密度流の問題 (4)

浜田徳一*

1. 密度一定の2層の間に密度が漸次変化する混合層の存する場合の，shear flow による内波の不安定を考える。

これは，上下両層の密度差が少ないとき，河口において河水層，海水層の間に混合層が存在する問題に該当する。

Richardson 数を R_i で表わし，$R_i > 1/4$ の場合においては，一般に安定であることがすでに示されているから (L.N. Howard (1961)), $0 < R_i < 1/4$ の場合を考える。

せつ動のない状態で各層の条件はつぎのようにおかれる。

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{II層} & \\
(-)\infty < y \leq 0 & \bar{\rho} = \rho^{(2)} = \text{一定} \quad U = U^{(2)} = 0 \\
\text{III層} & \\
0 \leq y \leq y_1 & \bar{\rho} = \rho^{(3)} = \rho^{(2)} e^{-\alpha y} \fallingdotseq \rho^{(2)}(1 - \alpha y) \\
 & U = U^{(3)} = ay \\
\text{I層} & \\
y_1 \leq y < \infty & \bar{\rho} = \rho^{(1)} = \rho^{(2)}(1 - \alpha y_1) \\
 & U = U^{(1)} = ay
\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(1)$$

ただし αy_1 は 0.02 の程度であり，a は正の定数とする。

この取扱いの特徴はI層で $U^{(1)}$ が線形に上に向って増加していることであり，$U^{(1)} = ay_1$ の場合については，すでに J.W. Miles & L.N. Howard (1964) により検討が行なわれている。I層，II層が $\pm\infty$ までとられていることは，内波の波長に対しそれらの厚さが十分大きいことを意味しているが，実際問題としては波長の2～3倍程度の厚さがあれば十分であろう。

流関数 ψ を

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

で定義し，

$$\psi = \varphi(y) e^{ik(x-ct)}$$

とすれば，線形の近似において φ は次式で満足する。

II，I層にて

$$\varphi_{yy}{}^{(i)} - k^2 \varphi^{(i)} = 0 \quad (i = 2, 1) \quad \cdots\cdots(2)$$

III層にて

$$\varphi_{yy}{}^{(3)} - \alpha \varphi_y{}^{(3)} - \left\{ k^2 - \alpha g \frac{1}{(c_r - U + ic_i)^2} + \alpha \frac{a}{c_r - U + ic_i} \right\} \varphi^{(3)} = 0 \quad \cdots\cdots(3)$$

II，I層においては $\varphi \sim e^{\pm ky}$ と表わされることとなり，$y=0$ における等密度面の変位 $\eta^{(2)}$, $y = y_1$ における等密度面の変位 $\eta^{(1)}$ をそれぞれ

$$\left.\begin{array}{l}
\eta^{(2)} = A_0{}^{(2)} e^{ik(x-ct)} \\
\eta^{(1)} = A_0{}^{(1)} e^{ik(x-ct)}
\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(4)$$

とすれば，II，I層における波の性質はつぎのように示される。

II層にて

$$\left.\begin{array}{l}
\psi^{(2)} = -cA_0{}^{(2)} e^{ky} e^{ik(x-ct)} \\
u^{(2)} = kcA_0{}^{(2)} e^{ky} e^{ik(x-ct)} \\
v^{(2)} = -ikcA_0{}^{(2)} e^{ky} e^{ik(x-ct)} \\
p^{(2)} = -\rho^{(2)} gy + \rho^{(2)} kc^2 A_0{}^{(2)} e^{ky} e^{ik(x-ct)}
\end{array}\right\} \cdots(5)$$

I層にて

$$\left.\begin{array}{l}
\psi^{(1)} = A_0{}^{(1)}(ay_1 - c) e^{-k(y-y_1)} e^{ik(x-ct)} \\
u^{(1)} = A_0{}^{(1)} k(ay_1 - c) e^{-k(y-y_1)} e^{ik(x-ct)} \\
v^{(1)} = ikA_0{}^{(1)}(ay_1 - c) e^{-k(y-y_1)} e^{ik(x-ct)} \\
p^{(1)} = \dfrac{1}{\alpha}(\rho^{(1)} - \rho^{(2)}) g - \rho^{(1)} g(y - y_1) \\
\qquad + \rho^{(1)} A_0{}^{(1)}(ay_1 - c) e^{-k(y-y_1)} \\
\qquad \times (ck - ayk - a) e^{ik(x-ct)}
\end{array}\right\} \cdots(6)$$

III層では式 (3) において $\varphi = e^{\frac{\alpha}{2}y} X$ とおけば

$$X_{yy} + \left\{ -k^2 - \alpha \frac{a}{c - U} + g\alpha \frac{1}{(c - U)^2} - \frac{\alpha^2}{4} \right\} X = 0 \quad \cdots\cdots(7)$$

いま $U(y_c) = c$ とすれば，$U(y_c) = c_r + ic_i$，ゆえに y_c は complex となり，$U = ay$ を用いて，$y_c = y_{c_r} + iy_{c_i}$ にて

$$y_{c_r} = \frac{c_r}{a}, \quad y_{c_i} = \frac{c_i}{a} \quad \cdots\cdots(8)$$

式 (7) に Boussinesq 近似を用い

$$X_{yy} + \left\{ -k^2 + g\alpha \frac{1}{a^2 (y - y_c)^2} \right\} X = 0 \quad \cdots\cdots(9)$$

これを解いて

$$\begin{array}{l}
\varphi = e^{\frac{\alpha}{2}y} (AX_+ + BX_-) \\
X_+ = (y - y_c)^{\frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}} \left\{ 1 + \dfrac{k^2}{4 + 2\delta}(y - y_c)^2 \right. \\
\qquad + \dfrac{k^2}{16 + 4\delta} \dfrac{k^2}{4 + 2\delta}(y - y_c)^4
\end{array}$$

---

* 正会員　工博　運輸省港湾技術研究所

$$+\frac{k^2}{36+6\delta}\frac{k^2}{16+4\delta}\frac{k^2}{4+2\delta}(y-y_c)^6$$
$$+\frac{k^2}{64+8\delta}\frac{k^2}{36+6\delta}\frac{k^2}{16+4\delta}\frac{k^2}{4+2\delta}(y-y_c)^8+\cdots\Bigg\}\Bigg) \quad \cdots\cdots(10)$$

X_- は X_+ で $\delta\to(-)\delta$ とおいたものである。

$$\delta=\sqrt{1-\frac{4g\alpha}{a^2}}\quad\left(\frac{g\alpha}{a^2}=R_i\right)\cdots\cdots(11)$$

はこの問題では実かつ正であり $1>\delta>0$ を満足する。

この問題では変形された Bessel 関数を用いて，式(10)を表わすことができるが，後に用いられる代数計算を考慮して，$X_\pm$ を使用してゆく。このようにしてIII層においては

$$\left.\begin{aligned}
\psi^{(3)}&=e^{\frac{\alpha}{2}y}(AX_++BX_-)e^{ik(x-ct)}\\
u^{(3)}&=\left\{-\frac{\alpha}{2}e^{\frac{\alpha}{2}y}(AX_++BX_-)-e^{\frac{\alpha}{2}y}\right.\\
&\quad\left.\times(AX_+'+BX_-')\right\}e^{ik(x-ct)}\\
v^{(3)}&=ike^{\frac{\alpha}{2}y}(AX_++BX_-)e^{ik(x-ct)}\\
p^{(3)}&=\frac{g}{\alpha}(\rho^{(2)}e^{-\alpha y}-\rho^{(2)})-\rho^{(2)}e^{-\frac{\alpha}{2}y}\\
&\quad\times\left[\left\{\frac{\alpha}{2}(AX_++BX_-)+(AX_+'+BX_-')\right\}\right.\\
&\quad\left.\times(c-ay)+a(AX_++BX_-)\right]e^{ik(x-ct)}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(12)$$

ただし X_+', X_-' はそれぞれ X_+, X_- の y についての微分値を意味する。

式(5)，(6)および式(12)からこの場合の特性方程式を求める。使用せられる境界条件は

$$\left.\begin{aligned}
&y=0 \quad にて \quad v^{(3)}=v^{(2)},\ p^{(3)}=p^{(2)}\\
&y=y_1 \quad にて \quad v^{(3)}=v^{(1)},\ u^{(3)}=u^{(1)}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(13)$$

ただし $y=0$, $y=y_1$ ともに密度の不連続はないことに注意する。得られた特性方程式は

$$\begin{aligned}
&\left[\left(kc-\frac{\alpha c}{2}-a\right)X_{+\langle0\rangle}-cX'_{+\langle0\rangle}\right]\\
&\times\left[\left(k+\frac{\alpha}{2}\right)X_{-\langle y_1\rangle}+X'_{-\langle y_1\rangle}\right]\\
&-\left[\left(kc-\frac{\alpha c}{2}-a\right)X_{-\langle0\rangle}-cX'_{-\langle0\rangle}\right]\\
&\times\left[\left(k+\frac{\alpha}{2}\right)X_{+\langle y_1\rangle}+X'_{+\langle y_1\rangle}\right]=0 \quad\cdots\cdots(14)
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
A&=\frac{\left(ky_c-\frac{\alpha}{2}y_c-1\right)X_{-\langle0\rangle}-y_cX'_{-\langle0\rangle}}{X_{+\langle0\rangle}X'_{-\langle0\rangle}-X_{-\langle0\rangle}X'_{+\langle0\rangle}}aA_0^{(2)}\\
B&=-\frac{\left(ky_c-\frac{\alpha}{2}y_c-1\right)X_{+\langle0\rangle}-y_cX'_{+\langle0\rangle}}{X_{+\langle0\rangle}X'_{-\langle0\rangle}-X_{-\langle0\rangle}X'_{+\langle0\rangle}}aA_0^{(2)}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(15)$$

ただし $\langle0\rangle$ は $y=0$ を，$\langle y_1\rangle$ は $y=y_1$ を意味する。式(14)，(15)の使用について，つぎの場合を考える。

(i) $U(y_{c_r})=c_r$ を満足する y_{c_r} は $y=0$ と $y=y_1$ との間に存するものとする。$(y_1>y_{c_r}>0)$

(ii) $0\leq y<y_c$ の時の $y-y_c$ は J.W. Miles (1961, 1963) の singular neutral mode の思想にしたがい，$y-y_c=e^{-i\pi}|y-y_c|$ とする。

(iii) $|y_{c_i}|$ は $y_1-y_{c_r}$, y_{c_r} のいずれに対しても十分ちいさい場合を考え，

$$\left.\begin{aligned}
&(y_1-y_{c_r}-iy_{c_i})^{\frac{1}{2}\pm\frac{\delta}{2}}\fallingdotseq(y_1-y_{c_r})^{\frac{1}{2}\pm\frac{\delta}{2}}\\
&\quad-i\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\delta}{2}\right)y_{c_i}(y_1-y_{c_r})^{\pm\frac{\delta}{2}-\frac{1}{2}}\\
&(y_{c_r}+iy_{c_i})^{\frac{1}{2}\pm\frac{\delta}{2}}\fallingdotseq y_{c_r}^{\frac{1}{2}\pm\frac{\delta}{2}}+i\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\delta}{2}\right)y_{c_i}y_{c_r}^{\pm\frac{\delta}{2}-\frac{1}{2}}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(16)$$

が成立するものとする。

これによりつぎの諸関係が得られる。

$$X_{+\langle y_1\rangle}=(X_{+\langle y_1\rangle})_r-iy_{c_i}(X_{+\langle y_1\rangle})_{i1}\cdots\cdots(17)$$

$$X'_{+\langle y_1\rangle}=(X'_{+\langle y_1\rangle})_r-iy_{c_i}(X'_{+\langle y_1\rangle})_{i1}\cdots\cdots(18)$$

$$X_{+\langle0\rangle}=-ie^{-i\frac{\delta}{2}\pi}(X_{+\langle0\rangle})_{r1}+e^{-i\frac{\delta}{2}\pi}y_{c_i}(X_{+\langle0\rangle})_{r2}\cdots\cdots(19)$$

$$X'_{+\langle0\rangle}=ie^{-i\frac{\delta}{2}\pi}(X'_{+\langle0\rangle})_{r1}-e^{-i\frac{\delta}{2}\pi}y_{c_i}(X'_{+\langle0\rangle})_{r2}\cdots\cdots(20)$$

ただし

$$\begin{aligned}
(X_{+\langle y_1\rangle})_r&=(y_1-y_{c_r})^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}+\frac{k^2}{4+2\delta}(y_1-y_{c_r})^{\frac{5}{2}+\frac{\delta}{2}}+\frac{k^2}{16+4\delta}\frac{k^2}{4+2\delta}(y_1-y_{c_r})^{\frac{9}{2}+\frac{\delta}{2}}\\
&\quad+\frac{k^2}{36+6\delta}\frac{k^2}{16+4\delta}\frac{k^2}{4+2\delta}(y_1-y_{c_r})^{\frac{13}{2}+\frac{\delta}{2}}+\cdots\cdots(21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(X_{+\langle y_1\rangle})_{i1}=(X'_{+\langle y_1\rangle})_r&=\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}\right)(y_1-y_{c_r})^{-\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}+\frac{k^2}{4+2\delta}\left(\frac{5}{2}+\frac{\delta}{2}\right)(y_1-y_{c_r})^{\frac{2}{3}+\frac{\delta}{2}}\\
&\quad+\frac{k^2}{16+4\delta}\frac{k^2}{4+2\delta}\left(\frac{9}{2}+\frac{\delta}{2}\right)(y_1-y_{c_r})^{\frac{7}{2}+\frac{\delta}{2}}+\frac{k^2}{36+6\delta}\frac{k^2}{16+4\delta}\frac{k^2}{4+2\delta}\left(\frac{13}{2}+\frac{\delta}{2}\right)(y_1-y_{c_r})^{\frac{11}{2}+\frac{\delta}{2}}+\cdots\\
&\quad\cdots\cdots(22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(X'_{+\langle y_1\rangle})_{i1}&=\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{\delta}{2}-\frac{1}{2}\right)(y_1-y_{c_r})^{\frac{\delta}{2}-\frac{3}{2}}+\left(\frac{5}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\frac{k^2}{4+2\delta}(y_1-y_{c_r})^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}\\
&\quad+\left(\frac{9}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\frac{k^2}{16+4\delta}\frac{k^2}{4+2\delta}(y_1-y_{c_r})^{\frac{5}{2}+\frac{\delta}{2}}\\
&\quad+\left(\frac{13}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{11}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\frac{k^2}{36+6\delta}\frac{k^2}{16+4\delta}\frac{k^2}{4+2\delta}(y_1-y_{c_r})^{\frac{9}{2}+\frac{\delta}{2}}+\cdots\cdots\cdots(23)
\end{aligned}$$

$$(X_{+\langle0\rangle})_{r1}=y_{c_r}^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}\left(1+\frac{k^2}{4+2\delta}y_{c_r}^2+\frac{k^2}{16+4\delta}\frac{k^2}{4+2\delta}y_{c_r}^4+\frac{k^2}{36+6\delta}\frac{k^2}{16+4\delta}\frac{k^2}{4+2\delta}y_{c_r}^6+\cdots\right)\cdots\cdots(24)$$

$$(X_{+\langle 0\rangle})_{\gamma 2}=(X'_{+\langle 0\rangle})_{\gamma 1}=y_{c_r}{}^{\frac{\delta}{2}-\frac{1}{2}}\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}\right)+\left(\frac{5}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\frac{k^2}{4+2\delta}y_{c_r}{}^2+\left(\frac{9}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\frac{k^2}{16+4\delta}\frac{k^2}{4+2\delta}y_{c_r}{}^4+\left(\frac{13}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\frac{k^2}{36+6\delta}\frac{k^2}{16+4\delta}\frac{k^2}{4+2\delta}y_{c_r}{}^6+\cdots\right\} \quad \cdots\cdots(25)$$

$$(X'_{+\langle 0\rangle})_{\gamma 2}=y_{c_r}{}^{\frac{\delta}{2}-\frac{3}{2}}\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{\delta}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{5}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\frac{k^2}{4+2\delta}y_{c_r}{}^2+\left(\frac{9}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\times\frac{k^2}{16+4\delta}\frac{k^2}{4+2\delta}y_{c_r}{}^4+\left(\frac{13}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{11}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\frac{k^2}{36+6\delta}\frac{k^2}{16+4\delta}\frac{k^2}{4+2\delta}y_{c_r}{}^6+\cdots\right\} \quad \cdots\cdots(26)$$

$X_{-\langle y_1\rangle}$, $X'_{-\langle y_1\rangle}$, $X_{-\langle 0\rangle}$, $X'_{-\langle 0\rangle}$ は $\delta\to(-)\delta$ により，上記の関係から求められる。これらの関係を用いて代数計算の結果，式 (14) はつぎの 2 個の式に帰着する。

$$-\cot\frac{\delta}{2}\pi(M_1-M_2)=y_{c_i}(K_1+K_2) \quad \cdots\cdots(27)$$

$$\tan\frac{\delta}{2}\pi(M_1+M_2)=y_{c_i}(K_1-K_2) \quad \cdots\cdots(28)$$

ただし，

$$M_1=\left\{\left(ky_{c_r}-\frac{\alpha}{2}y_{c_r}-1\right)(X_{+\langle 0\rangle})_{\gamma 1}+y_{c_r}(X_{+\langle 0\rangle})_{\gamma 2}\right\}\left\{\left(k+\frac{\alpha}{2}\right)(X_{-\langle y_1\rangle})_{\gamma}+(X'_{-\langle y_1\rangle})_{\gamma}\right\} \quad \cdots\cdots(29)$$

$$M_2=\left\{\left(ky_{c_r}-\frac{\alpha}{2}y_{c_r}-1\right)(X_{-\langle 0\rangle})_{\gamma 1}+y_{c_r}(X_{-\langle 0\rangle})_{\gamma 2}\right\}\left\{\left(k+\frac{\alpha}{2}\right)(X_{+\langle y_1\rangle})_{\gamma}+(X'_{+\langle y_1\rangle})_{\gamma}\right\} \quad \cdots\cdots(30)$$

$$K_1=\left\{\left(ky_{c_r}-\frac{\alpha}{2}y_{c_r}\right)(X_{+\langle 0\rangle})_{\gamma 2}+\left(k-\frac{\alpha}{2}\right)(X_{+\langle 0\rangle})_{\gamma 1}+y_{c_r}(X'_{+\langle 0\rangle})_{\gamma 2}\right\}\left\{\left(k+\frac{\alpha}{2}\right)(X_{-\langle y_1\rangle})_{\gamma}+(X'_{-\langle y_1\rangle})_{\gamma}\right\}-\left\{\left(ky_{c_r}-\frac{\alpha}{2}y_{c_r}-1\right)(X_{+\langle 0\rangle})_{\gamma 1}+y_{c_r}(X_{+\langle 0\rangle})_{\gamma 2}\right\}\left\{\left(k+\frac{\alpha}{2}\right)(X'_{-\langle y_1\rangle})_{\gamma}+(X'_{-\langle y_1\rangle})_{i1}\right\} \quad \cdots\cdots(31)$$

$$K_2=\left\{\left(ky_{c_r}-\frac{\alpha}{2}y_{c_r}\right)(X_{-\langle 0\rangle})_{\gamma 2}+\left(k-\frac{\alpha}{2}\right)(X_{-\langle 0\rangle})_{\gamma 1}+y_{c_r}(X'_{-\langle 0\rangle})_{\gamma 2}\right\}\left\{\left(k+\frac{\alpha}{2}\right)(X_{+\langle y_1\rangle})_{\gamma}+(X'_{+\langle y_1\rangle})_{\gamma}\right\}-\left\{\left(ky_{c_r}-\frac{\alpha}{2}y_{c_r}-1\right)(X_{-\langle 0\rangle})_{\gamma 1}+y_{c_r}(X_{-\langle 0\rangle})_{\gamma 2}\right\}\left\{\left(k+\frac{\alpha}{2}\right)(X'_{+\langle y_1\rangle})_{\gamma}+(X'_{+\langle y_1\rangle})_{i1}\right\} \quad \cdots\cdots(32)$$

2. まず $y_{c_i}\to 0$ の時の中立曲線について考える。この場合は

$$M_1-M_2=0,\quad M_1+M_2=0 \quad \cdots\cdots(33)$$

となり，これより

$$\left.\begin{aligned}&\left(ky_{c_r}-\frac{\alpha}{2}y_{c_r}-1\right)(X_{+\langle 0\rangle})_{\gamma 1}+y_{c_r}(X_{+\langle 0\rangle})_{\gamma 2}=0\\&\left(k+\frac{\alpha}{2}\right)(X_{+\langle y_1\rangle})_{\gamma}+(X'_{+\langle y_1\rangle})_{\gamma}=0\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(34)$$

$$\left.\begin{aligned}&\left(ky_{c_r}-\frac{\alpha}{2}y_{c_r}-1\right)(X_{-\langle 0\rangle})_{\gamma 1}+y_{c_r}(X_{-\langle 0\rangle})_{\gamma 2}=0\\&\left(k+\frac{\alpha}{2}\right)(X_{-\langle y_1\rangle})_{\gamma}+(X'_{-\langle y_1\rangle})_{\gamma}=0\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(35)$$

あるいは微小量を無視して

$$\left.\begin{aligned}&(ky_{c_r}-1)(X_{+\langle 0\rangle})_{\gamma 1}+y_{c_r}(X_{+\langle 0\rangle})_{\gamma 2}=0\\&k(X_{+\langle y_1\rangle})_{\gamma}+(X'_{+\langle y_1\rangle})_{\gamma}=0\end{aligned}\right\} \cdots(36)$$

$$\left.\begin{aligned}&(ky_{c_r}-1)(X_{-\langle 0\rangle})_{\gamma 1}+y_{c_r}(X_{-\langle 0\rangle})_{\gamma 2}=0\\&k(X_{-\langle y_1\rangle})_{\gamma}+(X'_{-\langle y_1\rangle})_{\gamma}=0\end{aligned}\right\} \cdots(37)$$

すなわち中立曲線は式 (34)，(35) により，さらに簡単には式 (36)，(37) により決定せられる。

ここで $y_{c_i}\to+0$ の時の y_{c_r} の上側，下側における Reynolds 応力について考えてみよう。この Reynolds 応力は

$$-\bar{\rho}\,\overline{uv}=-\frac{1}{2}\bar{\rho}\,\boldsymbol{R}\,(\overline{uv^*})=\frac{1}{2}\bar{\rho}\,\boldsymbol{I}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\varphi^*\right)ke^{2kc_it} \quad \cdots\cdots(38)$$

y_{c_r} の近傍においてこの量を計算すると，y_{c_r} の上側で

$$\tau_{(>y_c)}=\frac{1}{4i}\bar{\rho}(AB^*-BA^*)\delta\,ke^{2kc_it} \quad \cdots\cdots(39)$$

y_{c_r} の下側で

$$\tau_{(<y_c)}=\frac{-1}{4i}\bar{\rho}(AB^*e^{-i\pi\delta}-A^*Be^{i\pi\delta})\delta\,ke^{2kc_it} \quad \cdots\cdots(40)$$

となる。式 (15)，(19)，(20) を $y_{c_i}\to+0$ の条件のもとで用いれば，

$$\tau_{(>y_c)}=\frac{-1}{2}\bar{\rho}\,a^2A_0{}^{(2)2}\delta\,k\sin\delta\pi\,e^{2kc_it}\times\frac{\left\{\left(my_{c_r}-\frac{\alpha}{2}y_{c_r}-1\right)(X_{+\langle 0\rangle})_{\gamma 1}+y_{c_r}(X_{+\langle 0\rangle})_{\gamma 2}\right\}\times\left\{\left(my_{c_r}-\frac{\alpha}{2}y_{c_r}-1\right)(X_{-\langle 0\rangle})_{\gamma 1}+y_{c_r}(X_{-\langle 0\rangle})_{\gamma 2}\right\}}{|(X_{+\langle 0\rangle})_{\gamma 1}(X_{-\langle 0\rangle})_{\gamma 2}-(X_{-\langle 0\rangle})_{\gamma 1}(X_{+\langle 0\rangle})_{\gamma 2}|^2} \quad \cdots\cdots(41)$$

$$\tau_{(<y_c)}=0 \quad \cdots\cdots(42)$$

したがってこの問題では y_c の上側では Reynolds 応力は一般に有限値をもつと考えられるが，その下側では 0 となる。

式 (41)，(42) は $y_{c_i}\to+0$ で算出されているが，小さい y_{c_i} に対しては近似的に使用できるであろう。式 (34)，(35) と式 (41) を比較すると，中立曲線の条件が満足せられるときは，$\tau_{(>y_c)}=0$ となり，これと式 (42) とより y_c をはさんで上下の Reynolds 応力に差が生じないことがわかる。また式 (41) は $R_i\to 1/4$，$R_i\to 0$

の2つの限界においてともに0に近づくことも明らかである。

つぎに式(34)～(37)において中立曲線の条件の第2式について考えると，式(21)，(22)より $1>\delta>0$ の条件のもとでは $(X_{\pm\langle y_1\rangle})_r$，$(X'_{\pm\langle y_1\rangle})_r$ はいずれも正である。したがって $k, \alpha>0$ の現在の問題ではこの第2式が0となることはあり得ない。

これからいま考えている問題では $1/4>R_i>0$ の領域内で中立曲線は画き得ない。これは重要な結果である。

これに対しI層 $y_1\leq y<\infty$ において $U=U^{(1)}=ay_1$ となり，I層内の一般流の速度が増加しない時は，いま用いられている座標系をずらすことにより，J.W. Miles & L.N. Howard (1964) により取扱われた場合に一致させることができる。現在の座標系を用いると，中立曲線の式は式(36)，(37)に対応するものとしてつぎのように得られる。

$$\left.\begin{array}{l}(ky_{c_r}-1)(X_{+\langle 0\rangle})_{r1}+y_{c_r}(X_{+\langle 0\rangle})_{r2}=0\\(ky_{c_r}-1)(X_{+\langle y_1\rangle})_r+y_{c_r}(X'_{+\langle y_1\rangle})_r=0\end{array}\right\}\cdots(43)$$

$$\left.\begin{array}{l}(ky_{c_r}-1)(X_{-\langle 0\rangle})_{r1}+y_{c_r}(X_{-\langle 0\rangle})_{r2}=0\\(ky_{c_r}-1)(X_{-\langle y_1\rangle})_r+y_{c_r}(X'_{-\langle y_1\rangle})_r=0\end{array}\right\}\cdots(44)$$

式(43)，(44)が成立するためには，式(21)，(24)；(22)，(25)を考慮して中立曲線上では $y_{c_r}=1/2\cdot y_1$ が必要である。これを用い，たとえば $y_1=1$，$y_{c_r}=0.5$ とおいて $k>0$ の条件のもとに中立曲線を画けば，式(43)からは $k=0$ から $k=0.830$ の間に $R_i=0$ から $R_i=1/4$ に向う曲線，式(44)からは $k=0.830$ から $k=1.28$ の間に $R_i=1/4$ から $R_i=0$ に向う曲線を得ることができ，これは Miles & Howard (1964) の Fig.—1 で $\alpha=k/2$ とおいたものと一致する。ただしこの α は Miles & Howard における波数であり，その場合波長はわれわれの y_1 の 1/2 を単位としてとられている。このようにして得られた中立曲線の内側においては $c_i>0$ となり，不安定領域が存在する。これに対し現在取扱われている問題ではつぎのようになる。

3. 式(27)，(28)を用いて y_{c_i} を求める。この数値計算では中立曲線の決定よりは大分高い位数の項まで計算を行なわねばならぬ。式(27)，(28)による特性方程式

$$\tan\frac{\delta}{2}\pi(K_1+K_2)(M_1+M_2)+\cot\frac{\delta}{2}\pi(M_1-M_2)(K_1-K_2)=0 \cdots\cdots(45)$$

において，簡単のため $\delta=1/2$（したがって $R_i=g\alpha/a^2=3/16$），$y_1=1$，$y_{c_r}=1/2$，$\alpha=0.02$ の場合をとり，$k(>0)$ およびこれによる y_{c_i} を求める。$|y_{c_i}|$ が y_{c_r} および $y_1-y_{c_r}$ のいずれよりも十分ちいさい条件を考慮すると，$k\fallingdotseq 0.937$，$y_{c_i}\fallingdotseq -0.137$ の解が得られ，y_{c_i} したがって c_i は負となる。$1/4>R_i>0$ で中立曲線は画き得ないことが，すでにわかっているから，この領域内の c_i は当然すべて $c_i\leq 0$ でなければならぬ。すなわちこの問題では考慮せられた内波は波数のいかんにかかわらず安定である。

強いせん断流が存在する場合に $1/4>R_i>0$ で常に安定な解が得られる他の例としては K.M. Case (1960) のものがある。彼は $y=0$ に固定した水平な境界面を考え，その上に $U=ay$，$\bar{\rho}=\rho_0e^{-\alpha y}$ により示される流速，密度の分布を与え，初期値問題として解いて，内波が安定であることを示している（これに対し，不安定領域の存する場合の解については，前記の Miles & Howard (1964) のほかに，Drazin (1957)，Drazin & Howard (1961) などがある）。密度分布が異なり，また $y=0$ の境界条件が現在の取扱いでは flexible となっているが，このような安定な解の得られる共通の根拠として，速度 U が密度変化の大きい領域のはるか上方まで単調に増加していることがあげられる。これに対しI層で U が増加しない時，不安定領域が生ずることは既述の通りである。このことから，混合層を有する三層の密度流において，上方の河水層の領域で一般流の速度が上方にむかい十分増加してゆく場合には，$0<R_i<1/4$ においても混合層を中心として形成せられる内波は安定であり，発達しない場合があることがわかる。

今後の問題としては U_{yy} の2次的効果の評定，また流れの Reynolds 数がそれほど大きくない場合の粘性の効果の検討が必要であろう。

参考文献

1) Case, K.M. : Stability of an idealized atmosphere, I. Discussion of results, Phys. of Fluids, Vol. 3, No. 2, 1960.
2) Drazin, P.G. : The stability of a shear layer in an unbounded heterogeneous inviscid fluid, J. Fluid Mech., Vol. 4, 1958.
3) Drazin, P.G. & Howard, L.N. : Stability in a continuously stratified fluid, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE., Vol. 87, 1961.
4) Howard, L.N. : Note on a paper of J.W. Miles, J. Fluid Mech., Vol. 10, 1961.
5) Miles, J.W. : On the stability of heterogeneons shear flows, J. Fluid Mech., Vol. 10, 1961.
6) Miles, J.W. : On the stability of heterogeneons shear flows. Part. 2, J. Fluid Mech., Vol. 16, 1963.
7) Miles, J,W. & L.N. Howard : Note on a heterogenous shear flow, J. Fluid Mech., Vol. 20, 1964.