとすれば最終的に次のように表わすことができる。

れる波の energy に関するもので、その輸送速度を U_c^* とすれば、 $d/dx (E U_c^*)$ で表わされる。ここで U_c^* は次の関係を満たす速度である。

$$U_c^* = \int_0^{h+\eta} \left\{ \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) + \rho g (y+H_L) \cos \theta \right\} U dy \bigg/ \int_0^{h+\eta} \left\{ \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) + \rho g (y+H_L) \cos \theta \right\} dy \quad \dots\dots\dots (18)$$

したがって式 (17) は静止系に対する見掛けの輸送速度を C_g で表わせば次のように表わすことができる。

$$\frac{d}{dx} (E \cdot C_g) = \frac{d}{dx} \left\{ E (C_g^* + U_c^*) \right\} = \int_0^{h+\eta} u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \quad \dots\dots\dots (19)$$

一般に波の energy balance は次のような式で表わされる。

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E \cdot C_g) - J(x, t) = 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

$J(x, t)$ は湧き出しに相当するもので energy の逸散はこれに相当する。式(19)は一次元の定常的な場合で C_g が波自体のものと流れによる輸送速度の加わった特殊な例とみることができる。式(19)右辺は湧き出し $J(x, t)$ に相当するもので、これが、さきの $-Ed$ にあたるものである。

さて、式(19)をもとに波の energy の逸散量とそれに伴う波高変化量を計算するにあたり、式(12), (13), (14)の基礎方程式から波の運動の表現を求めなければならないが、そのままの形で解くことは困難であるので摩擦項を省略して流れに流速分布形を与えて解く通常のいき方をとることにする。 $\cos \theta \rightarrow 1$ とみなせる程度の大きさとする線型化された運動方程式と連続方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

流れの速度を

$$U = U(y) = U_1 f(y) \quad U_1 = U(h) \quad \dots\dots\dots (24)$$

で表わして、自由水面における境界条件は近似的に次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} &= v \\ \frac{\partial P}{\partial t} + U_1 \frac{\partial P}{\partial x} &= v \rho g \end{aligned} \right\} \text{at } y=h \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$A = \frac{H}{2} \cdot \frac{U_1 - C}{\sinh mh \left\{ \frac{U_1}{1+m} \int_0^h \frac{f''(t) \sinh m(h-t) \sinh mt}{(U_1 f(t) - C) \sinh mh} dt \right\}} \quad \dots\dots\dots (33)$$

いま、流れが二次元乱流とみなせる場合、底が滑面のときには、断面流速分布形は次式で表わすことができる。

$$U = \begin{cases} \{5.5 + (1/\kappa) \ln (U_* y/\nu)\} U_* & (y_s \leq y \leq h) \quad \dots\dots\dots (34) \\ (U_*^2/\nu) y & (0 \leq y \leq y_s) \quad \dots\dots\dots (35) \end{cases}$$

$$y_s = 11.6\nu/U_* \quad (\text{粘性底層の厚さ}) \quad \dots\dots\dots (36)$$

ただし、 κ (Karman 定数) = 0.4, U_* : 摩擦速度である。これより、 $y_s \leq y \leq h$ では

$$F_2 = \frac{1 + \frac{U_*}{\kappa m} \int_{y_s}^y \frac{B(t) \sinh m(y-t) \sinh mt}{\sinh my} dt}{1 + \frac{U_*}{\kappa m} \int_{y_s}^h \frac{B(t) \sinh m(h-t) \sinh mt}{\sinh mh} dt} \quad \dots\dots\dots (39)$$

次のような流れ関数 ψ を導入する。

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (27)$$

式(21), (22) から P を消去し式(27)を用いて次式を得る。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \psi - U_1 f''(y) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

ただし、 $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, prime は y に関する微分である。解を $\psi = \phi(y) e^{im(x-Ct)}$ と仮定して式(28)に代入して次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \left(m^2 + \frac{U_1 f''}{U_1 f - C} \right) \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

底の条件から $\phi(0) = 0$ である。式(29)から次式が得られる。

$$\begin{aligned} \phi(y) &= A \sinh my \\ &+ \frac{U_1}{m} \int_0^y \frac{f''(t) \sinh m(y-t)}{U_1 f(t) - C} \phi(t) dt \end{aligned} \quad (A: \text{const}) \quad \dots\dots\dots (30)$$

ϕ が $U_1/\sqrt{gh}$ のべき級数で表わされるものとして、形式的に $\phi(y) = \sum_0^\infty (U_1/\sqrt{gh})^n \cdot \phi_n(y)$ として式(30)に代入し、両辺の係数を等しくおいて U_1 が小さいとき $U_1/\sqrt{gh}$ の一次までの解は次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi(y) &= A \sinh my + \\ &+ \frac{U_1}{m} \int_0^h \frac{f''(t) \sinh m(y-t) \sinh mt}{U_1 f(t) - C} dt \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\text{水面形を } \eta = \frac{H}{2} e^{im(x-Ct)} \quad \dots\dots\dots (32)$$

として式(25)より A を求めると次式のようにになる。

$$\begin{aligned} U &= U_1 f(y) = U_1 \{1 + K \cdot \ln (y/h)\} \\ &= U_1 + (U_*/\kappa) \ln (y/h) \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$K = 1/k \{5.5 + (1/k) \ln (U_* h/\nu)\}$$

と表わすことができるから、流速分布を対数分布と仮定した場合、式(31), (33)から $\phi(y)$ は次のように表わされる。

$$\phi(y) = \frac{H}{2} \cdot (U_1 - C) \cdot \frac{\sinh my}{\sinh mh} \cdot F_2 \quad \dots\dots\dots (38)$$

ただし、

$$B(t) = \frac{1}{\{C - U_1 - (U_*/\kappa) \ln(t/h)\} t^2} \dots\dots\dots (40)$$

したがって、波の速度成分 u , v は $\psi = \phi(y) e^{im(x-Ct)}$ と式(38), (27)から実部をとって、次のように表わされる。

$$u = \frac{H}{2} \cdot \frac{m(C-U_1) \cosh my}{\sinh mh} F_1 \cdot \cos m(x-Ct) \dots\dots\dots (41)$$

$$v = \frac{H}{2} \cdot \frac{m(C-U_1) \sinh my}{\sinh mh} F_2 \cdot \sin m(x-Ct)$$

ただし、

$$F_1 = \frac{1 + \frac{U_*}{\kappa m} \int_{y_s}^y \frac{B(t) \cosh m(y-t) \sinh mt}{\cosh my} dt}{1 + \frac{U_*}{\kappa m} \int_{y_s}^h \frac{B(t) \sinh m(h-t) \sinh mt}{\sinh mh} dt} \dots\dots\dots (43)$$

次に、表面条件式 (26) を y で微分し、式 (21) を x で微分したもの、同じく t で微分したものから P を消去して式(27)を考慮すれば次の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} (C-U_1)^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=h} \\ + \left\{ (C-U_1) \frac{\partial U_1}{\partial y} \Big|_{y=h} - g \right\} \phi_{y=h} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

この式に式 (38) を代入して C を求めれば次のようになる。

$$C = U_1 - \frac{U_* \tanh mh}{2\kappa mh F_1(h)} + \sqrt{\left(\frac{U_* \tanh mh}{2\kappa mh F_1(h)} \right)^2 + \frac{g \tanh mh}{m F_1(h)}} \dots\dots\dots (45)$$

群速度 C_g は $C_g = d(Cm)/dm$ より計算して次式を得る。

$$C_g = U_1 + \frac{(C-U_1)}{g + \{1 + D_1 \cdot (C-U_1)\} \left\{ g - (C-U_1) \frac{U_*}{\kappa h} \right\}} \left[\begin{aligned} & \{2mh \operatorname{cosech} 2mh + D_1(C-U_1) - D_2\} \\ & \times \left\{ g - (C-U_1) \frac{U_*}{\kappa h} + g \right\} \end{aligned} \right] \dots\dots\dots (46)$$

ただし、

$$D_1 = \frac{\frac{U_*}{\kappa m} \int_{y_s}^h \frac{B(t) \sinh m(h-t) \sinh mt}{\left(C - U_1 - \frac{U_*}{\kappa} \ln \frac{t}{h} \right)} dt}{\sinh mh + \frac{U_*}{\kappa m} \int_{y_s}^h B(t) \sinh m(h-t) \sinh mtdt} - \frac{\frac{U_*}{\kappa m} \int_{y_s}^h \frac{B(t) \cosh m(h-t) \sinh mt}{\left(C - U_1 - \frac{U_*}{\kappa} \ln \frac{t}{h} \right)} dt}{\cosh mh + \frac{U_*}{\kappa m} \int_{y_s}^h B(t) \cosh m(h-t) \sinh mtdt} \dots\dots\dots (47)$$

$$D_2 = \left. \begin{aligned} & \frac{\cosh^2 mh + \frac{U_*}{2\kappa} \int_{y_s}^h B(t) \{t \cdot \cosh 2m(h-t) - (h-t) \cosh 2mt + h\} dt}{\cosh^2 mh + \frac{U_*}{m\kappa} \cdot \cosh mh \int_{y_s}^h B(t) \cosh m(h-t) \sinh mtdt} \\ & - \frac{\sinh^2 mh + \frac{U_*}{2\kappa} \int_{y_s}^h B(t) \{t \cdot \cosh 2m(h-t) + (h-t) \cosh 2mt - h\} dt}{\sinh^2 mh + \frac{U_*}{m\kappa} \cdot \sinh mh \int_{y_s}^h B(t) \sinh m(h-t) \sinh mtdt} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (48)$$

以上の計算をもとに、波の energy の逸散量ならびに波高変化について計算を行なう。逸散 energy $\overline{E_d}$ は、底面のごく近傍の波の境界層におけるもの $\overline{E_{dB}}$ とそれ以外の内部せん断力によるもの $\overline{E_{dI}}$ とに分けて考え、波の境界層厚さを δ とすると次のようになる。

$$\overline{E_d} = \overline{E_{dI}} + \overline{E_{dB}} \left. \begin{aligned} & = - \int_{\delta}^{h+\eta} u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy - \int_0^{\delta} u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

ここで計算するのは $\overline{E_{dI}}$ であるが、波高が水深にくらべて小さいとみなせる場合には次のように表わせる。

$$\overline{E_{dI}} = - \int_{\delta}^{h+\eta} u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \approx - \int_{y_s}^h u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \dots\dots\dots (50)$$

いま、 ϵ を渦動粘性係数として τ_{xy} を次のように表わす。

$$\tau_{xy} = \rho \epsilon \frac{\partial(U+u)}{\partial y} \dots\dots\dots (51)$$

この ϵ に対して流れ U に対して有効な値をとるものと考えてみると ϵ は次式で表わされる。

$$\epsilon = \kappa h U_* \left(1 - \frac{y}{h} \right) \frac{y}{h} \dots\dots\dots (52)$$

式(51)を(50)に代入して u の周期性から $\overline{E_{dI}}$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \overline{E_{dI}} &= - \int_{y_s}^h u \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \epsilon \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \\ &= \int_{y_s}^h \rho \epsilon \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy + \left[\frac{\rho \epsilon}{2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial y} \right]_{y=y_s} \\ &= \frac{1}{4} \rho g H^2 \cdot G \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (53)$$

式(41)から u , (52)から ε を代入して G は次のとおりである。

$$G = \frac{U_*^3}{2\kappa gh} \left\{ \frac{m(C-U_1)}{\sinh mh + \frac{U_*}{\kappa m} \int_{y_s}^h B(t) \sinh m(h-t) \sinh mtdt} \right. \\ \times \left[\int_{y_s}^h (h-y)y \left\{ \left(\frac{\kappa m}{U_*} + \frac{B(y)}{m} \right) \sinh my + \int_{y_s}^y B(t) \sinh m(y-t) \sinh mtdt \right\}^2 dy \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\kappa}{U_*} (h-y_s)y_s \left(\frac{\kappa m}{U_*} + \frac{B(y_s)}{m} \right) \sinh 2my_s \right] \right\} \dots\dots\dots (54)$$

したがって、式(19)と(53)から流れの渦動粘性による波の energy の逸散に伴う波高変化は、

$$\frac{d}{dx}(E \cdot C_g) = -\frac{1}{4} \rho g H^2 \cdot G \quad E = \frac{1}{8} \rho g H^2$$

を $x=0$ で $H=H_0$ の条件のもとに解いて、次に示すように指数関数的に波高が減衰するという結果が得られる。

$$H = H_0 e^{-\alpha x} \quad \alpha = G/C_g \dots\dots\dots (55)$$

4. 結 語

水深が一樣な流れを波が邇上する場合、流速が大きくなると減衰も著しくなることを実験的に調べ、その場合の波高変化がどのように見積られるかを、波が基本的に流れの渦動粘性によって energy を逸散すると考えて理論的に考察を行なった。今回は波の境界層での energy の逸散についてはふれなかったが、今後、それも含めて理論的、実験的に検討を進めていきたい。

参 考 文 献

- 1) Unna, P. J., (1941): "White Horses", Nature, London, 148.
- 2) Unna, P. J., (1942): "Waves and tidal streams", Nature London, 149
- 3) Unna, P. J., (1947): "Sea wavns", Nature, London, 159
- 4) Yu, Yi-Yuan., (1952): "Breaking of waves by an opposing currents", Trans. A. G. U., Vol. 33, No. 1
- 5) Longuet-Higgins & Stewart., 1960. "The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents", Jour. of Fluid Mech, Vol. 10
- 6) Inman & Bowen., (1962): "Flume experiments on sand transport by waves and currents", Proc. 8th conf. Coastal Engineering, 137-150 Mexico.
- 7) Witham, G. B., (1962): "Mass, monentum and energy flux in water waves", Jour. of Fluid Mech, Vol. 12
- 8) Jonnson, I. G., (1966): "The friction factor for a current superimposed by wawes", Basic Research Progressive Report, No. 11 Coastal Engineering Laboratory, Techn. Un. of Denmark.